

Решение нелинейной системы (23.51), (23.52), (23.48) проводилось в [351] итеративным методом Ньютона.

Использование общего интегрального метода требует больших затрат машинного времени. Для $N_s = 15$, $N_R = 40$ при задании ρ_c и Ω_c получается 616 нелинейных уравнений, для которых нужно $\sim 2,5$ с времени центрального процессора на одну итерацию при среднем числе операций в секунду, превышающем 50 миллионов (компьютер типа Крей-1). Для достижения относительной точности 10^{-4} требуется около десяти итераций.

§ 24. Эволюция вращающихся звезд

В реальных звездах баротропность отсутствует, $P = P(\rho, T)$ и уравнение равновесия нужно дополнить уравнениями энергии и теплопереноса. Выпишем уравнения гидродинамики, аналогичные (23.1)–(23.2), в эйлеровых сферических координатах (r, θ, φ) в отсутствие магнитного поля с оставлением членов, линейных по скоростям v_r, v_θ , которые считаются малыми. Так же как в § 23, звезда принимается аксиально симметричной, $\partial/\partial\varphi = 0$. Имеем

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Omega^2 r \sin^2 \theta = 0, \quad v_\varphi = \Omega r \sin \theta, \quad (24.1)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} - \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (24.2)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 0 \quad (\text{лучистая зона}), \quad (24.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) = 0. \quad (24.4)$$

Уравнение для Φ дано в (23.18). В конвективной зоне в правой части (24.3) нужно добавить конвективную вязкость, выравнивающую угловую скорость (см. § 29). В конвективном ядре можно приближенно считать, ввиду большой конвективной (турбулентной) вязкости,

$$\Omega = \text{const} \quad (\text{зона с адиабатической конвекцией}). \quad (24.3a)$$

Уравнение с вязкостью (29.1) нужно использовать во внешних слоях конвективных оболочек, при малой плотности, где циркуляционные скорости могут быть большими и в (29.4) параметр $\alpha \sim 1$. В обсуждаемой схеме расчета эволюции v_φ находится из (24.3) или (24.3a).

Уравнения энергии и переноса тепла для вращающейся звезды имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{l} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 l_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta l_\theta) = \\ &= \epsilon_n - \epsilon_\nu - T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + v_r \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (24.5)$$

$$\vec{l} = - \frac{4}{3} \frac{acT^3}{\kappa \rho} \nabla T \quad (\text{лучистое равновесие}), \quad (24.6)$$

$$\nabla T = \frac{T}{\rho} \gamma_2 \nabla P \quad (\text{адиабатическая конвекция}). \quad (24.7)$$

Запишем также уравнение для эволюционного изменения химического состава

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} + v_r \frac{\partial x_i}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} =$$

$$= \begin{cases} -4m_p \left(\frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} + \frac{\epsilon_{\text{pp}}}{Q_{\text{pp}}} \right), & i = \text{H}, \\ 4m_p \left(\frac{\epsilon_{\text{CNO}}}{Q_{\text{CNO}}} + \frac{\epsilon_{\text{pp}}}{Q_{\text{pp}}} \right) - \frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} - m_\alpha \epsilon_{1^2\text{C}\alpha} / Q_{1^2\text{C}\alpha}, & i = {}^4\text{He}, \\ \frac{3m_\alpha \epsilon_{3\alpha}}{Q_{3\alpha}} - \frac{m_{1^2\text{C}} - \epsilon_{1^2\text{C}\alpha}}{Q_{1^2\text{C}\alpha}}, & i = {}^{12}\text{C}. \end{cases} \quad (24.8)$$

и аналогично для других реакций. Здесь $\vec{l} = (l_r, l_\theta, 0)$ эрг $\cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ — вектор потока тепла, ϵ_n определено в (22.7), а физические свойства вещества те же, что и для невращающейся звезды в § 22.

Существенное отличие эволюционных уравнений (24.1)–(24.8) от уравнений § 23 для баротропной среды состоит в необходимости учета скоростей v_r и v_θ , которые неизбежно появляются при наличии тепловых потоков.

