

§ 47. Развитие тепловой неустойчивости  
в невырожденных слоевых источниках

Предсказание о возможности развития тепловой неустойчивости в невырожденных тонких слоях горения в результате особенностей отклика звезды на возмущения скорости горения сделано в [95]. В [570] дано математическое описание неустойчивостей подобного типа. Рассмотрим динамически устойчивые звезды.

а) Устойчивость слоя горения постоянной толщины. Приближенно рассмотрим тепловое возмущение без учета его влияния на равновесие слоя. Перепишем уравнения теплового равновесия для радиативного случая (22.3), (22.4) с уравнением состояния идеального газа из (1.2) в виде

$$L_r = -(4\pi r^2)^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa} \frac{dT}{dm}, \quad (47.1)$$

$$\epsilon - \frac{dL_r}{dm} = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \frac{ds}{dt}, \quad (47.2)$$

$$s = \frac{2}{3} \frac{S}{\mathfrak{R}} = \ln \frac{P}{\rho^{5/3}} + \text{const}, \quad \mathfrak{R} = \frac{k}{\mu m_u}, \quad (47.3)$$

где  $S$  — энтропия (1.3) идеального полностью ионизованного газа с  $\mu$  из (1.7). Предположим, что все источники энергии расположены в слое массы  $\Delta m$ , а вне этого слоя выделение энергии пренебрежимо мало. Идеализированное распределение температуры в слое  $\Delta m$  показано на рис. 129 из [570]. Тогда из уравнения (47.1) следует

$$L_r = 0 \quad \text{при} \quad m = m_0, \quad (47.4)$$

$$L_r = L = (4\pi r^2)^2 \frac{4acT^3}{3\kappa} \frac{\Delta T}{1/2\Delta m} \quad \text{при} \quad m > m_0 + \frac{\Delta m}{2}. \quad (47.5)$$

Пренебрегая изменением энтропии со временем, получаем для средней скорости выделения энергии в слое

$$\epsilon = \frac{L}{\Delta m} \quad (47.6)$$

Наложим возмущение температуры слоя в виде [570], указанном на рис. 130. Пренебрегая возмущениями плотности и температуры и оставляя только возмущения градиента температуры, имеем из (47.1)

$$\delta L_r = \mp (4\pi r^2)^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa} \frac{\delta T}{1/4\Delta m}, \quad (47.7)$$

где “-” относится к внутренней, а “+” к внешней поверхности слоя. Тогда возмущение дивергенции потока равно

$$\delta \left( \frac{dL_r}{dm} \right) = 4 \frac{L}{\Delta m} \frac{T}{\Delta T} \frac{\delta T}{T} \quad (47.8)$$

Если скорость выделения энергии записать в виде

$$\epsilon \sim T^\nu, \quad (47.9)$$

пренебрегая ее зависимостью от плотности, и учесть только временные производные энтропии ( $d/dt = \partial/\partial t$ ), то из (47.2) с учетом (47.6), (47.8), (47.9) получим

$$\left( \nu - 4 \frac{T}{\Delta T} \right) \frac{\delta T}{T} = \frac{3}{2} \left( \frac{p}{\rho} \frac{\Delta m}{L} \right) \frac{d(\delta s)}{dt} \quad (47.10)$$

Первый член в левой части (47.10) связан с ростом тепловыделения, а второй — с увеличением теплоотода из слоя. Положительность левой части

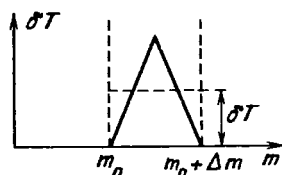
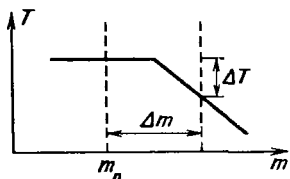


Рис. 129. Упрощенный профиль температуры в слое горения (из [570])

Рис. 130. Упрощенный профиль возмущения температуры в слое горения (из [570])

означает, что небольшое увеличение температуры слоя приводит к дальнейшему росту его энтропии и температуры, т.е. к неустойчивости. Таким образом, тепловыделение преобладает над теплоотводом при

$$\frac{\Delta T}{T} > \frac{4}{\nu}, \quad (47.11)$$

т.е. при достаточно большом перепаде температуры  $\Delta T$  в слое. В [570] отмечается, что для протон-протонного цикла горения водорода из (14.6) с  $\nu \approx 4$  [229] условие (47.11) не выполняется, но при  $\nu \gg 4$  в случае горения гелия (14.39), см. [229], сравнительно небольшие перепады температуры могут привести к неустойчивости. Для окончательного ответа на вопрос о тепловой неустойчивости слоевого источника необходимо учесть совместно возмущения температуры и плотности, связанные с гидростатической подстройкой всей звезды к возмущению температуры в слое.

