динамический член

$$
-\frac{m}{4\pi r^2 P}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} =
$$

$$
= -\frac{m}{4\pi r(t)P(t)}\left[\frac{\ln r(t) - 2\ln r(t-\Delta t) + \ln r(t-2\Delta t)}{\Delta t^2} + \right.
$$

$$
\left. + \left(\frac{\ln r(t) - \ln r(t-\Delta t)}{\Delta t}\right)^2\right], \tag{22.62}
$$

а система разностных уравнений сохраняет функциональный вид (22.58). При коэффициентах (22.59) решение системы методом Хеньи оказывается устойчивым и при нарушении условия (22.52), что позволяет, например, осуществить плавный переход от статической к динамической эволюции при исследовании взрывов сверхновых (см. гл. 10).

§ 23. Равновесие вращающихся замагниченных звезд

Вращение наблюдается во многих звездах и является их неотъемлемым свойством [199]. В теории равновесия роль вращения сводится к нарушению сферической симметрии и связанному с этим принципиальному усложнению методов построения равновесных решений. В достаточно широкой области угловых моментов вращающиеся звезды обладают аксиальной симметрией. При слабой сжимаемости и больших вращательных моментах устойчивыми оказываются только трехосные фигуры, аналогичные эллипсоидам Якоби несжимаемой жидкости [220]. Напротив, при большой сжимаемости истечение вещества с экватора начинается раньше, чем станет энергетически выгодным образование трехосных фигур. Для политропных звезд*) с уравнением состояния $P = K\rho^{1+1/n}$ при $n < 0{,}808$ раньше образуется трехосная конфигурация, а при $n > 0{,}808$ раньше наступает истечение с экватора [437]. Теория эволюции быстровращающихся звезд далека от своего завершения. Фактически имеется лишь теория равновесных конфигураций баротропных звезд с уравнением состояния $P(\rho)$. Расчеты эволюции в большинстве своем ведутся при упрощающих предположениях, не всегда оправданных в случае быстрого вращения.

Звезды обладают, как правило, магнитным полем. Динамическое влияние поля относительно невелико, но оно может быть важным для установления закона вращения, меридиональной циркуляции, химического перемешивания, что сильно влияет на эволюцию. Еще более важна роль магнитного поля в различных проявлениях звездной активности: вспышек, нетеплового нагрева, образования хромосферы, короны и звездного ветра, появления мощных ультрафиолетовых избытков в спектрах звезд. Магнитное поле тесно связано с вращением, так как для его усиления динамо-механизмами роль вращения является определяющей.

---

*) Теория равновесия невращающихся политропных звезд построена Эмденом (1907) и подробно изложена в книге [218] (см. § 34).

С математической точки зрения построение моделей в случае аксиальной симметрии для вращающихся баротропных звезд и замагниченных звезд с бесконечной проводимостью имеет много общего.

а) Уравнения равновесия вращающихся замагниченных звезд. Стационарное состояние звезды с магнитным полем в условиях бесконечной проводимости определяется системой уравнений [96, 124, 6, 75]

$$\nabla P+\rho\nabla\Phi+\frac{1}{4\pi}\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})+\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=0, \tag{23.1}$$

$$\nabla(\rho\vec{v})=0, \tag{23.2}$$

$$\nabla^2\Phi=4\pi G\rho,\quad \Phi=-G\int\frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\quad (dV \text{ -- элемент объема}), \tag{23.3}$$

$$\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})=0 \tag{23.4а}$$

или

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right)-\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\nabla\right)\vec{v}=0, \tag{23.4б}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0. \tag{23.5}$$

Здесь $\vec{B}$ – напряженность магнитного поля, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ – векторный оператор Гамильтона. Из векторной алгебры следуют равенства

$$\begin{aligned}\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})&=\frac{1}{2}\nabla(B^2)-(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B},\\ \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})&=\vec{v}(\nabla\vec{B})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{v}-\vec{B}(\nabla\vec{v})-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}.\end{aligned} \tag{23.6}$$

