

тельной кривой может быть существенным. В [284] рассматривалось уравнение состояния в параметрическом виде:

$$\rho(H) = \frac{1}{2} \rho_1 \left[\left(\frac{H}{H_1} \right)^{0,3} + \left(\frac{H}{H_1} \right)^{1,0} \right],$$

$$P(H) = \frac{1}{2} \rho_1 H_1 \left[\frac{(H/H_1)^{1,3}}{1,3} + \frac{(H/H_1)^{1,1}}{1,1} \right].$$
(44.15)

При $\rho = \rho_1$ величина $\gamma_1 = 4^{1/3}$ и резко падает при $\rho > \rho_1$. Результаты расчета твердотельно-вращающейся и трех присоединенных серий моделей дано на рис. 122. Потеря устойчивости происходит в точке пересечения присоединенной кривой D с твердотельной, совпадающей с максимумом кривой D . Из рис. 122 видно, что точка потери устойчивости почти на 5% по ρ_c отстоит от максимума твердотельной кривой. В [284] сделано обобщение статических критериев на случай ОТО и наличие тороидального магнитного поля.

§ 45. Устойчивость звезды при наличии фазового перехода

В веществе звезд при сильном вырождении могут происходить фазовые переходы первого рода, т.е. в определенном интервале плотностей $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ давление остается постоянным $P = P_*$, рис. 123. Поскольку в равновесии давление монотонно убывает с радиусом при r_* , так что $P(r_*) = P_*$, происходит скачок плотности от ρ_2 до ρ_1 . Впервые с такой ситуацией столкнулись при исследовании планет гигантов [2, 547]. Фазовые переходы из-за нейтронизации могут происходить в центре белых карликов с массой, близкой к чандрасекаровскому пределу (см. § 39) и в оболочках нейтронных звезд [30]. Возможны также фазовые переходы в белых карликах небольшой массы [126], связанные с ионизацией давлением.

Фазовый переход уменьшает запас устойчивости звезды. При $\rho_2/\rho_1 > 3/2$ звезда теряет устойчивость сразу после достижения в центре давления $P = P_*$ для любого уравнения состояния [191, 470]. В [192, 64] на основе

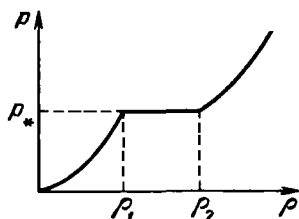


Рис. 123. Зависимость давления от плотности при наличии фазового перехода первого рода

статического критерия изучалась устойчивость изэнтропических политропов при наличии фазовых переходов на периферии*).

В [42] для исследования устойчивости развит вариационный метод, излагаемый ниже. Обоснование справедливости статического критерия из § 44 для звезд с фазовым переходом дано в [236].

*) При $S \neq 0$ фазовые переходы считаются проходящими при $S = \text{const}$. Справедливость этого допущения неочевидна, и оно является лишь приближенным способом описания фазового перехода.

а) Вычисление вариаций $\delta\epsilon$ и $\delta^2\epsilon$. Будем исходить из ньютоновской энергии звезды ((34.8) без последнего члена). Пусть в невозмущенном равновесном состоянии плотность $\rho(m)$ терпит скачок от ρ_2 до ρ_1 при $m = m_*$. Предположим, что при возмущении скачок сохраняет свою величину и сдвигается в точку $\tilde{m}_* > m_*$ (рис. 124). Случай $\tilde{m}_* < m_*$ рассматривается аналогично. Для вычисления приращения ϵ разобьем интеграл в (34.8) на три части: ϵ_2 ($0 \leq m \leq m_*$), ϵ_1 ($\tilde{m}_* \leq m \leq M$) и ϵ_* ($m_* \leq m \leq$

