мическое время при этом остается минимальным и статическое равновесие звезды не нарушается.

4. В звездах малой и средней массы с $M \leqslant (6 \div 8) M_\odot$, ядра которых превращаются в белые карлики, условие минимальности τ_h никогда не нарушается. Слабые взаимодействия приводят к нейтринному охлаждению звезд, которое на стадии образования белого карлика преобладает над фотонным и определяет тепловое время $\tau_h \ll \tau_{th} \sim \tau_\beta \leqslant \tau_n$. В конце образования белого карлика после сброса оболочки ядерные реакции в карлике в центральных областях прекращаются и возможно лишь остаточное горение водорода и гелия в оболочке.

5. В более массивных звездах, у которых ядро после сброса оболочки превышает чандрасекаровский предел, развивается неустойчивость сложного типа, включающая в себя тепловые, ядерные и слабые процессы. У наименее массивных звезд этого интервала происходит быстрое падение τ_n из-за роста температуры в вырожденном С–О ядре, так что достигается условие

$$\tau_n \sim \tau_{th} \leqslant \tau_h, \tau_\beta, \tag{42.3}$$

означающее начало теплового взрыва (см. § 35).

6. Для больших масс наступление условия (42.3) не происходит, но захват электронов при их большой ферми-энергии ускоряется до тех пор, пока не наступает условие

$$\tau_\beta \sim \tau_h \leqslant \tau_{th}, \tau_n, \tag{42.4}$$

означающее наступление коллапса, вызываемого нейтронизацией (см. § 36).

7. В самых массивных звездах, где вырождение не наступает, происходит уменьшение τ_n из-за роста температуры, оно становится меньше τ_h, что означает установление ядерного равновесия. В процессе дальнейшего излучения энергии звезда попадает в область динамической неустойчивости, принципиально отличной от всех, рассмотренных выше.

При неустойчивостях, связанных с тепловыми, ядерными и слабыми процессами их развитие связано с быстрым уменьшением данных характерных времен. Если они становятся порядка или меньше гидродинамического, то эта неустойчивость заканчивается тепловым взрывом или коллапсом. Динамическая неустойчивость связана не с изменением характерного динамического времени τ_h, которое меняется слабо, а с изменением структуры равновесного состояния. В отличие от остальных типов, динамическая неустойчивость может быть исследована на основе теории консервативных механических систем. Основными здесь являются два эквивалентных метода: вариационный и малых возмущений.

§ 43. Вариационный принцип и малые возмущения

а) **Вариационный принцип в ОТО.** Рассмотрим равновесие сферически-симметричных звезд и их устойчивость на основе вариационного принципа. Рассмотрение проведем в рамках ОТО для возможности применения результатов к нейтронным и сверхмассивным звездам. В метрике шварцшильдовского типа [143]

$$ds^2 = -g_{00}\,dt^2 + g_{11}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{43.1}$$

для произвольного сферически-симметричного распределения вещества можно записать полную энергию звезды ϵ в виде [143]

$$e \equiv e(r) = 4\pi \int_0^r \widetilde{E} n r^2 dr, \qquad \epsilon = e(R), \tag{43.2}$$

где R – шварцшильдовский радиус звезды, $\widetilde{E}$ – внутренняя энергия на один барион $\widetilde{E} = \dfrac{\rho_0}{n}(E + c^2)$. Элемент физического объема сферического слоя dv равен

$$dv = 4\pi r^2\, dr \sqrt{g_{11}} = 4\pi r^2 \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{-1/2} dr. \tag{43.3}$$

Введем также N – полное число барионов в звезде и ν – число барионов внутри данного радиуса r

$$\nu(r) = 4\pi \int_0^r n r^2 \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{-1/2} dr, \quad N = \nu(R). \tag{43.4}$$

Согласно вариационному принципу [201, 105], полная энергия звезды ϵ имеет экстремум в точке равновесия при заданном полном числе барионов N и фиксированном распределении энтропии по барионам. Полная энергия ϵ является в данном случае аналогом потенциальной энергии консервативной системы, причем консервативность обеспечивается неизменностью распределения энтропии. Введем лагранжеву координату ν из (43.4), так что

$$\frac{de}{d\nu} = \widetilde{E}\left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{1/2}, \tag{43.5}$$

$$n = \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{1/2} \left(4\pi r^2 \frac{dr}{d\nu}\right)^{-1}. \tag{43.6}$$