Для аксиально симметричной ($\partial/\partial\varphi=0$) звезды с баротропным уравнением состояния и чисто вращательным движением ($v_r=v_z=0$, $v_\varphi=\Omega r$) в цилиндрических координатах (r,φ,z) система (23.1)–(23.5) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial r}+\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\Omega^2 r\right)+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial B_\varphi^2}{\partial r}+\frac{\partial B_z^2}{\partial r}-2B_z\frac{\partial B_r}{\partial z}+2\frac{B_\varphi^2}{r}\right)=0, \tag{23.7}$$

$$B_r\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}+B_z\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}+\frac{B_rB_\varphi}{r}=0, \tag{23.8}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}+\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial B_\varphi^2}{\partial z}+\frac{\partial B_r^2}{\partial z}-2B_r\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)=0, \tag{23.9}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=4\pi G\rho, \tag{23.10}$$

$$B_r\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right)+B_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}=0\ \text{или}\ B_r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+B_z\frac{\partial\Omega}{\partial z}=0, \tag{23.11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0. \tag{23.12}$$

Уравнение неразрывности (23.2) тождественно зануляется, оставляя некоторую свободу выбора угловой скорости $\Omega(r, z)$. Уравнение движения по углу сводится к соотношению (23.8), которое выражает условие отсутствия азимутальной магнитной силы. Из уравнения (23.12) следует, что

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad B_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{23.13}$$

Учтя (23.13) в (23.8) и (23.11), получаем решение

$$B_\varphi = \frac{F_B(\psi)}{r}, \qquad \Omega = F_\Omega(\psi). \tag{23.13а}$$

Кроме того, уравнения (23.8), (23.11), (23.2) имеют частное решение

$$B_r = B_z = 0, \quad B_\varphi, \Omega \neq 0, \tag{23.14а}$$

$$B_r = 0, \quad B_z = B_z(r), \quad \Omega = \Omega(r), \quad B_\varphi = B_\varphi(r). \tag{23.14б}$$

Решение (23.13) с $\Omega = \mathrm{const}$ рассматривалось в [492]. Для случая (23.14а) уравнения движения (23.7), (23.9) сводятся к виду

$$\frac{1}{\rho}\nabla\left(P + \frac{B_\varphi^2}{8\pi}\right) + \nabla\Phi + \left(\frac{B_\varphi^2}{4\pi\rho r^2} - \Omega^2\right)\frac{\nabla r^2}{2} = 0. \tag{23.15}$$

В случае (23.14б) из тех же уравнений имеем

$$\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\Phi + \left(\frac{B_\varphi^2}{4\pi\rho r^2} - \Omega^2\right)\frac{\nabla r^2}{2} + \frac{1}{8\pi\rho}(\nabla B^2\cdot\nabla r)\nabla r = 0,$$
$$B^2 = B_\varphi^2 + B_z^2. \tag{23.16}$$

При этом силовые линии магнитного поля накручиваются на круговые цилиндры, оси которых совпадают с осью вращения. Аналогично можно получить уравнение равновесия, когда поле определяется соотношением (23.13). Выпишем уравнение равновесия (23.1) в сферических координатах (R, θ, φ) в аксиально-симметричном случае в отсутствие поля:

$$\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\Phi - \frac{\Omega^2}{2}\nabla(R^2\sin^2\theta) = 0, \tag{23.17}$$

которое решается совместно с уравнением Пуассона

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = 4\pi G\rho. \tag{23.18}$$

б) Условия существования стационарных решений. Для баротропной среды можно ввести энтальпию

$$H(\rho) = \int\frac{dP(\rho)}{\rho}.$$

Тогда (23.17) запишется в виде

$$\nabla(H + \Phi) - \frac{\Omega^2}{2}\nabla(R^2\sin^2\theta) = 0. \tag{23.19}$$

Решение уравнения (23.19) существует не при любых $\Omega(R, \theta)$. Для вывода ограничений на функцию $\Omega(R, \theta)$, возьмем ротор от уравнения (23.19). Ввиду того что $\nabla \times (\nabla S) = 0$ (S – скаляр), получаем

$$\nabla (R^2 \sin^2\theta) \times \nabla \Omega^2 = 0. \tag{23.20}$$

Условие (23.20) сводится к тому, что $\Omega = \Omega(R \sin\theta)$. Таким образом, угловая скорость постоянна на цилиндрах, оси которых совпадают с осью вращения (теорема Пуанкаре) [199]. В цилиндрических координатах $\Omega = \Omega(r)$.