б) **Учет возмущений плотности [570].** Линеаризованные уравнения равновесия (22.1), (22.2) запишем в виде

$$\frac{d(\delta r/r)}{dm} = \frac{1}{4\pi r^3 \rho} \left( -3 \frac{\delta r}{r} - \frac{3}{5} \frac{\delta P}{P} + \frac{3}{5} \delta s \right), \quad (47.12)$$

$$\frac{d(\delta P/P)}{dm} = \frac{Gm}{4\pi r^4 P} \left( 4 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta P}{P} \right). \quad (47.13)$$

При этом учтено

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{3}{5} \delta s + \frac{3}{5} \frac{\delta P}{P} \quad (47.14)$$

Решение неоднородной системы линейных уравнений (47.12), (47.13) конечное по всей звезде, ищем методом вариации постоянных. Соответствующая однородная система (при  $\delta s = 0$ ) имеет два линейно независи-

мых решения. Одно из этих решений с индексом "1" конечно в центре, где имеют место разложения (с нормировкой  $(\delta P/P)_1 = 1$  при  $m = 0, r = 0$ )

$$(\delta r/r)_1 = -\frac{1}{5} - \frac{3}{250} \frac{\rho G m}{r P} - \dots, \quad (47.15)$$

$$(\delta P/P)_1 = 1 + \frac{1}{10} \frac{\rho G m}{r P} + \dots,$$

а другое, с индексом "2", конечно на краю звезды, где имеется разложение (с нормировкой  $(\delta P/P)_2 = 1$  при  $m = M, r = R$ )

$$\left(\frac{\delta r}{r}\right)_2 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{20} \frac{R-r}{R} - \frac{6}{35} \left(\frac{R-r}{R}\right)^2 - \dots, \quad (47.16)$$

$$\left(\frac{\delta P}{P}\right)_2 = 1 + \frac{3}{7} \left(\frac{R-r}{R}\right) + \frac{10}{21} \left(\frac{R-r}{R}\right)^2 + \dots$$

Решение неоднородной системы, конечное по звезде, ищем в виде \*

$$\delta r/r = C_1(m) (\delta r/r)_1 + C_2(m) (\delta r/r)_2, \quad (47.17)$$

$$\delta P/P = C_1(m) (\delta P/P)_1 + C_2(m) (\delta P/P)_2.$$

Решения "1" расходятся на границе, а решения "2" — в центре звезды, так как отсутствуют везде конечные ненулевые решения однородной системы. Это соответствует равновесному динамически устойчивому состоянию звезды в отсутствие возмущений (см. § 44). Тогда функции  $C_1(m)$  и  $C_2(m)$  должны удовлетворять условиям

$$C_1(M) = 0, \quad C_2(0) = 0. \quad (47.18)$$

Подставляя (47.17) в (47.12), (47.13) и решая полученную относительно  $C_1(m)$  и  $C_2(m)$  систему с учетом (47.18), получаем решение неоднородной системы в виде

$$\frac{\delta r}{r} = \left(\frac{\delta r}{r}\right)_1 \int_r^R \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\delta P}{P}\right)_2 \frac{3}{5} \delta s \frac{dr}{r} + \left(\frac{\delta r}{r}\right)_2 \int_0^r \left(\frac{\delta P}{P}\right)_1 \frac{1}{\Delta} \frac{3}{5} \delta s \frac{dr}{r},$$

$$\frac{\delta P}{P} = \left(\frac{\delta P}{P}\right)_1 \int_r^R \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\delta P}{P}\right)_2 \frac{3}{5} \delta s \frac{dr}{r} + \left(\frac{\delta P}{P}\right)_2 \int_0^r \left(\frac{\delta P}{P}\right)_1 \frac{3}{5} \frac{\delta s}{\Delta} \frac{dr}{r}, \quad (47.19)$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\delta r}{r}\right)_2 \left(\frac{\delta P}{P}\right)_1 - \left(\frac{\delta r}{r}\right)_1 \left(\frac{\delta P}{P}\right)_2. \quad (47.20)$$

Решение (47.19) записывается аналогично решению неоднородного уравнения второго порядка  $\frac{d}{dx} [p(x)y'] - q(x)y + f(x) = 0$  на промежутке  $[a, b]$  с однородными краевыми условиями  $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$ ,

$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$  с помощью функции Грина [196]

$$G(x, \xi) = \begin{cases} y_1(x)y_2(\xi) & (x \leq \xi), \\ y_2(x)y_1(\xi) & (x \geq \xi), \end{cases}$$

где  $y_1$  удовлетворяет первому, а  $y_2$  — второму из краевых условий. Функция  $G(x, \xi)$  является решением уравнения второго порядка при  $f(x) = \delta(x - \xi)$ , а решение при произвольном  $f(x)$  имеет вид

$$y = \int_0^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Для локализованного в тонком слое возмущения  $\delta s$  из (47.19) получаем возмущение давления в слое в виде

$$\frac{\delta P}{P} \approx \frac{3}{5} Q \frac{\Delta r}{r} \delta s, \quad Q = \frac{(\delta P/P)_1 (\delta P/P)_2}{\Delta}. \quad (47.21)$$

