ГЛАВА 14

КОЛЕБАНИЯ ЗВЕЗД И УСТОЙЧИВОСТЬ

Звезда, как динамическая система, имеет различные собственные моды колебаний. При учете тепловых процессов некоторые из этих мод оказываются неустойчивыми. Инкремент такой неустойчивости γ равный обратному характерному времени роста амплитуды в e раз, обычно много меньше частоты колебаний ω. Другие моды могут быть неустойчивыми и в адиабатическом приближении, например, конвективная неустойчивость при $dS/dr < 0$ (см. гл. 3).

Звездным пульсациям и анализу их устойчивости посвящены книги и обзоры [183, 130, 616, 468]. В этой главе рассмотрены радиальные колебания звезд с фазовыми переходами и важная проблема колебательной устойчивости массивных звезд, что не вошло в указанные монографии. Рассмотрим сначала кратко основы теории звездных пульсаций, следуя [130, 468].

§ 48. Собственные моды

а) **Уравнения малых колебаний.** Выведем линеаризованную систему уравнений гидродинамики, описывающих малые колебания звезды. Звезда предполагается невращающейся с $\vec{u} = 0$. Лагранжевы возмущения данного элемента вещества для смещения, скорости, плотности, давления и потенциала обозначаются в виде

$$\delta \vec{r},\ \delta \vec{u},\ \delta\rho,\ \delta P,\ \delta\Phi, \tag{48.1}$$

а эйлеровы в данной точке пространства в виде

$$\vec{u}\,',\ \rho',\ P',\ \Phi'. \tag{48.2}$$

Связь между ними имеет вид

$$\delta f = f' + \vec{\delta r}\cdot(\nabla f). \tag{48.3}$$

Задаваясь зависимостью от времени $\sim e^{-i\omega t}$, получим из (27.1)

$$\vec{u}\,' = \delta\vec{u} = -i\omega\delta\vec{r}. \tag{48.4}$$

Из уравнения неразрывности (27.2) получаем

$$\delta\rho = \rho' + \nabla\rho\cdot\vec{\delta r} = -\rho(\nabla\cdot\vec{\delta r}). \tag{48.5}$$

Уравнение движения (27.3), деленное на ρ, после линеаризации примет вид

$$\omega^2\vec{\delta r} + \frac{\nabla P'}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho}\frac{\rho'}{\rho} + \nabla\Phi' = 0. \tag{48.6}$$

Лагранжевы возмущения энтропии δS, а также δP и $\delta\rho$ связаны соотношением

$$\delta P = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln\rho}\right)_S \frac{P}{\rho}\delta\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho \delta S = \gamma_1\frac{P}{\rho}\delta\rho + \rho T\gamma_3\delta S, \tag{48.7}$$

где из термодинамических соотношений имеем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho = \rho T\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S = \rho T\gamma_3, \tag{48.8}$$

γ_1 и γ_3 даны в (1.11), (1.13).

Запишем (48.6) в виде

$$-\omega^2 \vec{\delta r} + \nabla\left(\frac{P'}{\rho} + \Phi'\right) + \frac{P'}{\rho^2}\nabla\rho - \frac{\nabla P}{\rho}\frac{\rho'}{\rho} = 0. \tag{48.9}$$

Выразив P' через δP в третьем члене (48.9) с помощью (48.3), получим

$$-\omega^2\delta\vec{r} + \nabla\left(\frac{P'}{\rho} + \Phi'\right) + \frac{\delta P}{\rho}\frac{\nabla\rho}{\rho} - \frac{(\delta\vec{r}\cdot\nabla P)}{\rho}\frac{\nabla\rho}{\rho} -$$

$$- \frac{\nabla P}{\rho}\frac{\rho'}{\rho} = 0. \tag{48.10}$$

Так как в сферической звезде $\nabla P \parallel \nabla\rho$, два последних члена с помощью (48.5) объединяются в один:

$$\frac{(\delta\vec{r}\cdot\nabla P)}{\rho}\frac{\nabla\rho}{\rho} + \frac{\nabla P}{\rho}\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\delta\vec{r}\cdot\nabla\rho}{\rho}\cdot\frac{\nabla P}{\rho} +$$

$$+ \frac{\rho'}{\rho}\frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\delta\rho}{\rho}\cdot\frac{\nabla P}{\rho}. \tag{48.11}$$

