

§ 44. Статические критерии устойчивости

а) Невращающиеся звезды. В случае неврашающихся холодных ($T = 0, S = 0$) звезд критерий устойчивости может быть сформулирован следующим образом [105]. При исследовании колебаний стационарной звезды можно принять, что зависимость от времени t смещения ξ точки с лагранжевым радиусом \vec{r}_0

$$\vec{\xi}_n(\vec{r}_0, t) = \vec{r}(\vec{r}_0, t) - \vec{r}_0 \quad (44.1)$$

n -й нормальной моды радиальных колебаний имеет вид

$$\vec{\xi}_n \sim e^{-i\sigma_n t}, \quad (44.2)$$

причем при отсутствии диссипативных процессов все σ_n^2 — действительные числа, так что устойчивости n -й моды соответствует $\sigma_n^2 > 0$, а неустойчивости — $\sigma_n^2 < 0$. Построим серию моделей с данным уравнением состояния

$$P = P(\rho) \quad (44.3)$$

с различными значениями центральной плотности ρ_c , получив зависимость $M(\rho_c)$. Допустим, что при $\rho_c = \rho_{c,cr} \equiv \rho_{cc}$ эта зависимость имеет экстремум $M(\rho_{cc}) = M_0$. В этом случае для массы M , мало отличающейся от M_0 , существуют два решения. Одно из этих решений получается из другого малым смещением, которое не зависит от времени. Это значит, что квадрат собственной частоты σ_n^2 некоторой моды при $\rho_c = \rho_{cc}$ переходит через нуль:

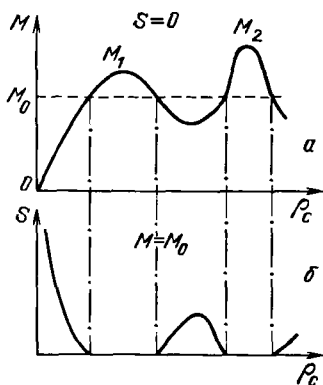
$$\sigma_n^2(\rho_{cc}) = 0. \quad (44.4)$$

Таким образом, экстремум кривой $M(\rho_c)$ всегда соответствует критической точке, где изменяется устойчивость некоторой моды звезды, причем основная мода теряет устойчивость всегда в максимуме кривой $M(\rho_c)$ [105]. Устойчивым звездам соответствуют только растущие участки кривых $M(\rho_c)$. Изложенный критерий остается справедливым для изэнтропических звезд с одинаковой удельной энтропией S . В этом случае точка потери устойчивости на основной моде лежит в максимуме кривой $M_S(\rho_c)$ [110]. Более подробную информацию об устойчивости и числе неустойчивых мод можно извлечь, рассматривая зависимость $M(R)$, где R — радиус звезды [201].

Аналогичными рассуждениями можно показать справедливость другого статического критерия для горячих изэнтропических звезд. Зафиксируем массу звезды и будем строить модели с различными значениями удельной энтропии. Тогда получим зависимость $S_M(\rho_c)$. Очевидно, что экстремум этой зависимости тоже отвечает критической точке, так как существование экстремума доказывает существование двух близких моделей с одинаковой энтропией S , т.е. $\sigma^2(\rho_{cc}) = 0$ в экстремуме. Потеря устойчивости на основной моде происходит здесь в минимуме кривой $S_M(\rho_c)$.

Заметим, что при построении серии моделей с переменным ρ_c может случиться так, что энтропия упадет до нуля и в определенном диапазоне значений ρ_c нет статических решений для данной массы. Это значит, что на графиках $S(\rho_c)$ будут провалы (рис. 121). Тем не менее этот случай не вносит трудностей, так как устойчивость при $S = 0$ известна из другого статического критерия. Наличие "провала", так же как и экстремума, означает смену знака квадрата собственной частоты одной из мод колебаний.

Рис 121. а – Схематическая зависимость массы M от центральной плотности ρ_c при нулевой энтропии $S = 0$. б – Зависимость $S(\rho_c)$ для массы M_0 , меньше экстремальных M_1 и M_2 , из [284]



Таким образом, можно отметить некоторую дополнителность в критериях. С одной стороны, точке изменения устойчивости соответствует экстремум кривой $M_S(\rho_c)$, а с другой — экстремум $S_M(\rho_c)$. Это соответствует тому, что при адиабатических пульсациях сохраняются M и S . Данное обстоятельство представляется тривиальным для сферически-симметричных звезд, но ситуация меняется, если перейти к более интересному случаю вращающихся звезд.