а) Меридиональная циркуляция. Предположение о существовании стационарного состояния вращающейся звезды с нулевыми скоростями $v_r = v_\theta = 0$ в ряде случаев приводит к противоречию, известному, как парадокс фон Зейпеля [199]. Рассмотрим его вывод для твердотельно вращающейся звезды. При $v_r = v_\theta = 0$ уравнение равновесия сводится к (23.17). Согласно теореме Пуанкаре, для баротропных сред в равновесии должен существовать центробежный потенциал (23.23). С другой стороны, при существовании центробежного потенциала в (23.17) величина $dH = dP/\rho$ должна быть полным дифференциалом. Из (23.17) при учете (23.23) следует, что ∇P всюду параллелен $\nabla(\chi - \Phi)$, что возможно лишь в случае, когда поверхности постоянного давления совпадают с эквипотенциалами $W = \chi - \Phi$ и в звезде $P = P(W)$. Из полноты дифференциала dP/ρ следует условие $\rho = \rho(W)$, а уравнение состояния приводит к тому, что $T = T(W)$. Итак, при твердотельном вращении, а также при наличии другого центробежного потенциала в (23.23) равновесие с $v_r = v_\theta = 0$ возможно лишь при

$$P = P(W), \quad \rho = \rho(W), \quad T = T(W). \quad (24.9)$$

Учтя (24.9) в (24.6), (24.7), получаем

$$\vec{l} = \left(-\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dW} \right) \nabla W. \quad (24.10)$$

Из (24.10) находим

$$\nabla \cdot \vec{l} = \frac{d}{dW} \left(-\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dW} \right) |\nabla W|^2 + \left(-\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dW} \right) \nabla^2 W. \quad (24.11)$$

Для твердотельного вращения с учетом (23.18), (23.23) имеем

$$\nabla^2 W = 2\Omega^2 - 4\pi G\rho = f(W). \quad (24.12)$$

Коэффициент перед $|\nabla W|^2$ есть функция W , однако, ∇W меняется вдоль эквипотенциалей, так как расстояние между ними вдоль полюса меньше, чем вдоль экватора в силу сплюснутости вращающейся звезды. Тогда из (24.11) следует, что $\nabla \cdot \vec{l}$ также меняется на эквипотенциалах W . С другой стороны, в тепловом равновесии при $\partial/\partial t = v_r = v_\theta = 0$ из (24.5) следует постоянство $\nabla \cdot \vec{l}$ на эквипотенциалах, что и составляет парадокс фон Цейпеля. Таким образом, предположение о тепловом равновесии при $v_r = v_\theta = 0$ не выполняется. Нарушение теплового равновесия во вращающейся звезде приводит к тому, что охлаждающиеся области начинают погружаться, а нагревающиеся всплывать и возникает $v_r, v_\theta \neq 0$. Эти медленные движения называются меридиональной циркуляцией. Для общего случая вращения с центробежным потенциалом доказательство отсутствия теплового равновесия и возникновения циркуляции приведено в [199].

Меридиональной циркуляции посвящено много работ (см. обзоры в [157, 75]), где используются различные приближения. В приближении стационарной циркуляции в лучистой области при твердотельном вращении в глубоких слоях звезды происходит всплывание вещества на полюсе и погружение на экваторе, а во внешних слоях, где плотность мала ($\rho < \Omega^2/2\pi G$) — наоборот; при некоторых законах вращения направление циркуляции по всей звезде сохраняется [75, 199]. В отсутствие вязкости и магнитного поля решение для стационарной циркуляции имеет расходимость у поверхности. Например, для медленно и твердотельно вращающейся звезды с точечным источником энергии (модель Каулинга) радиальная скорость циркуляции в лучистой зоне есть [199]

$$v_r = \frac{LR^2}{GM^2} Y(r, \theta), \quad (24.13)$$

где

$$Y(r, \theta) = \{ \alpha \beta_0(r) P_2(\theta) + \alpha^2 (\bar{\rho}/\rho_0) [\beta_2(r) P_2(\theta) + \beta_4(r) P_4(\theta)] \} / (n - 3/2), \quad (24.14)$$

$$\alpha = \frac{\Omega^2 R^3}{GM}, \quad n = \frac{d \ln \rho_0}{d \ln T_0}.$$

Здесь ρ_0, T_0 — распределения плотности и температуры в сферической звезде, $\bar{\rho}$ — средняя плотность звезды, $\beta_i(r)$ — гладкие функции радиуса ~ 1 . Отметим, что помимо поверхности при $\rho_0 \rightarrow 0$ расходимость v_r имеет место у границы конвективного ядра, где $n \rightarrow 3/2$. В дифференциально вращающихся звездах расходимость v_r у поверхности возникает в первом члене разложения по параметру α . В [75, 199] отмечается, что при учете вязкости, магнитного поля или при отказе от условия стационарности особенность может быть устранена. Подробное изучение стационарной циркуляции с учетом вязкости было сделано Тассулем и Тассуль (см. работу [604] и ссылки в ней).