Учитывая (48.7) в третьем члене (48.10) и условие (48.11), получим

$$-\omega^2\delta\vec{r} + \nabla\left(\frac{P'}{\rho} + \Phi'\right) + \gamma_1\frac{P}{\rho}\frac{\nabla\rho}{\rho}\frac{\delta\rho}{\rho} - \frac{\nabla P}{\rho}\frac{\delta\rho}{\rho} +$$

$$+ T\gamma_3\frac{\nabla\rho}{\rho}\delta S = 0. \tag{48.12}$$

Введем величину

$$A = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{\gamma_1 P}\frac{dP}{dr} \tag{48.13}$$

и выразим $\delta\rho$ через $\delta\vec{r}$ из (48.5). Тогда из (48.12) получаем

$$\omega^2\delta\vec{r} - \nabla\left(\Phi' + \frac{P'}{\rho}\right) + \gamma_1\frac{P}{\rho}A(\nabla\cdot\delta\vec{r})\frac{\vec{r}}{r} = T\gamma_3\frac{\nabla\rho}{\rho}\delta S. \tag{48.14}$$

В термически неравновесной звезде может быть важен учет изменения δS за период колебаний. Из уравнения знергии (22.3) имеем

$$-i\omega T\delta S = \epsilon - \frac{1}{4\pi\rho r^2}\frac{dL}{dr}. \tag{48.15}$$

Знак величины A из (48.13) связан с конвективной устойчивостью в устойчивом случае $A < 0$, в неустойчивом $A > 0$. В иззнтропической звезде, нейтральной относительно конвекции, имеет место $A = 0$ (см. (10.3)). Возмущение потенциала удовлетворяет уравнению Пуассона (48.7)

$$\nabla^2\Phi' = 4\pi G\rho'. \tag{48.16}$$

Рассмотрим адиабатические колебания с $\delta S = 0$. В сферических координатах (r, φ, θ) имеем

$$\delta\vec{r} = (\delta r,\ r\sin\theta\,\delta\varphi,\ r\delta\theta), \tag{48.17}$$

$$\nabla^2\Phi' = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi'}{\partial\theta}\right), \tag{48.18}$$

$$\nabla\cdot\delta\vec{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\delta r) + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1.}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\delta\theta) \tag{48.19}$$

Запишем уравнение (48.14) в компонентах сферической системы:

$$\omega^2\delta r - \frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi' + \frac{P'}{\rho}\right) + \gamma_1\frac{P}{\rho}A(\nabla\cdot\delta\vec{r}) = 0, \tag{48.20}$$

$$\omega^2 r\delta\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Phi' + \frac{P'}{\rho}\right) = 0, \tag{48.21}$$

$$\omega^2 r\sin\theta\,\delta\varphi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Phi' + \frac{P'}{\rho}\right) = 0. \tag{48.22}$$

Подставляя (48.21), (48.22) в (48.19), получаем

$$\nabla\cdot\vec{\delta r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\delta r) + \frac{1}{r^2\omega^2}\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\left(\Phi' + \frac{P}{\rho}\right)}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Phi' + \frac{P'}{\rho}\right)\right]\right\}. \tag{48.23}$$

Собственные функции возмущений ищем в виде разложения по сферическим функциям:

$$f = f_{lm}(r)\,Y_{lm} = f_{lm}P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi},\quad l = 0, 1, \ldots;$$
$$-l \leqslant m \leqslant l,\quad f = \delta\vec{r},\ \rho',\ P',\ \Phi'. \tag{48.24}$$

Здесь $P_l^m(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра, а сферические гармоники Y_{lm} удовлетворяют уравнению [93]

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\,Y_{lm} = 0. \tag{48.25}$$

Подставляя (48.24) в (48.5), (48.16), (48.20), а также (48.18) и (48.23) с учетом (48.25), получим для адиабатических колебаний систему уравнений для радиальных зависимостей собственных функций

$$\frac{\rho'_{lm}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\delta r_{lm}+\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\delta r_{lm})-\frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}\left(\Phi'_{lm}+\frac{P'_{lm}}{\rho}\right)=0 \quad (48.26)$$

$$\omega^2\delta r_{lm}-\frac{d}{dr}\left(\Phi'_{lm}+\frac{P'_{lm}}{\rho}\right)+\gamma_1\frac{P}{\rho}A\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\delta r_{lm})-\right.$$

$$\left.-\frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}\left(\Phi'_{lm}+\frac{P'_{lm}}{\rho}\right)\right]=0, \quad (48.27)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi'_{lm}}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\Phi'_{lm}=4\pi G\rho'_{lm}. \quad (48.28)$$