Очевидно, что все величины, сохраняющиеся при адиабатических пульсациях, должны быть постоянны вблизи критической модели. То есть если некоторая величина A , сохраняющаяся при пульсациях, изменяется вдоль серии моделей, то зависимость $A(\rho_c)$ имеет экстремум в критической точке. Полная энергия равновесной звезды ϵ всегда возрастает при увеличении ее массы или энтропии [104]. Вследствие этого экстремумы кривых $\epsilon_S(\rho_c)$ и $\epsilon_M(\rho_c)$ совпадают с экстремумами кривых $M_S(\rho_c)$ и $S_M(\rho_c)$ и могут использоваться в применении к статическому критерию устойчивости, а зависимости $\epsilon_S(M)$ и $\epsilon_M(S)$ неаналитичны и имеют точки возврата.

Отметим, что статический критерий применим не только для изэнтропических звезд [262]. Например, построим серию моделей переменной массы с распределением удельной энтропии $S(q)$, фиксированным по безразмерной лагранжевой координате $q = M_r/M$, где M_r — масса внутри r . Нетрудно убедиться, что и в этом случае экстремум $M_S(q)(\rho_c)$ соответствует критической точке.

б) Критерии для вращающихся звезд. Из рассмотрения п.а ясно, что для формулировки статических критериев устойчивости необходимо выделить величины A, B, C, \dots , сохраняющиеся при пульсациях, выбрать одну из этих величин (например, A) в качестве изменяющегося параметра и, зафиксировав интегральные или удельные значения остальных параметров, независимых от A , строить серию моделей. Тогда критической точке будет соответствовать экстремум кривой $A_{B,C} \dots(\rho)$. В случае вращения при адиабатических пульсациях и нулевой вязкости сохраняется удельная энтропия S , удельный момент j каждой частицы вещества и масса звезды M . Проще всего статический критерий можно было бы вывести для случая изэнтропической изомоментной звезды, однако условие $j = \text{const}$ в реальной звезде вряд ли осуществимо. Критерий можно вывести для реаль-

ных звезд с вращением, если строить серию неизомоментных моделей, аналогичных неизэнтропическим моделям, как описано выше.

Рассмотрим изэнтропические модели. Поскольку имеется три сохраняющихся величины, возможны три статических критерия. Критическими точками будут экстремумы кривых

$$1^\circ S_{M,i}(\rho); \quad 2^\circ J_{M,S}(\rho); \quad 3^\circ M_{S,j}(\rho). \quad (44.5)$$

Согласно теореме Пуанкаре (см. § 23, п.б), удельный момент j и угловая скорость Ω в равновесии постоянны на цилиндрах, поэтому фиксированы

$$j = j(m), \quad m = \frac{M_b}{M} (M_b - \text{масса внутри цилиндра радиуса } b) \quad (44.6)$$

для критериев 1° и 3° и

$$j' = \frac{M}{J} j(m) \quad (44.7)$$

для критерия 2° .

Легко видеть, что во всех трех случаях экстремум кривой совпадает с критической точкой и имеется полная аналогия с построением серии неизэнтропических моделей.

Часто необходимо исследовать устойчивость твердоотельно-вращающихся звезд. Вдоль серии моделей таких звезд удельный момент каждой лагранжевой массы изменяется, поэтому статический критерий надо применять следующим образом. Пусть имеется серия моделей твердоотельно вращающихся звезд. Каждая модель имеет свое распределение момента $j(m)$. Фиксировав $j(m)$, от любой модели можно построить новую "присоединенную" серию моделей в соответствии с (44.5). Критической будет та твердоотельно-вращающаяся модель, которая имеет экстремальные параметры в присоединенной серии.

Изэнтропическими можно считать полностью конвективные звезды, например сверхмассивные [109], или холодные с $S = 0$. Вырожденные конфигурации, белые карлики и нейтронные звезды, можно рассматривать как изотермические из-за большой теплопроводности. О распределении угловой скорости вращения звезды при эволюции см. § 29. При $dj/db > 0$ звезда устойчива относительно развития турбулентности, но только в линейном приближении. Например, при вращении коаксиальных цилиндров для больших чисел Рейнольдса $Re = \rho v R / \mu > 10^5$ турбулентность может развиваться при более быстром вращении внешнего цилиндра, когда $dj/db > 0$ [142]. В звездах числа Рейнольдса всегда очень велики, поэтому возможность существования дифференциально вращающихся с большой скоростью звезд остается проблематичной. При малой вязкости, необходимой для нарушения теоремы Томсона о сохранении циркуляции, всегда имеются возмущения достаточно большие, чтобы вызвать турбулентность.