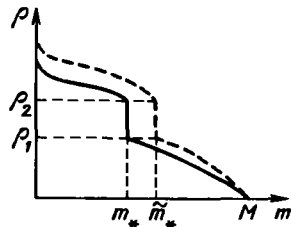


Рис. 124. Профиль плотности: сплошная кривая – в равновесной звезде, штриховая – в возмущенной (из [42])

$\leq \tilde{m}_*$). Вариации $\delta\epsilon_1$ и $\delta\epsilon_2$ рассчитываются аналогично § 44. Переходя к переменной объема v вместо радиуса r , имеем

$$\epsilon_2 = \int_0^{m_*} E dm - \beta \int_0^{m_*} \frac{m dm}{v^{1/3}}, \quad \beta = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G, \quad (45.1)$$

$$v = \frac{4\pi}{3} r^3, \quad dv/dm = 1/\rho;$$

$$\delta\epsilon_2 = - \int_0^{m_*} P \frac{d(\delta v)}{dm} dm + \frac{1}{3} \beta \int_0^{m_*} \frac{m \delta v}{v^{4/3}} dm = \quad (45.2)$$

$$= -P\delta v|_{m_*} + \int_0^{m_*} \left(\frac{dP}{dm} + \frac{\beta}{3} \frac{m}{v^{4/3}} \right) \delta v dm.$$

Здесь учтено

$$P = -\delta E/\delta(1/\rho), \quad \delta(1/\rho) = d(\delta v)/dm. \quad (45.3)$$

Скобка в интеграле (45.2) равна нулю в силу уравнения равновесия, поэтому

$$\delta\epsilon_2 = -P(m_*)\delta v(m_*). \quad (45.4)$$

Аналогично

$$\delta\epsilon_1 = P(\tilde{m}_*)\delta v(\tilde{m}_*). \quad (45.5)$$

Вычисляя вторые вариации энергии, получаем (ср. (43.16))

$$\delta^2\epsilon_2 = - \frac{4}{9} \beta \int_0^{m_*} \frac{m(\delta v)^2 dm}{v^{7/3}} + \int_0^{m_*} \gamma P \rho \left[\frac{d(\delta v)}{dm} \right]^2 dm, \quad (45.6)$$

$$\delta^2\epsilon_1 = - \frac{4}{9} \beta \int_{\tilde{m}_*}^M \frac{m(\delta v)^2 dm}{v^{7/3}} + \int_{\tilde{m}_*}^M \gamma P \rho \left[\frac{d(\delta v)}{dm} \right]^2 dm, \quad (45.7)$$

$$\gamma \equiv \gamma_1 \text{ из (1.11).}$$

Вычислим изменение ϵ_* с точностью $(\Delta m_*)^2$, $\Delta m_* = \tilde{m}_* - m_*$:

$$\Delta \epsilon_* = \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{E} - E) dm - \beta \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{v}^{-1/3} - v^{-1/3}) m dm. \quad (45.8)$$

В невозмущенном состоянии плотность в интервале $m_* < m < \tilde{m}_*$ близка к ρ_1 , а в возмущенном — к ρ_2 , причем $\rho(m_* + 0) = \rho_1$, $\tilde{\rho}(\tilde{m}_* - 0) = \rho_2$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E\left(\frac{1}{\tilde{\rho}}\right) = E\left(\frac{1}{\rho_2}\right) - P_*\left(\frac{1}{\tilde{\rho}} - \frac{1}{\rho_2}\right) + \dots \approx \\ &\approx H_* - \frac{P_*}{\tilde{\rho}} + O[(\Delta m)^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= E\left(\frac{1}{\rho}\right) = E\left(\frac{1}{\rho_1}\right) - P_*\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) + \dots \approx \\ &\approx H_* - \frac{P_*}{\rho} + O[(\Delta m)^2]. \end{aligned}$$