При этом из (48.3), (48.7) для $\delta S=0$ имеем

$$P'_{lm}+\delta r_{lm}\frac{dP}{dr}=\gamma_1\frac{P}{\rho}\left(\rho'_{lm}+\delta r_{lm}\frac{d\rho}{dr}\right)$$

откуда с учетом (48.13) получаем

$$\frac{P'_{lm}}{P}=\gamma_1\frac{\rho'_{lm}}{\rho}+\gamma_1\delta r_{lm}A. \quad (48.29)$$

Компоненты смещений $\delta\theta_{lm}$ и $\delta\varphi_{lm}$ получаются подстановкой (48.24) в (48.21) и (48.22). Имеем

$$\omega^2r^2\delta\theta_{lm}=\left(\Phi'_{lm}+\frac{P'_{lm}}{\rho}\right)\frac{dP_l^m}{d\theta}e^{im\varphi}, \quad (48.30)$$

$$\omega^2r^2\sin^2\theta\,\delta\varphi_{lm}=\left(\Phi'_{lm}+\frac{P'_{lm}}{\rho}\right)imP_l^m e^{im\varphi}. \quad (48.31)$$

В безразмерных переменных [342]

$$y_1\equiv\frac{\delta r}{r},\quad y_2\equiv\frac{1}{gr}\left(\Phi'+\frac{P'}{\rho}\right),\ y_3\equiv\frac{1}{gr}\Phi',\ y_4\equiv\frac{1}{g}\frac{d\Phi'}{dr}, \quad (48.32)$$

где $g=Gm/r^2$ — локальное ускорение силы тяжести, уравнения (48.26)–(48.29) примут вид (опуская индексы lm)

$$r\frac{dy_1}{dr}=\left(\frac{g\rho r}{\gamma_1P}-3\right)y_1+\left[g\frac{l(l+1)}{r\omega^2}-\frac{g\rho r}{\gamma_1P}\right]y_2+\frac{g\rho r}{\gamma_1P}y_3, \quad (48.33)$$

$$r\frac{dy_2}{dr}=\left(\frac{r\omega^2}{g}+rA\right)y_1+\left(1-\frac{r}{m}\frac{dm}{dr}-rA\right)y_2+rAy_3, \quad (48.34)$$

$$r\frac{dy_3}{dr}=\left(1-\frac{r}{m}\frac{dm}{dr}\right)y_3+y_4, \quad (48.35)$$

$$r\frac{dy_4}{dr}=-\frac{r}{m}\frac{dm}{dr}y_1+\frac{r}{m}\frac{dm}{dr}\frac{g\rho r}{\gamma_1P}y_2+$$

$$+\left[l(l+1)-\frac{r}{m}\frac{dm}{dr}\frac{g\rho r}{\gamma_1P}\right]y_3-\frac{r}{m}\frac{dm}{dr}y_4. \quad (48.36)$$

В безразмерном виде уравнения (48.33)–(48.36) удобны для численного интегрирования.

б) **Граничные условия.** Граничные условия для уравнений малых нерадиальных колебаний следуют из условий ограниченности собственных функций в центре и на поверхности звезды. Условие конечности решений в центре приводит к следующим разложениям:

$$\delta r = r^{l-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu r^\nu, \tag{48.37}$$

$$P'/\rho = r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} Y_\nu r^\nu, \tag{48.38}$$

$$\Phi' = r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu r^\nu, \tag{48.39}$$

при зтом

$$\omega^2 U_0 = l(Y_0 + \varphi_0) \tag{48.40}$$

и два нулевых коэффициента разложения остаются свободными. Рекуррентные соотношения для остальных козффициентов получаются после подстановки разложений в уравнения и приравнивания козффициентов при одинаковых степенях r [616]. При этом ненулевыми оказываются только коэффициенты при четных степенях r. Адиабатические радиальные колебания рассмотрены в § 43, п. в. Если в равновесном решении $P/\rho \to 0$ на поверхности, то внешние граничные условия имеют вид [130]

$$\frac{\delta P}{P} = \left[l(l+1)\frac{Gm}{\omega^2 r^3} - \frac{\omega^2 r^3}{Gm} - 4 \right]\frac{\delta r}{r} + \left[l(l+1)\frac{GM}{\omega^2 r^3} - l - 1 \right]\frac{\Phi'}{gr}, \tag{48.41}$$

$$\frac{d\Phi'}{dr} + (l+1)\frac{\Phi'}{r} = -4\pi G\rho\delta r. \tag{48.42}$$

Из двух свободных коэффициентов (48.40) один произволен в силу произвольности нормировки, поэтому для выполнения граничных условий (48.41), (48.42) значение ω^2 должно равняться собственному значению. В случае изотермической атмосферы короткие волны распространяются до больших радиусов и внешнее граничное условие следует из условия конечности потока акустической энергии при $r \to \infty$ [342]. Собственные значения системы (48.26) – (48.29) с граничными условиями (48.41), (48.42) действительны в силу самосопряженности соответствующего оператора [616].