в) Снятие вырождения нейтральных мод колебаний во вращающейся изэнтропической звезде. Детальный анализ статических критериев устойчивости для вращающихся звезд выявляет глубокую связь между собственными функциями, соответствующими нейтральным конвективным движе-

ниям невращающейся звезды и нейтральной собственной функцией при наличии вращения, а также позволяет установить простую связь между конвективной устойчивостью звезды и теоремой Пуанкаре.

В невращающейся звезде собственная функция нейтральной моды возмущений в критическом состоянии зависит от сферического радиуса $\xi = \xi(r)$. Она представляет собой разность радиусов двух близких равновесных состояний той же массы по обе стороны максимума

$$\xi = \xi(q) = r_1(q) - r_2(q), \quad r = r(q), \quad q = \frac{M_r}{M} \quad (44.8)$$

согласно статическому критерию п.а. С другой стороны, в случае изэнтропических звезд для любого, даже самого слабого вращения

$$\xi = \xi(b), \quad b = b(m). \quad (44.9)$$

Действительно, ввиду сохранения удельного момента $j(b) = \Omega b^2$, имеем

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = -2 \frac{\Delta b}{b}. \quad (44.10)$$

Так как Ω , $\Delta \Omega$ и b есть функции b , то и $\Delta b = \xi_b = \xi_b(b)$. Скачок в функциональной зависимости собственной функции критического состояния при наложении слабого вращения станет понятным, если вспомнить, что в невращающейся изэнтропической звезде собственному значению $\omega = 0$ соответствует не только радиальная нейтральная мода, но и бесконечный набор собственных функций, связанных с конвективными движениями (см. § 10). Если состоянию с данными собственным числом ω соответствует несколько собственных функций, то такое состояние называется вырожденным. В изэнтропической звезде без вращения таковой является мода колебаний с $\omega = 0$. Вращение приводит к тому, что все нейтральные конвективные моды становятся либо устойчивыми, либо неустойчивыми (при $dj/db < 0$), поэтому вырождение нейтральной моды снимается.

Если возмущение (малое вращение) приводит к снятию вырождения, то невырожденная собственная функция возмущенного состояния с той же собственной частотой будет близка к одной "правильной" суперпозиции вырожденных невозмущенных собственных функций. Собственная функция нейтральной моды слабо вращающейся звезды представляет собой такую суперпозицию радиальной и конвективных мод, которая приводит к ее зависимости только от цилиндрического радиуса b . Угловые части собственных функций конвективных мод представляют собой полиномы Лежандра $P_l(\cos \theta)$ для ξ_r и производные от них $dP_l/d\theta = P_l^1(\cos \theta)$ для ξ_θ с четными l [130]. Если для невращающейся звезды с помощью статического критерия удастся определить собственную функцию нейтральной радиальной моды, то, применяя его к слабо вращающейся звезде, можно восстановить радиальные части всех конвективных мод [284]. Для этого находим собственную функцию

$$\vec{\xi} = (\xi_b(b), \quad \xi_z(b, z)), \quad b = r \sin \theta \quad (44.11)$$

в виде разности двух близких равновесных моделей той же массы. Вычис-

ляем смещения в сферической системе координат:

$$\xi_r(b, z) = \sqrt{\xi_b^2 + \xi_z^2}, \quad \xi_\theta(b, z) = \arctg \frac{\xi_z}{\xi_b}, \quad (44.12)$$

и делаем соответствующие разложения:

$$\begin{aligned} \xi_r(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \xi_{rl}(r) P_l(\cos \theta), \\ \xi_r(r) &= (l+1/2) \int_{-1}^1 \xi_r(r, \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta), \\ \xi_\theta(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \xi_{\theta l}(r) P_l^1(\cos \theta), \\ \xi_{\theta l}(r) &= \frac{l+1/2}{l(l+1)} \int_{-1}^1 \xi_\theta(r, \theta) P_l^1(\cos \theta) d(\cos \theta). \end{aligned} \quad (44.13)$$

Функции ξ_{rl} и $\xi_{\theta l}$ являются радиальными частями конвективных мод колебаний в нейтральном случае. Данный метод расчета собственных функций гораздо менее трудоемок, чем обычный метод малых возмущений [130], хотя применим только для нейтральной вырожденной моды.