Величина  $Q$  слабо меняется от  $-4$  до  $-8$  по звезде для модели красного гиганта с вырожденным углеродным ядром и гелиевым слоевым источником из [570]. Отрицательность  $Q$  приводит к тому, что рост энтропии в слое уменьшает давление в нем. При этом возмущение давления падает с уменьшением толщины слоя. Из уравнения состояния идеального газа, (47.14) и (47.21) получаем возмущение температуры в слое в виде

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta P}{P} - \frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{2}{5} \frac{\delta P}{P} + \frac{3}{5} \delta s = \frac{3}{5} \left( 1 + \frac{2}{5} Q \frac{\Delta r}{r} \right) \delta s. \quad (47.22)$$

Отсюда для широких областей горения  $\Delta r/r \sim 1$  и  $Q \approx -6$  следует отрицательная теплоемкость звезды ( $\delta T/T < 0$  при  $\delta s > 0$ ), означающая ее тепловую устойчивость. Для достаточно тонких слоев горения возможен рост температуры при увеличении энтропии, если

$$\frac{\Delta r}{r} < \frac{5}{2} \frac{1}{|Q|}. \quad (47.23)$$

Совместное выполнение условий (47.11) и (47.23) необходимо для развития неустойчивости в слоевом источнике. В реальных слоях горения  $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta r}{r}$ , поэтому

$$\frac{4}{\nu} < \frac{\Delta r}{r} < \frac{5}{2} \frac{1}{|Q|}, \quad \nu > \frac{8}{5} |Q| \approx 10. \quad (47.24)$$

Таким образом, гелиевые слоевые источники, а также водородные, где горение идет по углеродному циклу (§ 14) могут быть термически неустойчивыми. Возможно, что этот фактор влияет на образование петель на треках массивных звезд.

в) Строгий критерий тепловой устойчивости. Для строгого исследования тепловой устойчивости звезды следует одновременно решить

линеаризованную систему уравнений эволюции звезды с зависимостью от времени

$$\delta L, \delta r, \delta P, \delta T \sim e^{t/\tau}. \quad (47.25)$$

Эта система состоит из уравнения (47.12), (47.13), линеаризованного уравнения (47.1)

$$\delta L_r = -(4\pi r^2)^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa} \left[ \frac{d\delta T}{dm} + \frac{dT}{dm} \left( \frac{4\delta r}{r} + \frac{3\delta T}{T} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} \right) \right] \quad (47.26)$$

и линеаризованного уравнения (47.2), которое является единственным содержащим временную производную

$$\delta \epsilon - \delta \left( \frac{dL_r}{dm} \right) = \frac{3}{2} \delta \left( \frac{P}{\rho} \right) \frac{ds}{dt} + \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \frac{\delta s}{\tau}. \quad (47.27)$$

Линейная однородная система дифференциальных уравнений (47.12), (47.13), (47.26), (47.27) решается с помощью перехода к конечно-разностным уравнениям, как в методе Хеньи (§ 22). В силу однородности у этой системы при выполнении линеаризованных граничных условий (22.10), (22.11) решение существует только при нулевом определителе, что выделяет единственное значение собственное значение  $\tau$ . Проведенный в [570] анализ тепловой устойчивости эволюционных моделей звезды в  $1 M_{\odot}$  с малым содержанием металлов (население II) показал наличие положительных собственных значений: 1) на стадии начала гелиевой вспышки в ядре с  $L_H \approx 2600 L_{\odot}$ ,  $L_{He} \approx 1 L_{\odot}$ , где  $\tau \approx 300\,000$  лет, и 2) на стадии двух невырожденных слоевых источников (водородного и гелиевого) с вырожденным углеродным ядром при  $L_H \approx 122 L_{\odot}$ ,  $L_{He} \approx 118 L_{\odot}$ , где  $\tau \approx 10^6$  лет. В последнем случае возмущения температуры и энтропии имеют один и тот же знак внутри гелиевого и противоположные знаки внутри водородного слоевого источника, что указывает на неустойчивость именно гелиевого горения. Как следует из эволюционных расчетов (§ 33), в процессе развития гелиевой вспышки в слоевом источнике в нелинейном режиме  $\tau$  быстро падает. На границе тепловой устойчивости  $\tau = \infty$ , а определитель рассмотренной линеаризованной системы совпадает с определителем Хеньи (§ 22), поэтому обращение его в нуль в процессе эволюции означает наступление тепловой неустойчивости.

Обращение в нуль детерминантов в методе Хеньи или Шварцшильда происходит и при появлении тепловой неустойчивости, ведущей к образованию петель на эволюционных треках (см. [522, 553, 527], § 32, п. а). С этим связана также неоднозначность при построении равновесных звездных моделей с заданным распределением химического состава по веществу.