в) **p-, g- и f-моды.** Решение уравнений для возмущений и нахождение собственных значений и собственных функций в простых моделях позволило изучить основные свойства звездных колебаний аналитически и сделать их классификацию. В однородной модели из сжимаемого газа при $n \gg 1$, n — число радиальных узлов собственной функции, две совокупности собственных частот записываются в виде [130]

$$\omega_{nl}^2 = \frac{GM}{R^3}\left[2\gamma_1 n^2 + \frac{l(l+1)}{2\gamma_1 n^2}\right] \quad (p\text{-моды}), \tag{48.43}$$

$$\omega_{nl}^2 = -\frac{GM}{R^3}\frac{l(l+1)}{2\gamma_1 n^2} \quad (g\text{-моды}).$$

Здесь R – радиус однородной звезды*), связанный с центральным давлением P_c

$$P_c = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2, \quad P = P_c(1 - r^2/R^2). \tag{48.44}$$

Колебательные p-моды связаны с конкуренцией сил давления против сил инерции и гравитации. В пределе большого n они сводятся к стоячим акустическим волнам, а при малых n, $l = 0$ представляют собой радиальные крупномасштабные колебания звезды. Их частота

$$(\omega_{nl}^2)_{p\text{-моды}} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{48.45}$$

как и в акустических модах $\left(\omega = \dfrac{2\pi c_s}{\lambda} \to \infty\right.$ при $\lambda \to 0$, c_s – скорость звука$\left.\right)$. Собственные функции смещений $\delta\vec{r}$ у p-мод медленно растут от нулевых значений в центре, осциллируя при $n \gg 1$, и резко возрастают у поверхности звезды, достигая там максимума.

Квадраты собственных значений g-мод отрицательны в однородной модели, что говорит об их неустойчивости. Эта неустойчивость связана с конвективной неустойчивостью однородной звезды, а сами g-моды отражают конвективные движения в звезде. Их существование связано с конкуренцией сил гравитации против выталкивающих архимедовых сил в веществе при наличии неоднородностей плотности. Частоты g-мод стремятся к нулю при $n \to \infty$, а собственные функции смещений $\delta\vec{r}$ быстро нарастают от нулевого значения в центре, а затем медленно спадают (осциллируя при $n \gg 1$) до малого, но конечного значения на поверхности [468]. С ростом l и n максимум амплитуды g-моды становится все ближе к центру, а у p-моды – ближе к поверхности. В адиабатической звезде, нейтральной относительно конвекции, все собственные частоты g мод обращаются в нуль (см. также § 44).

Особый класс колебаний представляют собой f-мода. Это единственный тип колебаний, сохраняющийся в однородной фигуре из несжимаемой жидкости. f – мода связана со стремлением сил гравитации в отсутствие вращения при всех возмущениях вернуть телу сферическую форму. Эта мода отсутствует при $l = 0$ и начинается только с $l = 2$ для несжимаемого тела и с $l = 1$ для сжимаемого. Собственная функция f-моды плавно нарастает от центра до поверхности, не имея нигде резких максимумов.

Радиальные g-моды также отсутствуют ввиду невозможности чисто радиальных конвективных движений. Все радиальные колебания звезды связаны с p-модами. Значение n для f-моды в однородной модели равно

---

*) Равновесное значение ∇P достигается за счет быстрого падения температуры.