Здесь энтальпия $H_* = E\left(\frac{1}{\rho_1}\right) + \frac{P_*}{\rho_1} = E\left(\frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{P_*}{\rho_2}$ постоянна в интервале $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$. Отсюда первое слагаемое в правой части (45.8) равно

$$P_* \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tilde{\rho}}\right) dm + \dots \approx P_* [v(\tilde{m}_*) - v(m_*) - \tilde{v}(\tilde{m}_*) + \tilde{v}(m_*)].$$

Итак,

$$\int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{E} - E) dm \approx P_* [\delta v(m_*) - \delta v(\tilde{m}_*)]. \quad (45.9)$$

Во втором члене в (45.8) учтем, что

$$v(m) \approx v(\tilde{m}_*) + \frac{1}{\rho_1} (m - \tilde{m}_*), \quad \tilde{v}(m) \approx \tilde{v}(\tilde{m}_*) + \frac{1}{\rho_2} (m - \tilde{m}_*). \quad (45.10)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{-1/3} - v^{-1/3} &\approx -\frac{1}{3} v^{-4/3}(\tilde{m}_*) (\tilde{v} - v) \approx \\ &\approx -\frac{1}{3} v^{-4/3}(\tilde{m}_*) \left[\tilde{v}(\tilde{m}_*) - v(\tilde{m}_*) + (m - \tilde{m}_*) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (45.11)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \beta \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{v}^{-1/3} - v^{-1/3}) m dm &\approx \beta m_* \int_{m_*}^{\tilde{m}_*} (\tilde{v}^{-1/3} - v^{-1/3}) dm \approx \\ &\approx -\frac{\beta m_* \delta v(\tilde{m}_*)}{3v^{4/3}(m_*)} \Delta m_* + \frac{\beta m_*}{6v^{4/3}(m_*)} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) (\Delta m_*)^2. \end{aligned} \quad (45.12)$$

Предположим, что приращение $\delta v(m)$ на участках 1 и 2 имеет тот же порядок малости, что и величина сдвига скачка $\Delta m_* = \tilde{m}_* - m_*$. Учтем также в (45.4), (45.5) соотношение, следующее из уравнения равновесия:

$$P(\tilde{m}_*) \approx P(m_*) - \frac{\beta m_*}{3v_*^{4/3}(m_*)} \Delta m_* \quad (45.13)$$

Для полного возмущения $\Delta \epsilon = \delta \epsilon + \delta^2 \epsilon$ с учетом (45.4)–(45.7), (45.9)–(45.13) получим

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon = & \frac{1}{2} \left(\int_0^{m_*} + \int_{\tilde{m}_*}^M \right) \left[\gamma P \rho \left(\frac{d\delta v}{dm} \right)^2 - \frac{4}{9} \beta \frac{m(\delta v)^2}{v_*^{7/3}} \right] dm + \\ & + \frac{\beta m_*}{6v_*^{4/3}(m_*)} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) (\tilde{m}_* - m_*)^2. \end{aligned} \quad (45.14)$$

Выразим теперь $(\tilde{m}_* - m_*)$ через δv . В силу (45.10) имеем

$$\delta v(\tilde{m}_*) - \delta v(m_*) \approx (\tilde{m}_* - m_*) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \right), \quad (45.15)$$

поэтому неинтегральный член в (45.14) равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} B [\delta v(\tilde{m}_*) - \delta v(m_*)]^2, \\ B = & \frac{\beta m_*}{3v_*^{4/3}} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1}, \quad v_* = v(m_*). \end{aligned} \quad (45.16)$$

Возьмем пробную функцию δv в виде

$$\delta v(m) = \begin{cases} \eta \varphi_2(m), & 0 \leq m \leq m_* \quad (\varphi_2(0) = 0) \\ \eta \varphi_1(m), & \tilde{m}_* \leq m \leq M. \end{cases} \quad (45.17)$$