При наличии тороидального поля (23.14а) условие совместности находится аналогично из (23.15) [284]

$$\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla B_\varphi^2 - \nabla\left(4\pi\Omega^2 - \frac{B_\varphi^2}{\rho r^2}\right) \times \nabla r^2 = 0. \tag{23.21}$$

Условие (23.21) дает ограничение на совместное задание функций $\Omega(r, z)$ и $B_\varphi(r, z)$. Аналогично выводятся ограничения на функции $B_\varphi(r)$, $B_z(r)$ $\Omega(r)$, из уравнения (23.16), а также на функции ψ, $F_B(\psi)$ и $F_\Omega(\psi)$ для (23.13).

Решение уравнений равновесия (23.17), (23.15) или (23.16) при заданном $P(\rho)$ и допустимых функциях $\Omega(r, z)$, $\vec{B}(r, z)$ ищется для звезды данной массы с нулевой плотностью на границе. Граничные значения полей могут быть различными в зависимости от задания поверхностных токов i_s. Вне звезды $B_\varphi = 0$. При $i_s = 0$ тороидальная компонента $B_\varphi = 0$ у поверхности внутри звезды, а граничные значения полоидальных компонент полей B_r и B_z должны удовлетворять условиям совместности. Решение уравнений равновесия звезд с магнитным полем довольно сложно. Оно может быть получено путем разложения в ряд по полиномам и присоединенным функциям Лежандра. Например, для нечетных мультиполей величину ψ из (23.13) представляют в виде [493] (i – нечетные)

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(R) \sin\theta P_i^1(\cos\theta) B_r = \Sigma\, i(i+1) \frac{b_i}{r^2} P_i(\cos\theta).$$

При этом оставляется небольшое число членов разложения. Конфигурации магнитного поля могут быть достаточно сложными, но получаемые формы звезд обычно мало отличаются от сферически-симметричных.

в) Метод самосогласованного поля. В отсутствие магнитного поля уменьшается произвол в равновесных решениях, который сводится к одной функции $\Omega(r)$. Для построения моделей вращающихся звезд с баротропным уравнением состояния предложено много методов применимых вплоть до предельного вращения [199]. Одним из лучших является метод самосогласованного поля, предложенный Острайкером и Марком [519]. Рассмотрим усовершенствованную версию этого метода, разработанную С.И. Блинниковым [64].

Исходным для решения является баротропное уравнение состояния $P(\rho)$, уравнение равновесия в виде (23.19) и интегральное представление для гравитационного потенциала (23.3). Равновесное состояние находится для звезды данной массы M с заданным распределением $\Omega(r)$

или удельного вращательного момента

$$j = \Omega^2 r = j(p), \quad p = \frac{m_r}{M}, \quad m_r \text{ — масса внутри цилиндра радиуса } r. \tag{23.22}$$

Из условия (23.20) следует существование центробежного потенциала

$$\chi(r) = \int_0^r \Omega^2 r' dr', \quad \nabla\chi = \Omega^2 r. \tag{23.23}$$

Построение модели ведется методом последовательных приближений. Вначале выбирается некоторое начальное распределение плотности $\rho = \rho_0(\vec{r})$ и находится гравитационный потенциал $\Phi(r)$ из интегрального представления (23.3). Зная $\rho_0(\vec{r})$ можно найти функцию $m_r(r)$ и из (23.22) определить $\Omega(r)$ по заданному $j(p)$. После этого находится центробежный потенциал $\chi(r)$ из (23.23). При наличии центробежного потенциала можно записать интеграл уравнения равновесия

$$H + \Phi - \chi = B_s, \tag{23.24}$$

где $B_s = \Phi_s - \chi_s$ – полный потенциал на поверхности ($H_s = 0$). Определяя из (23.24) распределение $H(\vec{r})$, находим новое распределение плотности $\rho_1(\vec{r})$, обращая энтальпию $H(\rho)$. Если $\rho_1(\vec{r})$ отличается от $\rho_0(\vec{r})$ больше, чем на заданную величину, то $\rho_1(\vec{r})$ принимается за начальное приближение и итерации проводятся до получения самосогласованности в пределах заданной точности.