Найдем вариацию полной энергии ϵ как функционала от вариации радиуса $\delta r(\nu)$. Варьируя (43.6), получим

$$\delta n = \frac{Gen}{c^4 r} \frac{\delta r/r - \delta e/e}{1 - 2Ge/c^4 r} - 2n\frac{\delta r}{r} - \frac{4\pi r^2 n^2 d(\delta r)/d\nu}{(1 - 2Ge/c^4 r)^{1/2}}. \tag{43.7}$$

Варьируя (43.5) с учетом (43.7) и используя термодинамическое соотношение [145] $\partial \widetilde{E}/\partial n = P/n^2$, получим

$$\frac{d(\delta e)}{d\nu} = -\frac{P/n + \widetilde{E}}{(1 - 2Ge/c^4 r)^{1/2}} \frac{Ge}{c^4 r}\left(\frac{\delta e}{e} - \frac{\delta r}{r}\right) -$$

$$- \frac{2P}{nr}\left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{1/2} \delta r - 4\pi r^2 P \frac{d(\delta r)}{d\nu}. \tag{43.8}$$

Решая (43.8) как линейное неоднородное уравнение относительно δe

(см. [195]), получим

$$\delta e(\nu)=\exp\left\{-\int_0^\nu\left(\frac{\mathrm{P}}{n}+\tilde{E}\right)\left(1-\frac{2Ge}{c^4r}\right)^{-1/2}\frac{Gd\nu}{c^4r}\right\}\times$$

$$\times\left\{\int_0^\nu\exp\left[\int_0^\nu\left(\frac{\mathrm{P}}{n}+\tilde{E}\right)\left(1-\frac{2Ge}{c^4r}\right)^{-1/2}\frac{G}{c^4r}d\nu\right]\times\right.$$

$$\times\left[\left(\frac{P}{n}+\tilde{E}\right)\left(1-\frac{2Ge}{c^4r}\right)^{-1/2}\frac{G}{c^4r^2}(e+4\pi r^3P)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}\frac{dP}{dr}\left(1-\frac{2Ge}{c^4r}\right)^{1/2}\right]\delta r d\nu\right\}-4\pi r^2P\delta r. \tag{43.9}$$

Приравнивая к нулю вариацию полной энергии $\delta\epsilon=\delta e(N)=0$ с учетом $P(N)=0$, получаем из (43.9) уравнение равновесия Оппенгеймера–Волкова (40.3), где $\rho c^2=\tilde{E}n$, $mc^2=e$. Поиск экстремума ϵ из (43.2) при фиксированном N из (43.4) представляет собой изопериметрическую задачу вариационного исчисления [196]. Для этой задачи справедлив принцип взаимности, который в применении к данному случаю гласит, что функция $r(\nu)$, задающая экстремум ϵ при фиксированном N одновременно задает экстремум N при фиксированном ϵ.

Устойчивость звезды определяется положительностью второй вариации энергии

$$\delta^2\epsilon>0, \tag{43.10}$$

что соответствует минимуму энергии звезды в устойчивом равновесии. Если в процессе эволюции $\delta^2\epsilon$ обращается в нуль, меняя знак с плюса на минус, то это состояние является критическим и в нем происходит потеря устойчивости. При выводе условия устойчивости находится $\delta^2 n$ из (43.7) и $d(\delta^2 e)/d\nu$ из (43.8). Последнее сводится к дифференциальному уравнению относительно $\delta^2 e$, решая которое аналогично (43.8), получаем следующее выражение для второй вариации энергии:

$$\delta^2\epsilon=\exp\left\{-\int_0^R\frac{\tilde{E}n+P}{1-2Ge/c^4r}\frac{4\pi Gr}{c^4}dr\right\}\times$$

$$\times 4\pi\int_0^R\exp\left\{\int_0^r\frac{\tilde{E}n+P}{1-2Ge/c^4r}\frac{4\pi Gr}{c^4}dr\right\}\times$$

$$\times\left\{\gamma P\left[2\delta r+r\frac{d(\delta r)}{dr}-\frac{Ge}{c^4r}\frac{1+4\pi r^3P/e}{1-2Ge/c^4r}\delta r\right]^2-\right.$$

$$-\frac{1}{4}\frac{(P+\tilde{E}n)(1+4\pi r^3P/e)^2}{(1-2Ge/c^4r)^2}\left(\frac{2Ge}{c^4r}\right)^2(\delta r)^2-$$

$$\left.-2\frac{P+\tilde{E}n}{1-2Ge/c^4r}\left(1+\frac{1}{2}\frac{4\pi r^3P}{e}\right)\frac{2Ge}{c^4r}(\delta r)^2\right\}dr, \tag{43.11}$$