Влияние меридиональной циркуляции на эволюцию звезд проявляется в возможности перемешивания и выравнивания химического состава. Оценки, проведенные в [229] с учетом химических неоднородностей, привели к выводу о незначительности перемешивания за счет циркуля-

они даже у быстровращающихся звезд верхней части главной последовательности. Эти оценки нуждаются в количественном подтверждении.

б) Метод счета эволюции с учетом циркуляции. При расчете эволюции вращающейся звезды должны, вообще говоря, учитываться следующие физические процессы: 1) эволюция химического состава, 2) тепловая нестационарность, 3) нестационарная циркуляция, 4) обмен вращательным моментом за счет циркуляции, вязкости, магнитного поля, 5) химическое перемешивание, 6) потеря массы. Учет первых двух факторов не связан с принципиальными трудностями и проводится так же, как для невращающейся звезды, см. § 23. Вопрос о циркуляции в существующих эволюционных расчетах обычно обходится (см. обзор [199]) заданием ограничений на распределение угловой скорости, например, постоянство Ω на поверхностях обобщенного потенциала W [436]. Как показано в [445] это предположение не является оправданным и выравнивания Ω на эквипотенциалах при эволюции не происходит. Предположение о стационарной циркуляции приводит к появлению нефизических расходимостей у поверхности (24.13), (24.14), поэтому корректный расчет эволюции вращающихся звезд требует рассмотрения нестационарной циркуляции. Обмен вращательным моментом и химическое перемешивание по звезде, помимо циркуляционных движений, связан с различными свойствами переноса. Действие микроскопических механизмов переноса: вязкости, диффузии и термодиффузии, обычно пренебрежимо мало за время эволюции звезды. Весьма эффективными могут быть турбулентные процессы переноса в областях развитой конвекции. Химический состав этих областей считается однородным из-за быстрого перемешивания, а ввиду большой турбулентной вязкости (см. § 29) угловая скорость в этих областях также можно считать постоянной. В [445] анализируется вопрос о влиянии неустойчивостей, связанных с вращением, на передачу момента и перемешивание. Если рассмотреть эту проблему с эволюционной точки зрения, то, очевидно, механические и тепловые процессы не могут привести звезду в неустойчивое состояние. Приход в такое состояние может быть связан с изменением условий устойчивости в результате химической эволюции. В [445] показано, что время развития подобных неустойчивостей сравнимо с характерным циркуляционным временем, поэтому рассмотренный ниже метод расчета с оставлением линейных по скорости членов автоматически учитывает осесимметричные неустойчивые моды. Магнитное поле участвует в передаче момента как непосредственно, так и через влияние на меридиональную циркуляцию [199, 492, 493, 157]. В рассматриваемом методе магнитное поле не учитывается.

Самосогласованные методы расчета эволюции с потерей массы не вполне разработаны даже для невращающихся звезд (см. § 22 п.д). Во вращающихся звездах вопрос еще более усложняется из-за влияния центробежных и магнитных сил на истечение [471]. Будем считать массу звезды постоянной.

Исходными для расчета эволюции являются уравнения (24.1)–(24.8), (23.18) или (23.3). Предлагаемый метод содержит черты самосогласованного метода (см. § 23, п. в) и метода Хенли (§ 22, п. б) и обобщает метод работы [436] на наличие циркуляции. Требуется найти решение $8 + i$ уравнений, i – число рассматриваемых в расчетах элементов, от-

носителем того же числа неизвестных

$$\rho, T, v_r, v_\theta, v_\varphi, l_r, l_\theta, \Phi, x_i. \quad (24.15)$$

Для построения начальной модели можно задаться распределением энтропии по звезде, например, из невращающейся химически однородной модели той же массы, и найти механически равновесную модель, например, одним из методов § 23. Все временные производные величины $D^{(i)}$ в уравнениях (24.1)–(24.5), (24.8) заменяются конечными разностями

$$\frac{\partial D^{(i)}}{\partial t} = \frac{D^{(i)}(t) - D^{(i)}(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (24.16)$$