Для реализации данной схемы на практике необходимо вычислить потенциал $\Phi(\vec{r})$ и массу m_r по известному распределению плотности $\rho(\vec{r})$. Расчеты проводятся в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} &\rho' = \rho/\rho_c, \quad x = R/R_0, \quad s = r/R_0, \\ &\varphi = \Phi/4\pi G\rho_c R_0^2, \quad \chi' = \chi/4\pi G\rho_c R_0^2 B_s' = B_s/4\pi G\rho_c R_0^2. \end{aligned} \tag{23.25}$$

Здесь R_0 — максимальный радиус звезды, заранее не известный, ρ_c — центральная плотность. Для вычисления φ используется разложение по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$, $\mu = \cos\theta$. Введем величину $\rho_l(x)$*), которую можно вычислить по формуле Гаусса [1, 137]

$$\rho_l(x) \equiv \int_0^1 \rho(x, \mu) P_{2l}(\mu) d\mu = \sum_{j=1}^{N_\mu} \rho(x, \mu_j) w_j P_{2l}(\mu_j), \tag{23.26}$$

здесь μ_j — абсциссы, w_j — веса гауссовой квадратуры на отрезке [0, 1]. При таком определении $\rho_l(x)$ имеем

$$\rho(x, \mu) = \sum_l (4l+1) \rho_l(x) P_{2l}(\mu). \tag{23.27}$$

---

*) Штрихи у безразмерных функций ρ', χ' и B_s' в дальнейшем опускаем.

Если использовать $\rho_l(x)$ в виде (23.26), (23.27), то выражение для потенциала $\varphi(x,\mu)$ с помощью интегрального представления (23.3) получается в виде

$$\varphi(x,\mu) = \sum_l \varphi_l(x) P_{2l}(\mu), \tag{23.28}$$

$$\varphi_l(x) = -\frac{1}{x^{2l+1}}\int_0^x \rho_l(y)\, y^{2l+2} dy - x^{2l}\int_x^1 \rho_l(y)\, y^{-2l+1} dy. \tag{23.29}$$

Выражения (23.26) – (23.28) содержат только четные полиномы Лежандра ввиду симметрии относительно плоскости экватора. Значения функций $\varphi_l(x)$ необходимо знать в тех же точках, в которых задано $\rho_l(x)$. Задав функцию $\rho_l(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ с шагом $h = 1/N_x$, интегралы в (23.29) можно вычислить по формуле Симпсона [1]. После вычисления $\varphi_l(x)$ находим $\varphi(x,\mu)$ с помощью (23.28). Функции $p(s)$ по заданному распределению плотности $\rho(x,\mu)$ имеют вид (см. (23.22))

$$1 - p(s) = \int_s^1 x^2 dx \int_0^{\sqrt{1-s^2/x^2}} \rho(x,\mu)\, d\mu / M', \tag{23.30}$$

где

$$M' = M/4\pi\rho_c R_0^3 = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \rho(x,\mu)\, d\mu. \tag{23.31}$$

Внутренний интеграл в (23.30) вычисляется с помощью разложения (23.27) в виде ($h(s,\mu) = \sqrt{1 - s^2/x^2}$)

$$\int_0^{h(s,\mu)} \rho(x,\mu)\, d\mu = \sum_l (4l+1)\rho_l(x) \int_0^{h(s,\mu)} P_{2l}(\mu)\, d\mu =$$

$$= \sum_l \rho_l(x) \{P_{2l+1}[h(s,x)] - P_{2l-1}[h(s,x)]\}. \tag{23.32}$$

Если функция $p(s)$ вычисляется в точках $s = s_i$ $(i = 1, \ldots, N_x)$, а значения $\rho_l(x)$ задаются в точках $x = x_k$ $(k = 1, \ldots, N_x)$, то удобно завести массив из $\frac{1}{2} N_x(N_x - 1)$ величин $h(s_i, x_k)$, $x_k > s_i$, чтобы не вычислять на каждом шагу одни и те же величины $\sqrt{1 - s_i^2/x_k^2}$. Вычисление внешнего интеграла в (23.30) производится с помощью формулы Симпсона, аналогично (23.29).

После вычисления $p(s)$ находится $\Omega(s)$ по формуле (23.22) с помощью заданного $j(p)$ и центробежный потенциал $\chi(s) = \chi(x\sqrt{1-\mu^2})$ по формуле (23.23). Если задано твердотельное вращение, то имеем

$$\chi = \beta x^2(1-\mu^2), \quad \beta = \Omega^2/8\pi G\rho_c. \tag{23.33}$$

Если вращение задается в виде закона $\Omega = \Omega(s)$, то χ вычисляется сразу по формуле (23.23) без нахождения $p(s)$.