где $\gamma \equiv \gamma_1 = (\partial \ln P/\partial \ln \rho)_S$ из (1.11). Если $t_{n,\beta} \gg t_h$, то показатель адиабаты вычисляется при замороженном химическом составе, а если $t_n \ll t_h$, то при равновесном ядерном. Наиболее сложен случай $t_n \sim t_h$ или $t_\beta \sim t_h$. Если соотношение $t_n \sim t_h$ может быть справедливо только в узком интервале параметров из-за экспоненциальной зависимости скоростей реакций (см. гл. 3), то соотеношение $t_\beta \sim t_h$ может сохраняться достаточно долго в начале коллапса малой массы (см. § 36). В этих случаях необходимо кинематическое описание ядерных или слабых реакций, появляется диссипация типа второй вязкости, рост энтропии и нарушаются условия применимости вариационного принципа. Феноменологический вывод уравнения движения имеет более широкую область применимости, чем вариационный. Например, уравнения Эйлера в гидродинамике можно вывести обоими способами, а уравнения Навье–Стокса с вязкостью – только феноменологически в гидродинамике или из более общей кинетической теории [222]. В статике при $v = 0$ уравнения Эйлера и Навье–Стокса совпадают. Это связано с тем, что при $v = 0$ вязкая диссипация отсутствует. При использовании вариационного принципа требуется отсутствие диссипации не только при $v = 0$, но и при малых $v \neq 0$, поэтому при $t_\beta \sim t_h$, когда действует вторая вязкость ($\sim \operatorname{div} \vec{v}$), вариационный принцип неприменим для вывода условия устойчивости. Здесь нужно пользоваться методом возмущений, который позволяет учесть влияние кинетики процессов на устойчивость. Для консервативных систем оба метода дают одинаковый результат. В частности, условие (43.11) было выведено как методом малых возмущений в [323], так и вариационным методом в [201].

б) **Ньютоновский и постньютоновский пределы.** Перепишем вариацию энергии $\delta\epsilon$ в виде, не содержащем производных от термодинамических функций. Имеем с учетом (43.9)

$$\delta\epsilon = \exp\left\{-\int_0^N \left(\frac{P}{n} + \tilde{E}\right)\left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{-1/2} \frac{G\,d\nu}{c^4 r}\right\} \times$$

$$\times \left\{\int_0^N \exp\left[\int_0^\nu \left(\frac{P}{n} + \tilde{E}\right)\left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{-1/2} \frac{G}{c^4 r}\,d\nu\right] \times\right.$$

$$\times \left[\left(\frac{P}{n} + \tilde{E}\right)\left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{-1/2} \frac{Ge}{c^4 r^2}\,\delta r - \frac{2P}{nr} \times\right.$$

$$\left.\left.\times \left(1 - \frac{2Ge}{c^4 r}\right)^{1/2} \delta r - 4\pi r^2 P \frac{d(\delta r)}{d\nu}\right] d\nu\right\}. \qquad (43.12)$$

В ньютоновском пределе, учтя

$$\begin{aligned} &\rho_0 = n m_u, \quad m_0 = \nu m_u, \quad M_0 = N m_u, \\ &\tilde{E} n = (E + c^2)\rho_0, \\ &d\nu/n = dm_0/\rho_0, \end{aligned} \qquad (43.13)$$

из (43.2), (43.5), (43.12), (43.11) имеем

$$\epsilon = M_0c^2 + \int_0^{M_0}\left(E - \frac{Gm_0}{r}\right)dm_0, \tag{43.14}$$

$$\delta\epsilon = \int_0^{M_0}\left(\frac{Gm_0}{r^2}\,\delta r - 2\,\frac{P}{\rho}\frac{\delta r}{r} - \frac{P}{\rho}\,\frac{d\delta r}{dr}\right)dm_0, \tag{43.15}$$

$$\delta^2\epsilon = \int_0^{M_0}\left\{\gamma\,\frac{P}{\rho}\left[2\,\frac{\delta r}{r} + \frac{d(\delta r)}{dr}\right]^2 - 4\,\frac{Gm}{r}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2\right\}dm_0. \tag{43.16}$$