Звезда разбивается на N_T точек по углу θ_j , $0 < \theta_j < \pi/2$, $j = 1, \dots, N_T$, и N_R точек по радиусу r_{ij} , $i = 1, \dots, N_R$. Дифференциальные уравнения заменяются на конечно-разностные. Помимо неизвестных в точках разбиения, исключая центр, дополнительными неизвестными являются центральные значения ρ_c и T_c , а также N_T значений внешнего радиуса. Для определения этих неизвестных используется условие постоянства массы, например, в виде (23.31) для определения ρ_c и условие (22.15), определяющее давление в N_T граничных точках для определения внешнего радиуса $r_{NR, j}$, $j = 1, \dots, N_T$. Во вращающейся звезде вместо g в (22.15) нужно использовать эффективное значение

$$g_{\text{ef}} = |\nabla(\Phi - \chi)|_{NR, j}. \quad (24.17)$$

В силу существования оси и плоскости симметрии $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ нужно учесть равенство там нулю производных $\partial/\partial\theta$ от всех величин (24.15), кроме того, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ обращаются в нуль сами величины $l_\theta = v_\theta = 0$, а при $\theta = 0$ на оси симметрии имеет место $v_\varphi = 0$. На внешней поверхности $r_{NR, j}$ следует также учесть условие

$$(l_n)_{NR, j} = \frac{ac}{4} r_{NR, j}^2 T_{NR, j}^4,$$

$$l_n = \frac{\sqrt{l_r^2 + \left(\frac{dr_s}{d\theta}\right)^2} l_\theta^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr_s}{d\theta}\right)^2}} \quad \text{— нормальная к поверхности составляющая теплового потока,} \quad (24.18)$$

$$r_s(\theta_j) \equiv r_{NR, j},$$

аналогичное (22.11). В итоге, число неизвестных должно совпадать с числом разностных уравнений. Блок-схема описанного метода расчета эволюции приведена на рис. 24. В схеме на рис. 24, а все величины определяются по схеме, неявной относительно времени (см. (22.41), (22.42)). На стадии горения водорода новое распределение химического состава, возможно, достаточно определять явным образом, как на рис. 24, б. Здесь указано также возможное разделение итерационного процесса на части, что потребует

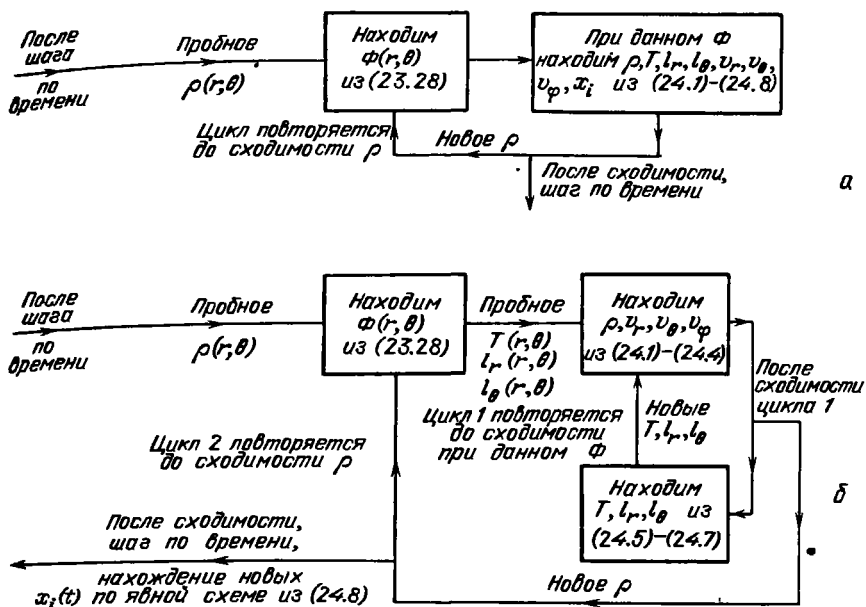


Рис. 24. Возможные блок-схемы для расчетов эволюции вращающейся звезды с учетом циркуляции. Везде имеются в виду разностные аналоги соответствующих уравнений

меньшего объема памяти, но может увеличить время счета. Примерная размерность разностной системы уравнений составляет $(7 + i) \times N_T \times N_R$ для схемы на рис. 24, а, для схемы на рис. 24, б размерности равны $\sim 4 \times N_T \times N_R$ и $\sim 3 \times N_T \times N_R$ для внутреннего и внешнего итерационных блоков, соответственно. Получение достаточной точности расчетов в данном методе возможно только при использовании суперкомпьютеров. Каждый из блоков нахождения величин $\rho, T, l_r, l_\theta, v_r, v_\theta, v_\phi, x_i$ на рис. 23 состоит в решении нелинейной системы разностных уравнений итеративным методом типа Хенни. В самой общей постановке можно вообще отказаться от итеративных циклов и, используя разностную запись уравнения Пуассона (23.46), находить все величины (24.15), включая Φ в едином итерационном процессе, аналогично общему интегральному методу из § 23, п. г. При этом получается система из $\sim (8 + i) \times N_T \times N_R$ нелинейных разностных уравнений.