Следующим шагом является вычисление энтальпии H (в тех же единицах, что и потенциалы φ и χ в (23.25)). Константа B_s в (23.24) определяется как максимум величины $|\chi - \varphi|$ при $x = 1$. При этом обеспечивается то, что новая конфигурация всегда будет заключена внутри сферы радиуса $x = 1$. В расчетах [65, 284] бралось $B_s = \varphi - \chi|_{x=1,\mu=0}$, т.е. на экваторе. Знание распределения размерной энтальпии $H = 4\pi G\rho_c R_0^2 H'(x, \mu)$ позволяет с помощью (23.18) найти новое приближение к распределению плотности $\rho_1(x, \mu)$. Если при построении модели фиксируется ρ_c, то известно $H_c(\rho_c)$ и значение максимального радиуса R_0 находится по формуле

$$R_0^2 = H_c/4\pi G\rho_c H'_c. \tag{23.34}$$

Если же фиксирована масса звезды M, то значение R_0, а также ρ_c после каждой итерации находится из совместного решения уравнений (23.31), (23.34). Поверхность звезды определяется из условия $H' = 0$. Вообще говоря, поверхность не проходит через узлы сетки (x_k, μ_j), поэтому для ее нахождения необходимо применять интерполяцию. Вне поверхности имеет место $H < 0$, в этих точках полагается $\rho_1(x, \mu) = 0$. Итерации заканчиваются, когда

$$|\rho_0 - \rho_1|/\rho_1 < \epsilon \tag{23.35}$$

во всех точках, кроме тех, где $\rho_1 < 10^{-6}$. Для не очень сжатых фигур $R_e/R_p \leqslant 3$ ($R_e = R_0$ – экваториальный, R_p – полярный радиусы) в [64] полагалось $\epsilon = 10^{-5}$. Для быстрого вращения и сильного сжатия требования к точности снижались до $\epsilon = 10^{-3}$. Интегральная относительная ошибка в решении Δ оценивается с помощью теоремы вириала [145, 437]

$$\Delta = (W + 2T + 3\int P d\tilde{V})/|W|, \tag{23.36}$$

где W – гравитационная, T – кинетическая энергии.

При малой сжимаемости вещества возможно существование равновесных конфигураций большой сплюснутости. В этом случае разложение плотности по полиномам Лежандра в сферических координатах (23.27) не дает достаточной точности. Для построения равновесных моделей методом самосогласованного поля можно воспользоваться сфероидальными координатами (ζ, η), связь которых с цилиндрическими (r, z) определяется формулами [163]

$$z = R_k\zeta\eta, \quad r = R_k[(\zeta^2 + 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}. \tag{23.37}$$

Параметр сфероидальных координат R_k в расчетах полагается равным R_0. В этих координатах плотность представляется в виде (вместо (23.27), (23.26)) [163]

$$(\zeta^2 + \eta^2)\rho(\zeta, \eta) = \sum_n d_{2n}(\zeta)P_{2n}(\eta), \tag{23.28}$$

$$d_{2n}(\zeta) = (4n + 1)\int_0^1 (\zeta^2 + \eta^2)\rho(\zeta, \eta)P_{2n}(\eta)d\eta, \tag{23.39}$$

а потенциал (вместо (23.28), (23.29))

$$\Phi(\zeta, \eta) = \sum_n \varphi_{2n}(\zeta)P_{2n}(\eta), \tag{23.40}$$

$$\varphi_{2n}(\zeta) = 4\pi G R_k^2 [q_{2n}(\zeta)\int_0^\zeta p_{2n}(x)d_{2n}(x)dx + p_{2n}(\zeta)\int_\zeta^\infty q_{2n}(x)d_{2n}(x)dx]. \tag{23.41}$$

Таблица 22

Отношение полярного R_p к экваториальному R_e радиусу для политропных моделей с предельным вращением ($\Omega(r)$ = const)

n	γ	R_p/R_e	Литературный источник
3	1,333	0,6516	[64]
1,5	1,6667	0,6149	[437, 64]
1	2	0,5580	[437]
0,808	2,238	0,5215	[437]
0,6	2,6667	0,465	[64]
0,5	3	0,4378	[38]

Здесь $p_n(x)$, $q_n(x)$ – функции Лежандра от мнимого аргумента первого и второго рода [140]. Однородно вращающиеся модели в сфероидальных координатах изучались в работе [38].