Тогда требование положительности $\Delta \epsilon$ при малых η запишется в виде

$$\Delta \epsilon = \int_0^M \left\{ \gamma P \rho [\varphi'(m)]^2 - \frac{4}{9} \frac{\beta m \varphi^2}{v_*^{7/3}} \right\} dm + B [\varphi_1(m_*) - \varphi_2(m_*)]^2 > 0; \quad (45.18)$$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_2, & 0 \leq m \leq m_* \\ \varphi_1, & m_* \leq m \leq M. \end{cases}$$

Пробная функция $\varphi(m)$ может быть разрывной при $m = m_*$, что и приводит к дополнительному неинтегральному слагаемому в условии устойчивости. При нескольких фазовых переходах в одной звезде каждому из них соответствует неинтегральное слагаемое типа (45.16).

б) Другие формы записи критерия устойчивости. В (45.18) пробная функция $\varphi(m)$ произвольна, имеет произвольный скачок при $m = m_*$ и должна лишь равняться нулю при $m = 0$. Зафиксируем значения на скачке $\varphi_2(m_*) = \varphi(m_* - 0)$, $\varphi_1(m) = \varphi(m_* + 0)$ и подберем $\varphi(m)$ так, чтобы

*) Означает производную по m .

минимизировать интегральный член в (45.18). Уравнение Эйлера для такой вариационной задачи при квадратичном функционале линейно и совпадает с линеаризованным уравнением равновесия

$$\frac{d}{dm} [\gamma P \rho \varphi'(m)] + \frac{4}{9} \beta \frac{m}{v^{7/3}} \varphi = 0. \quad (45.19)$$

Интеграл в (45.18) с помощью (45.19) можно выразить через значения на скачке φ_1 и φ_2 . Тогда вместо (45.18) получаем условие

$$-P_* \gamma_2 \rho_2 \varphi_2'(m_*) \varphi_2(m_*) + B[\varphi_1(m_*) - \varphi_2(m_*)]^2 + P_* \gamma_1 \rho_1 \varphi_1'(m_*) \varphi_1(m_*) \geq 0, \quad \gamma_2 \equiv \gamma(m_* - 0), \quad \gamma_1 \equiv \gamma(m_* + 0). \quad (45.20)$$

Так как условие $\varphi(0) \equiv \varphi_2(0) = 0$ определяет решение уравнения (45.19) с точностью до множителя, отношения $\varphi_2'(m_*)/\varphi_2(m_*)$ и $\varphi_1'(m_*)/\varphi_1(m_*)$ не зависят от $\varphi_1(m_*)$, $\varphi_2(m_*)$ и определяются только невозмущенными функциями. Обозначим

$$A_2 = -P_* \gamma_2 \rho_2 \frac{\varphi_2'(m_*)}{\varphi_2(m_*)}, \quad A_1 = P_* \gamma_1 \rho_1 \frac{\varphi_1'(m_*)}{\varphi_1(m_*)}. \quad (45.21)$$

Тогда условие (45.20) примет вид

$$A_2 \varphi_2^2 + B(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + A_1 \varphi_1^2 \geq 0 \quad (45.22)$$

для любых $\varphi_{1*} = \varphi_1(m_*)$ и $\varphi_{2*} = \varphi_2(m_*)$. Для выполнения (45.22) требуется

$$A_1 + B \geq 0, \quad A_2 + B \geq 0, \quad A_1 A_2 + B(A_1 + A_2) \geq 0. \quad (45.23)$$

Иногда полезна форма записи необходимого условия устойчивости, в которой минимизирован лишь один интеграл. Исключая интеграл от 0 до m_* и минимизируя по φ_{2*} , получаем

$$D[\varphi_1(m_*)]^2 + \int_{m_*}^M \left\{ \gamma P \rho [\varphi_1'(m)]^2 - \frac{4}{9} \beta \frac{[\varphi_1(m)]^2}{v^{7/3}} \right\} dm \geq 0, \quad (45.24)$$

$$D = A_2 B / (A_2 + B), \quad A_2 + B \geq 0.$$

Условие (45.23) на вид локально, но для вычисления A_1 и A_2 нужно решить две задачи Коши для уравнения (45.19): на участке $0 \leq m \leq m_*$ из точки $m = 0$ и на участке $m_* \leq m \leq M$ из точки $m = M$. После получения этих решений и нахождения A_1 и A_2 из (45.21) проверяется устойчивость по (45.23).