При этом было положено $e = m_0c^2$, а шварцшильдовский радиус r отождествлен с ньютоновским $r_{\text{Н}}$. Ньютоновское уравнение равновесия (22.1) следует из условия $\delta\epsilon = 0$ в (43.15) после интегрирования по частям в последнем члене. Постньютоновское приближение получается аналогично, если оставить члены $\sim\left(\frac{Gm}{rc^2}\right)^2$, $P/\rho c^2$. Имеем из (43.2), (43.5) с учетом (43.13)

$$\epsilon = \int_0^N \rho_0\,(E + c^2)\left(1 - \frac{2Ge}{c^4r}\right)^{1/2}\frac{dv}{n} =$$

$$= \int_0^{M_0}\rho_0\,(E + c^2)\left[1 - \frac{Ge}{c^4r} - \frac{1}{2}\left(\frac{Ge}{c^4r}\right)^2\right]\frac{dm_0}{\rho_0} = \tag{43.17}$$

$$= M_0c^2 + \int_0^{M_0}\left(E - \frac{Ge}{c^4r}\right)dm_0 - \int_0^{M_0}\frac{GEm_0}{c^2r}\,dm_0 - \frac{1}{2}\int_0^{M_0}\left(\frac{Gm_0}{rc}\right)^2 dm_0.$$

В двух последних членах положено $e = m_0c^2$. Во втором члене следует учесть релятивистские поправки к e и r. При переходе к ньютоновскому описанию не меняется физический объем v, определенный в (43.3), и ньютоновский радиус $r_{\text{Н}} = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{1/3}$. Из (43.5) имеем

$$e = \int_0^{m_0}(E + c^2)\left(1 - \frac{Gm_0}{c^2r}\right)dm_0 = m_0c^2 + \int_0^{m_0}E\,dm_0 -$$

$$- \int_0^{m_0}\frac{Gm_0\,dm_0}{r}\;. \tag{43.18}$$

Из (43.3) следует

$$\frac{4\pi}{3}\,r^3 = v - \int_0^{m_0}\frac{Gm_0}{c^2r}\,dv, \qquad r = r_{\text{Н}}\left(1 - \frac{1}{r^3}\int_0^r\frac{Gm_0}{c^2}\,r\,dr\right). \tag{43.19}$$

В последних малых членах (43.17) можно отождествить r и $r_{\text{Н}}$. Подставляя

(43.18), (43.19) в (43.17), имеем [109]

$$\epsilon = M_0c^2 + \int_0^{M_0}\left(E - \frac{Gm_0}{r}\right)dm_0 - \frac{G}{c^2}\int_0^{M_0}\frac{Em_0}{r}dm_0 -$$

$$-\frac{G^2}{2c^2}\int_0^{M_0}\frac{m_0^2}{r^2}dm_0 - \frac{G}{c^2}\int_0^{M_0}\frac{dm_0}{r}\left(\int_0^{m_0}Edm_0\right) + \tag{43.20}$$

$$+\frac{G^2}{c^2}\int_0^{M_0}\left(\int_0^{m_0}\frac{m_0dm_0}{r}\right)\frac{dm_0}{r} - \frac{G^2}{c^2}\int_0^{M_0}\frac{m_0}{r^4}\left(\int_0^{r}m_0rdr\right)dm_0.$$