Расчеты, проведенные в [38, 64], позволили получить отношение R_p/R_e для предельно вращающихся моделей, приведенное в табл. 22 из [38]. Результаты в последней строке табл. 22 получены с помощью сфероидальных координат. Вариант метода самосогласованного поля, предложенный в [383а], оказался устойчивым для произвольно сплюснутых и даже для неодносвязных фигур. Этот метод, аналогично [64], использует разложение по номиналам Лежандра в сферической системе координат (23.28), но вместо задания полной массы M и распределения углового момента j в (23.22) в [64], в методе [383а] при построении модели фиксируются центральная плотность и либо отношение полуосей диска, либо положение внешней и внутренней границ в случае торообразной фигуры. Этот метод обобщен для получения равновесной трехосной фигуры в [383б].

г) **Общий интегральный метод.** Применение метода самосогласованного поля становится затруднительным или невозможным для сильно неоднородных тел (типа гало–ядро) из-за отсутствия сходимости итераций; для неосесимметричных и неодносвязных конфигураций этот метод вообще не применялся. Метод, позволяющий строить равновесные конфигурации для тел любой формы с любым распределением плотности рассмотрен в работе [351]. Он является обобщением предложенного в [352] метода построения равновесных фигур любой формы из несжимаемой жидкости.

Рассмотрим формулировку данного метода для тел с аксиальной и экваториальной симметрией [351] в сферических координатах $(R,\ \theta,\ \varphi)$. По углу θ проводится разбиение на N_T эквидистантных точек

$$\theta_i = \frac{\pi}{2}\,\frac{i-1}{N_T-1}, \quad (i = 1, \ldots, N_T). \tag{23.42}$$

Радиус вдоль каждого угла θ_i разбивается на N_R точек

$$R_{ij} = R_j(\theta_i) = R_{\mathrm{surf}}(\theta_i)\,\frac{j}{N_R}, \quad (j = 1, \ldots, N_R). \tag{23.43}$$

Используя соотношения (23.25) – (23.29), можно найти значения гравитационного потенциала Φ_{ij} через значения плотности

$$\rho_{ij} = \rho(R_{ij}, \theta_i). \tag{23.44}$$

Получаем

$$\Phi_{00} = -4\pi G \sum_l \sin\theta_l \Delta\theta_l \sum_m R_{lm} \Delta R_{lm} \rho_{lm} \quad \text{(в центре)}, \tag{23.45}$$

$$\Phi_{ij} = -4\pi G \sum_l \sin\theta_l \Delta\theta_l \sum_m R_{lm}^2 \Delta R_{lm} \sum_n f_{2n,\,lm}^{ij} P_{2n}(\cos\theta_i) P_{2n}(\cos\theta_l) \rho_{lm}, \tag{23.46}$$

$$(i = 1, \ldots, N_T; \quad j = 1, \ldots, N_R),$$

где

$$f_{2n}(R, R') = \begin{cases} R'^{2n}/R^{2n+1} & \text{при } R \geqslant R', \\ R^{2n}/R'^{2n+1} & \text{при } R < R', \end{cases}$$

$$f_{2n,\,lm}^{ij} = f_{2n}(R_{ij}, R_{lm}). \tag{23.47}$$

На поверхности, при $j = N_R$, $1 \leqslant i \leqslant N_T$ имеет место

$$\rho_{i,N_R} = \rho(R_{i,N_R}, \theta_i) = 0. \tag{23.48}$$

Значения $\Delta\theta_l$ и ΔR_{lm} – угловые и радиальные интервалы, умноженные на соответствующие веса, зависящие от применяемого метода численного интегрироваиия (см. например, (23.26)). В [351] использовался метод Симпсона при интегрировании по радиусу и трапеции по углу. Подставляя (23.45) – (23.47) в интеграл уравнения равновесия (23.24), записанный в каждой точке (θ_i, R_{ij}) и в центре, получаем, совместно с (23.48), нелинейную систему, состоящую из $(N_R + 1)N_T + 1$ уравнений, в которых иеизвестными являются константа B_s, $N_T \cdot N_R + 1$ значений плотности ρ_{ij}, включая ρ_c, N_T значений поверхностного радиуса R_{i,N_R} и один параметр, характеризующий угловую скорость Ω_c. Общее число неизвестных на два больше, чем число уравнений, поэтому два параметра ρ_c или M, а также Ω_c или $R_{\text{surf}}(\pi/2)/R_{\text{surf}}(0)$ можно задавать произвольно, замыкая систему. При этом предполагается, что в (23.24) подставлено значение энтальпии $H(\rho)$ и однопараметрический закон $\Omega = \Omega(\Omega_c, r)$.