Если в условиях (45.18) и (45.22) рассматривать только непрерывные функции $\varphi(m)$ т.е. $\varphi_1(m_*) = \varphi_2(m_*)$, то из (45.22) получаем требование $A_1 + A_2 \geq 0$. Непрерывность $\varphi(m)$ соответствует возмущениям, не сдвигающим скачок плотности по массе. Это же условие устойчивости имеет место и при отсутствии фазового перехода и следует из (45.23) при $\rho_2 \rightarrow \rho_1$, $B \rightarrow \infty$. В (45.24) при отсутствии фазового перехода можно прямо положить $\rho_1 = \rho_2$, что приводит к $D = A_2$.

в) **Приближенная проверка устойчивости.** Вариационный принцип (45.18) позволяет провести приближенную проверку устойчивости, выбрав подходящий класс пробных функций $\varphi(m)$. Это существенно проще ре-

шения задачи Коши для уравнения (45.19), имеющего особенности при $m = 0$ и $m = M$. При отсутствии фазового перехода хороший результат получается при линейной пробной функции $\varphi(m) = v(m)$ (см. § 40 и (40.8) для случая ОТО). При наличии фазового перехода удовлетворительная точность получается при использовании двухпараметрического семейства пробных функций. Введем вместо $\varphi(m)$ пробную функцию $\psi(r)$, сводящуюся к $(\delta r/r)$ в гладком случае (см. § 43)

$$\varphi(m) = 3v(m)\psi(r(m)).$$

Тогда условие (45.18) примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{r_*} + \int_{r_*}^R \right) Pr^2 \left[\gamma \left(3\psi + r \frac{d\psi}{dr} \right)^2 - 12\psi^2 - 4r \frac{d\psi^2}{dr} \right] dr + \\ & + K_1 (\psi_{1*} - \psi_{2*})^2 + K_2 (\psi_{2*}^2 - \psi_{1*}^2) \geq 0, \end{aligned} \quad (45.25)$$

$$K_1 = Gm_* r_*^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1}, \quad K_2 = 4P_* r_*^3.$$

Условие (45.25) сводится к (43.16) при $\psi_{1*} = \psi_{2*}$ и интегрировании по частям с учетом уравнения равновесия (21.1). Обобщение линейной пробной функции $\psi = 1$, $\varphi \sim v$ на случай фазового перехода есть функция

$$\psi = \begin{cases} \alpha_2, & r < r_*, \\ \alpha_1, & r > r_*, \end{cases}$$

которая, однако, не дает достаточной точности для границы устойчивости. Точность вариационного критерия контролировалась с помощью статического критерия. Удачным оказался выбор двухпараметрического семейства

$$\psi(r) = \begin{cases} \alpha_1, & r < r_* \\ \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{r^2}, & r > r_*. \end{cases} \quad (45.26)$$

Подставив (45.26) в (45.25), получим квадратичную форму $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, положительная определенность которой необходима для устойчивости

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i,k=1}^3 A_{ik} \alpha_i \alpha_k,$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= K_1 + K_2 + 3I_1, & A_{12} &= A_{21} = -K_1, & A_{13} &= A_{31} = -K_1/r_*^2, \\ A_{22} &= K_1 - K_2 + 3I_2, & A_{23} &= A_{32} = (K_1 - K_2)/r_*^2 + I_3, \\ A_{33} &= (K_1 - K_2)/r_*^4 + I_4. \end{aligned} \quad (45.27)$$