В звезде, устойчивой относительно конвекции, нейтральная мода невырождена и в медленно вращающейся звезде ее радиальная зависимость сохраняется. Это связано с нарушением теоремы Пуанкаре и условий (44.6), (44.9) для небароподобных звезд с переменной по массе энтропией. Для изэнтропы с $\gamma_1 = 4/3$ нейтральная мода гомологична и максимум кривой $M_{S,J}(\rho_c)$ твердотельно-вращающихся звезд при медленном вращении совпадает с точкой потери устойчивости.

г) **Численные примеры** [284]. Рассмотрим твердотельно-вращающиеся холодные белые карлики, определяемые уравнением состояния, которое задается с учетом нейтронизации в виде [188]

$$\begin{aligned} \rho &= Ax^3(2 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \\ P &= B[x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3\ln(x + \sqrt{1+x^2})] \\ A &= 9,82 \cdot 10^5 \text{ г} \cdot \text{см}^3, \quad B = 6,01 \cdot 10^{22} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3, \\ a_1 &= 1,255 \cdot 10^{-2}, \quad a_2 = 1,755 \cdot 10^{-5}, \quad a_3 = 1,376 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (44.14)$$

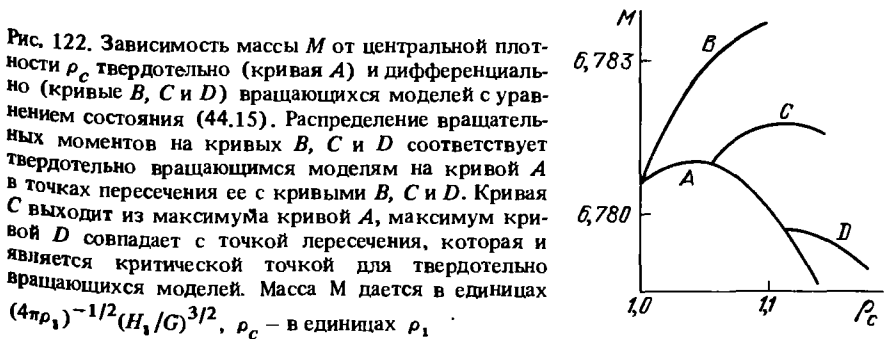
Устойчивость определяется по критерию $M_{J,S}(\rho_c)$. Для построения равновесных вращающихся моделей используется метод самосогласованного поля (см. § 23, п.в). Сначала строится серия твердотельно-вращающихся моделей с фиксированным моментом вращения J_0 и выбирается модель вблизи экстремума данной зависимости $M_1(\rho_c)$. Эта модель задает некоторое распределение момента $j(m)$, для которого строится присоединенная серия моделей $M_2(\rho_c)$ с тем же полным моментом J_0 . Результаты расчетов даны в табл. 54 [284], из которой видно, что с точностью расчета критическая модель (экстремум кривой $M_2(\rho_c)$) совпадает с экстремумом $M_1(\rho_c)$ для твердотельно-вращающихся моделей. Это объясняется

Зависимости от центральной плотности ρ_c массы M_1 твердоотельно-вращающихся белых карликов при $J = 1,88 \cdot 10^{49} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ и массы M_2 , полярного R_p и экваториального R_e радиусов дифференциально-вращающихся белых карликов с распределением момента, соответствующим твердоотельной модели при $x_c = 10,5$. Уравнение состояния определено в (44.14) (из [284])

x_i	$\rho_c, \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$	$\frac{M_1}{M_\odot}$	$\frac{M_2}{M_\odot}$	$R_p, \text{ см}$	$R_e, \text{ см}$
10,0	2,090 (9)	1,28621	1,28618	2,0126 (8)	2,1622 (8)
10,5	2,427 (9)	1,28654	1,28654	1,9339 (8)	2,0864 (8)
10,6	2,499 (9)	1,28654	1,28655	1,9189 (8)	2,0720 (8)
10,7	2,572 (9)	1,28653	1,28654	1,9042 (8)	2,0578 (8)
10,8	2,646 (9)	1,28650	1,28651	1,8896 (8)	2,0439 (8)
10,9	2,722 (9)	1,28644	1,28646	1,8753 (8)	2,0302 (8)
11,0	2,800 (9)	1,28637	1,28640	1,8613 (8)	2,0034 (8)