В [351] приведен явный вид уравнения (23.24) для политропы

$$P = K\rho^\gamma, \quad H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} K\rho^{\gamma-1} \tag{23.49}$$

и угловой скорости в виде

$$\Omega(r) = \Omega_c/(1 + r^2/A^2)^2, \quad \chi = -\frac{A^2\Omega_c^2}{2(1 + r^2/A^2)}. \tag{23.50}$$

В этом случае получается следующая система нелинейных разностных уравнений:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} K\rho_c^{\gamma-1} + \Phi_{00} + \frac{A^2\Omega_c^2}{2} = B_s, \tag{23.51}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} K\rho_{ij}^{\gamma-1} + \Phi_{ij} + \frac{A^2\Omega_c^2}{2(1 + R_{ij}^2 \sin^2\theta_i/A^2)} = B_s. \tag{23.52}$$

Решение нелинейной системы (23.51), (23.52), (23.48) проводилось в [351] итеративным методом Ньютона.

Использование общего интегрального метода требует больших затрат машинного времени. Для $N_S = 15$, $N_R = 40$ при задании ρ_c и Ω_c получается 616 нелинейных уравнений, для которых нужно $\sim 2{,}5$ с времени центрального процессора на одну итерацию при среднем числе операций в секунду, превышающем 50 миллионов (компьютер типа Крей-1). Для достижения относительной точности 10^{-4} требуется около десяти итераций.

§ 24. Эволюция вращающихся звезд

В реальных звездах баротропность отсутствует, $P = P(\rho, T)$ и уравнение равновесия нужно дополнить уравнениями энергии и теплопереноса. Выпишем уравнения гидродинамики, аналогичные (23.1)–(23.2), в эйлеровых сферических координатах (r, θ, φ) в отсутствие магнитного поля с оставлением членов, линейных по скоростям v_r, v_θ, которые считаются малыми. Так же как в § 23, звезда принимается аксиально симметричной, $\partial/\partial\varphi = 0$. Имеем

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Omega^2 r \sin^2\theta = 0, \qquad v_\varphi = \Omega r \sin\theta, \tag{24.1}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{r\partial \theta} - \Omega^2 r \sin\theta\cos\theta = 0, \tag{24.2}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 0 \quad \text{(лучистая зона)}, \tag{24.3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta \sin\theta) = 0. \tag{24.4}$$

Уравнение для Φ дано в (23.18). В конвективной зоне в правой части (24.3) нужно добавить конвективную вязкость, выравнивающую угловую скорость (см. § 29). В конвективном ядре можно приближенно считать, ввиду большой конвективной (турбулентной) вязкости,

$$\Omega = \text{const} \quad \text{(зона с адиабатической конвекцией)}. \tag{24.3a}$$

Уравнение с вязкостью (29.1) нужно использовать во внешних слоях конвективных оболочек, при малой плотности, где циркуляционные скорости могут быть большими и в (29.4) параметр $\alpha \sim 1$. В обсуждаемой схеме расчета эволюции v_φ находится из (24.3) или (24.3а).

Уравнения энергии и переноса тепла для вращающейся звезды имеют вид

$$\nabla\cdot\vec{l} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 l_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, l_\theta) =$$

$$= \epsilon_n - \epsilon_\nu - T\left(\frac{\partial S}{\partial t} + v_r\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial S}{\partial\theta}\right), \tag{24.5}$$

$$\vec{l} = -\frac{4}{3}\frac{acT^3}{\kappa\rho}\nabla T \quad \text{(лучистое равновесие)}, \tag{24.6}$$

$$\nabla T = \frac{T}{\rho}\gamma_2 \nabla P \quad \text{(адиабатическая конвекция)}. \tag{24.7}$$