Рассмотрим постньютоновское приближение для случая распределения массы по адиабате $n = 3$, которое остается равновесным при однородном расширении или сжатии. В вариациях $\delta\epsilon$ и $\delta^2\epsilon$ это соответствует линейной собственной функции $\delta r = \alpha r$. При вычислении последних пяти интегралов в (43.20) — малых поправок на ОТО, учтем равенство $E\rho_0 = 3P$ и ньютоновское уравнение равновесия (22.1)*). Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^{M_0}\frac{Em_0}{r}dm_0 = 3\int_0^{M_0}\frac{P}{\rho_0 r}m_0dm_0 = -3\int_0^{R}\left(\int_0^{m_0}\frac{m_0dm_0}{\rho_0 r}\right)\frac{dP}{dr}dr =$$

$$= 3G\int_0^{M_0}\frac{m_0dm_0}{r^4}\left(\int_0^{r}m_0rdr\right),$$

$$\int_0^{m_0}Edm_0 = 3\int_0^{m_0}\frac{P}{\rho_0}dm_0 = 4\pi Pr^3 - 4\pi\int_0^{m_0}r^3\frac{dP}{dr}dr = 4\pi Pr^3 + G\int_0^{m_0}\frac{m_0dm_0}{r},$$

$$\int_0^{M_0}Pr^3\frac{dm_0}{r} = \int_0^{M_0}Pd\left(\int_0^{m_0}r^2dm_0\right) = \int_0^{M_0}\frac{\rho Gm_0}{r^2}\left(\int_0^{m_0}r^2dm_0\right)dr =$$

$$= \int_0^{M_0}\frac{\rho G m_0}{r^2}\left(m_0r^2 - 2\int_0^{r}m_0\,rdr\right)dr =$$

$$= \frac{G}{4\pi}\left[\int_0^{M_0}\frac{m_0^2}{r^2}dm_0 - 2\int_0^{M_0}\frac{m_0dm_0}{r^4}\int_0^{r}m_0\,rdr\right]. \tag{43.21}$$

Подставляя (43.21) в (43.20), получаем

$$\epsilon = M_0c^2 + \int_0^{M_0}\left(E - \frac{Gm_0}{r}\right)dm_0 - \frac{G^2}{c^2}\left[2\int_0^{M_0}\frac{m_0dm_0}{r^4}\left(\int_0^{r}m_0rdr\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\int_0^{M_0}\frac{m_0^2}{r^2}dm_0\right]. \tag{43.22}$$

*) В (22.1) обозначено $m = m_0$, так как в ньютоновской теории рассматривается обычно только масса покоя.

Ниже будем опускать индекс "0" у m_0 и M_0. Последний член в (43.22) есть $\epsilon_{ОТО}$ из (34.7), (34.16). Используя (34.2), (34.8), получим для $n = 3$

$$\epsilon_{ОТО} = -\frac{G^2}{c^2} M^{7/3} \rho_c^{2/3} \left[\frac{(4\pi)^{2/3}}{M_3^{7/3}} \left(\frac{3}{4} \int_0^{\xi_1} \theta^5 \xi^2 d\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3}{8} \int_0^{\xi_1} \theta^7 \xi^4 d\xi \right)\right] = -0{,}9183 \frac{G^2}{c^2} M^{7/3} \rho_c^{2/3}. \qquad (43.23)$$

Здесь использованы значения интегралов J_{52} и J_{74} из таблицы к задаче § 34. Использование (43.23) в энергетическом методе для исследования устойчивости относительно коллапса сделано в § 34. Следующая постньютоновская поправка к ϵ найдена в [76] для невращающихся звезд и в [292] для звезд с вращением.

в) Метод малых возмущений в ньютоновской теории. Покажем эквивалентность вариационного и пертурбативного подходов на примере ньютоновской теории. Используем уравнения гидродинамики (35.1)–(35.2) для адиабатического случая при малых отклонениях от статического равновесного состояния

$$r = r_0 + r', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad v_r \text{ мало}, \quad P = P_0 + P' = P_0 + \gamma_1 \frac{P_0}{\rho_0} \rho'. \qquad (43.24)$$

Из уравнений (35.1), (35.2) с учетом (43.24) имеем

$$\frac{\partial r'}{\partial t} = v_r, \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} = -4\pi r_0^2 \frac{\partial P'}{\partial m} - 8\pi r_0 r' \frac{\partial P_0}{\partial m} + \frac{2Gm}{r_0^3} r',$$

$$\rho' = -4\pi \rho_0^2 r_0^2 \frac{\partial r'}{\partial m} - 2\rho_0 \frac{r'}{r}, \qquad (43.25)$$

$$dm = 4\pi \rho_0 r_0^2 dr_0.$$

Приводя систему (43.25) к уравнению относительно r', получаем

$$\frac{\partial^2 r'}{\partial t^2} = 4\pi r_0^2 \frac{\partial}{\partial m} \left[\gamma_1 \frac{P_0}{\rho_0} \left(4\pi \rho_0^2 r_0^2 \frac{\partial r'}{\partial m} + 2\rho_0 \frac{r'}{r_0} \right) \right] -$$

$$-8\pi r_0^2 \frac{\partial P_0}{\partial m} r' + \frac{2Gm}{r_0^3} r'. \qquad (43.26)$$