тем, что уравнение состояния белого карлика в критическом состоянии имеет $\gamma_1 = 4/3$ и нейтральная мода колебаний почти гомологична. Кроме того, при твердоотельном вращении политропы $n = 3$ отношение энергии вращения T к гравитационной W не может быть большим, так как быстро достигается равенство центробежной и гравитационной сил на экваторе. В рассматриваемом случае для критической модели параметр вращения $\beta = \Omega^2/2\pi G\rho_c = 6,82 \cdot 10^{-4}$ (см. (23.33)), что составляет $\approx 70\%$ от предельного значения $\beta_{\text{lim}} = 9,83 \cdot 10^{-4}$ для политропы $n = 3$ из [437]. При этом $T/|W| = 5,78 \cdot 10^{-3}$, а $(T/|W|)_{\text{lim}} = 9,00 \cdot 10^{-3}$. Столь малое значение кинетической энергии вращения говорит о том, что гомологическая мода возмущена мало, что и обеспечивает совпадение максимумов у серии твердоотельно и дифференциально вращающихся моделей. Максимальная масса в критическом состоянии для предельного вращения на 3,5% больше, чем для невращающегося случая. Для моделей из табл. 54 рост предельной массы составил $\approx 1,5\%$.

Если в политропном уравнении состояния γ_1 сильно отличается от $4/3$, то различие между критическим состоянием и максимумом массы твердо-



тельной кривой может быть существенным. В [284] рассматривалось уравнение состояния в параметрическом виде:

$$\rho(H) = \frac{1}{2} \rho_1 \left[\left(\frac{H}{H_1} \right)^{0,3} + \left(\frac{H}{H_1} \right)^{10} \right],$$

$$P(H) = \frac{1}{2} \rho_1 H_1 \left[\frac{(H/H_1)^{1,3}}{1,3} + \frac{(H/H_1)^{11}}{11} \right].$$
(44.15)

При $\rho = \rho_1$ величина $\gamma_1 = 4^{1/3}$ и резко падает при $\rho > \rho_1$. Результаты расчета твердотельно-вращающейся и трех присоединенных серий моделей дано на рис. 122. Потеря устойчивости происходит в точке пересечения присоединенной кривой D с твердотельной, совпадающей с максимумом кривой D . Из рис. 122 видно, что точка потери устойчивости почти на 5% по ρ_c отстоит от максимума твердотельной кривой. В [284] сделано обобщение статических критериев на случай ОТО и наличие тороидального магнитного поля.

§ 45. Устойчивость звезды при наличии фазового перехода

В веществе звезд при сильном вырождении могут происходить фазовые переходы первого рода, т.е. в определенном интервале плотностей $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ давление остается постоянным $P = P_*$, рис. 123. Поскольку в равновесии давление монотонно убывает с радиусом при r_* , так что $P(r_*) = P_*$, происходит скачок плотности от ρ_2 до ρ_1 . Впервые с такой ситуацией столкнулись при исследовании планет гигантов [2, 547]. Фазовые переходы из-за нейтронизации могут происходить в центре белых карликов с массой, близкой к чандрасекаровскому пределу (см. § 39) и в оболочках нейтронных звезд [30]. Возможны также фазовые переходы в белых карликах небольшой массы [126], связанные с ионизацией давлением.

Фазовый переход уменьшает запас устойчивости звезды. При $\rho_2/\rho_1 > 3/2$ звезда теряет устойчивость сразу после достижения в центре давления $P = P_*$ для любого уравнения состояния [191, 470]. В [192, 64] на основе

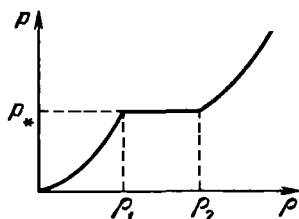


Рис. 123. Зависимость давления от плотности при наличии фазового перехода первого рода

статического критерия изучалась устойчивость изэнтропических политроп при наличии фазовых переходов на периферии*).

В [42] для исследования устойчивости развит вариационный метод, излагаемый ниже. Обоснование справедливости статического критерия из § 44 для звезд с фазовым переходом дано в [236].

*) При $S \neq 0$ фазовые переходы считаются проходящими при $S = \text{const}$. Справедливость этого допущения неочевидна, и оно является лишь приближенным способом описания фазового перехода.