Здесь K_1 и K_2 даны в (45.25), а интегралы I_i равны

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{r_*} (3\gamma - 4) Pr^2 dr, & I_3 &= \int_{r_*}^R (3\gamma - 4) P dr, \\ I_2 &= \int_{r_*}^R (3\gamma - 4) Pr^2 dr, & I_4 &= \int_{r_*}^R (\gamma + 4) \frac{P}{r^2} dr. \end{aligned} \quad (45.28)$$

Результаты применения критерия (45.18) в виде (45.25)–(45.28) для звезд с фазовым скачком плотности $q = \rho_2/\rho_1$ и политропой с одинаковым

Приближенные значения критических параметров политроп с фазовыми переходами по критерию (45.25) – (45.28) в сравнении с точными значениями по статическому критерию § 44. ρ_a – центральная плотность в точке потери устойчивости, ρ_b – то же в точке возврата устойчивости (из [42])

q	ρ_a/ρ_2		ρ_b/ρ_2		γ
	Точное значение	Приближенное значение	Точное значение	Приближенное значение	
1,32			устойчиво		
1,33	1,15	–	1,25	–	5/3
1,34	1,10	1,28	1,35	1,35	
1,38	1,03	1,14	1,60	1,6	
1,60	1,00	*	2,63	2,6	
2,00	1,00	*	4,3	4,2	
1,08			устойчиво		
1,09	1,42	–	1,51	–	7/5
1,10	1,19	1,20	2,19	2,18	

* При $\rho_a = \rho_2$ имеем $r_* = 0$ и возникает расходимость в интеграле I_4 из (45.28).

γ при $\rho < \rho_1$ и $\rho > \rho_2$ даны в табл. 55 из [42]. Для сравнения приведены точные значения критических плотностей, полученные из статического критерия в [64].

Качественные зависимости $M(P_c)$ в окрестности точки фазового перехода в центре звезды приведены на рис. 125 для различных γ и q (см. [191, 64]). При $q > 3/2$ потеря устойчивости происходит при $P_c = P_*$, но по мере дальнейшего роста P_c и ρ_c для $\gamma > 4/3$ устойчивость восстанавливается при $P_c = P_b$ ($\rho_c = \rho_b$), рис. 125, а. При $q < 3/2$ также возможна потеря устойчивости при конечном ядре новой фазы с $P_c = P_a$, $\rho_c = \rho_a$. Для каждого $\gamma > 4/3$ существует q_k , такое, что при $q < q_k$ звезда всегда устойчива. Для $\gamma = 2, 5/3, 3/2, 7/5, 4/3$ приближенные значения $q_k = 1,46, 1,33, 1,20, 1,09, 1,00$. Очевидно, что случай $\gamma = 4/3$ вырожден (безразличное равновесие) в ньютоновской теории (см. (45.24)), поэтому сколь угодно слабый фазовый переход приводит к неустойчивости.

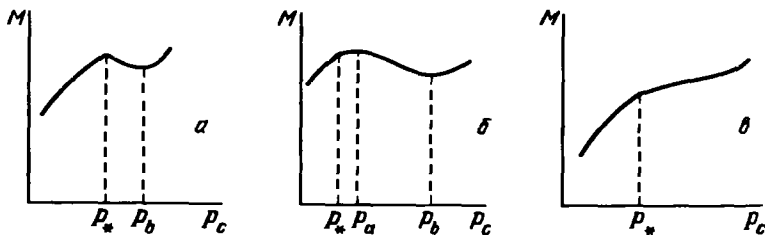


Рис. 125. Качественные зависимости $M(P_c)$ политроп с фазовыми переходами при $\gamma > 4/3$ и для различных q : $q > 3/2$ (а), $q_k < q < 3/2$ (б), $q < q_k < 3/2$ (в)