Решение линейных уравнений ищется в виде

$$(r', \rho', P') = (\bar r, \bar \rho, \bar P) e^{-i\omega t} \qquad (43.27)$$

ввиду того, что коэффициенты их не зависят от времени. Подставляя (42.27) в (42.26) и учитывая уравнение равновесия (22.1), получаем

$$\omega^2 \bar r = -4\pi r_0^2 \frac{d}{dm} \left[\gamma_1 \frac{P_0}{\rho_0} \left(\frac{d\bar r}{dr_0} + 2\frac{\bar r}{r_0} \right) \rho_0 \right] - \frac{4Gm}{r_0^3} \bar r \equiv \mathfrak{L}(\bar r). \qquad (43.28)$$

Из условия регулярности функции $\bar{r}/r_0$ при $r_0 = 0$ следует граничное условие [130]

$$\frac{d}{dr_0}\left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right) = 0 \quad \text{при} \quad r_0 = 0, \tag{43.29}$$

а из регулярности функции $\bar{P}/P_0$ на границе $r = R$ для уравнений состояния с $P_0/\rho_0 \to 0$ при $\rho_0 \to 0$ следует условие [130]

$$\frac{d}{dr_0}\left(\frac{\bar{P}}{P_0}\right) = 0 \quad \text{при} \quad r_0 = R, \tag{43.30}$$

которое при учете (43.24), (43.25) примет вид

$$\left(4 - 2\gamma_1 + \frac{\omega^2 r_0^3}{GM}\right)\frac{\bar{r}}{r_0} - \gamma_1 \frac{d\bar{r}}{dr_0} = 0 \quad \text{при} \quad r_0 = R. \tag{43.31}$$

Краевая задача Штурма–Лиувилля [196] для уравнения (43.28) при граничных условиях (43.29), (43.31) имеет конечное, физически допустимое решение с точностью до произвольного множителя в виде собственных функций $\bar{r}_i(r_0)$ только для собственных частот $\omega = \omega_i$. Действительные собственные частоты при $\omega_i^2 > 0$ соответствуют устойчивости. Все собственные числа уравнения (43.28) действительны ввиду самосопряженности оператора $\mathfrak{L}(\bar{r})$ [130]. Рассмотрим нормированные действительные собственные функции

$$\int_0^M \bar{r}^{\,2} dm = 1. \tag{43.32}$$

Умножая (43.28) на $\bar{r}$ и интегрируя по звезде, получим после интегрирования по частям

$$\omega^2 = \int_0^M \bar{r}\,\mathfrak{L}(\bar{r})\,dm = \int_0^M \left[\gamma \frac{P_0}{\rho_0}\left(2\frac{\bar{r}}{r_0} + \frac{d\bar{r}}{dr_0}\right)^2 - 4\frac{Gm}{r_0}\left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^2\right] dm. \tag{43.33}$$

Очевидно, что условия устойчивости $\omega^2 > 0$ в (43.33) и $\delta^2\epsilon > 0$ в (43.16) эквивалентны, если считать, что $\bar{r}$ может быть не только собственной, но и произвольной пробной функцией δr.

Из самосопряженности оператора $\mathfrak{L}(\bar{r})$ следует [196, 130], что минимальное значение величины ω^2 из (43.33) ($\delta^2\epsilon$ из (43.16)) достигается для собственной функции $\delta r = \bar{r}$. Это означает, что если какая-либо пробная функция $\delta r(r_0)$ приводит к отрицательному $\delta^2\epsilon$ из (43.16), то соответствующее равновесное состояние заведомо неустойчиво. Напротив, положительность $\delta^2\epsilon$ не дает гарантию устойчивости состояния. Сравнение с точным статическим критерием в § 44 показывает, что линейная пробная функция $\delta r = \alpha r$ в (43.11) практически точно определяет точку потери устойчивости холодной нейтронной звезды в ОТО (см. § 40).