г) Вывод условия устойчивости при фазовом переходе в центре звезды. Используя эйлерову координату v в качестве независимой переменной, запишем энергию ϵ из (45.1) в виде

$$\epsilon = \int_0^{\infty} E \rho dv - \frac{\beta}{6} \int_0^{\infty} \frac{m^2 dv}{v^{4/3}}. \quad (45.29)$$

Пусть в невозмущенной звезде $P_c = P_*$, а в точке фазового перехода в возмущенной звезде $v = v_*$. Для подсчета вариации энергии разобьем интегралы в (45.29) на интервалы $0 < v < v_*$, $v_* < v < \infty$. Имеем

$$\delta \left(\int_{v_*}^{\infty} E \rho dv \right) = \int_{v_*}^{\infty} H \delta \rho dv = \int_{v_*}^{\infty} H \frac{d\delta m}{dv} dv = H \delta m \Big|_{v_*}^{\infty} - \int_{v_*}^{\infty} \frac{dH}{dv} \delta m dv, \quad (45.30)$$

$$H = E + P/\rho, \quad \delta \left(\frac{\beta}{6} \int_{v_*}^{\infty} \frac{m^2 dv}{v^{4/3}} \right) = \frac{\beta}{3} \int_{v_*}^{\infty} \frac{m \delta m dv}{v^{4/3}},$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 \left(\frac{\beta}{6} \int_{v_*}^{\infty} \frac{m^2 dv}{v^{4/3}} \right) = \frac{\beta}{6} \int_{v_*}^{\infty} \frac{(\delta m)^2 dv}{v^{4/3}} = \frac{\beta}{2} \frac{[\delta m(v_*)]^2}{v_*^{1/3}} + O(v_*^2) = \quad (45.31)$$

$$= \frac{\beta v_*^2 (\rho_2 - \rho_1)^2}{2 v_*^{1/3}} + O(v_*^2).$$

Вторая вариация первого интеграла в (45.29) есть величина $\sim v_*^2$ и нам не понадобится. На внутреннем участке имеем

$$\int_0^{v_*} (\tilde{E} \tilde{\rho} - E \rho) dv = \int_0^{v_*} H_* (\tilde{\rho} - \rho) dv + O(v_*^2) = H_* \delta m(v_*) + O(v_*^2), \quad (45.32)$$

$$\frac{\beta}{6} \int_0^{v_*} \frac{dv}{v^{4/3}} (\tilde{m}^2 - m^2) = \frac{\beta}{10} (\rho_2^2 - \rho_1^2) v_*^{5/3}.$$

С учетом уравнения равновесия в точке v_* невозмущенной звезды имеем

$$H(v_*) = H_* - \frac{\beta}{2} \rho_1 v_*^{2/3} + O(v_*^{4/3}). \quad (45.33)$$

Суммируя изменения энергии (45.30)–(45.32) с учетом уравнения равновесия (45.33) в первом члене первого соотношения (45.30), получим

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon &= - \frac{\beta v_*^{5/3}}{10} [5(\rho_2 - \rho_1)^2 - \rho_2^2 + \rho_1^2] + [H_* - H(v_*)] \delta m(v_*) = \\ &= \frac{\beta v_*^{5/3}}{10} [-5(\rho_2 - \rho_1)^2 + \rho_2^2 - \rho_1^2 + 5\rho_1(\rho_2 - \rho_1)] = \\ &= \frac{3\beta v_*^{5/3}}{5} (\rho_2 - \rho_1) \left(\frac{3}{2} \rho_1 - \rho_2 \right). \end{aligned} \quad (45.34)$$

Так как $\rho_2 > \rho_1$ условие устойчивости $\Delta \epsilon > 0$ сводится к $\rho_1 < \frac{3}{2} \rho_1$.

Этот вывод получен в [470, 191] более сложным способом. Отметим, что вывод условия (45.34) прямым подсчетом энергии в лагранжевых координатах сделать не удалось, так как неинтегральные члены в (45.18) становятся более низкого порядка малости и определяют результат.