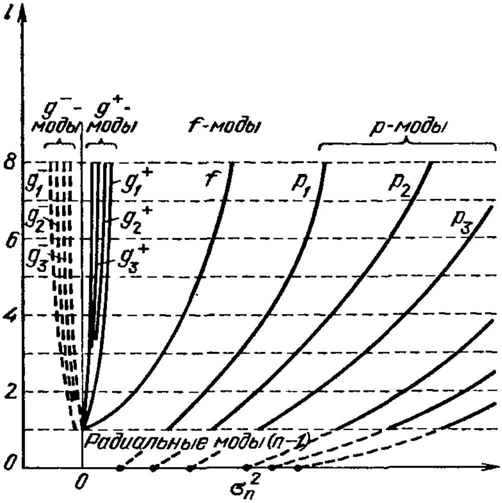

Рис. 131. Собственные значения $\sigma_n^2 = (2\pi/\text{период})^2$ линейных адиабатических нерадиальных колебаний для различных n – число узлов по радиусу, в зависимости от l – номер сферической гармоники (схематично). Показаны четыре типа сфероидальных мод нерадиальных колебаний (p, f, g^+, g^-) по классификации Т. Каулинга. Точками на оси абсцисс обозначены радиальные колебания, номера p_n мод равны $n-1$. В конвективно устойчивой звезде с $A < 0$ существуют только g^+-моды, а у конвективно неустойчивых – только g^--моды (см. (48.13)), одновременное существование g^+- и g^--мод в звезде возможно только, когда в одних частях звезды $A < 0$, а в других $A > 0$ (из [130]).

нулю, а в моделях общего вида – единице. Собственные значения f-моды являются промежуточными между g- и p-модами. Схематически зависимости собственных значений различных мод колебаний от n и l представлены на рис. 131 из [130].

г) **Колебательная неустойчивость.** Наличие выделения и отвода тепла приводит к тому, что амплитуда колебаний, постоянная в адиабатическом случае, может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от суммарного действия тепловых процессов. Рассмотрим условия затухания или возбуждения колебаний в общем виде, не делая предположения о линейности [215]. Разделим полную энергию звезды $\mathfrak{E}$ на энергию колебаний W и статическую энергию звезды U. Для каждого элемента массы dm колебательная энергия определяется, как значение кинетической энергии в момент прохождения состояния колебательного равновесия, а статическая энергия U есть сумма тепловой и гравитационной энергий звезды в этом состоянии. Изменение ΔW величины W за цикл определяет затухание колебаний при $\Delta W < 0$ или их возбуждение при $\Delta W > 0$. По определению имеем

$$\Delta W = \Delta \mathfrak{E} - \Delta U. \tag{48.46}$$

Изменение полной энергии звезды есть разность между выделением и отводом тепла за цикл, т.е.

$$\Delta \mathfrak{E} = \int dm \oint \left(\epsilon - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{F}\right) dt. \tag{48.47}$$

Здесь внутренний интеграл берется за один колебательный цикл, а внешний – по всей звезде, $\vec{F}$ – вектор потока тепла (эрг $\cdot$ см$^{-2}$с$^{-1}$). В сферически-симметричной звезде

$$\vec{F} = \left(\frac{L}{4\pi r^2}, 0, 0\right), \quad \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho r^2}\frac{d}{dr}(r^2 F_r) = \frac{1}{4\pi\rho r^2}\frac{dL}{dr} \tag{48.48}$$

За цикл колебаний происходит изменение полной энергии $\mathfrak{E}$ по (48.47) и смещение состояния колебательного равновесия, изменяющего U. Пусть состояние колебательного равновесия достигается одновременно по всей звезде, так что нет сдвига фаз. Тогда переход от колебательного состояния I в то же состояние II через один период колебаний можно сделать двумя путями: через цикл колебания и квазистатически через последовательные состояния колебательного равновесия.

При квазистатическом процессе система обладает только статической энергией U, изменение которой равно (при нулевой внешней работе)

$$\Delta U = \int dm \int dt\, T \frac{dS}{dt}. \tag{48.49}$$

Так как за один цикл изменение положения равновесия считается малым ($\gamma \ll \omega$), соотношение (48.49) запишем в виде

$$\Delta U = \int dm\, T_e\, \Delta S, \tag{48.50}$$

где T_e — равновесная температура статической звезды, изменением которой пренебрегаем. При колебательном цикле между теми же состояниями

$$\Delta S = \oint \frac{\epsilon - \frac{1}{\rho}\, \nabla \cdot \vec{F}}{T}\, dt, \tag{48.51}$$

поэтому из (48.50) получаем

$$\Delta U = \int dm\, T_e \oint \frac{\epsilon - \frac{1}{\rho}\, \nabla \vec{F}}{T}\, dt. \tag{48.52}$$

Подставляя (48.47) и (48.52) в (48.46), получаем

$$\Delta W = \int dm \oint \left(1 - \frac{T_e}{T}\right)\left(\epsilon - \frac{1}{\rho}\, \nabla \cdot \vec{F}\right) dt \tag{48.53}$$

определяющее поведение колебаний в звезде. Условие (48.53) получено впервые Эддингтоном в 1926 г. [130].

Регулярные колебания блеска наблюдались у многих звезд. Наиболее известны из них классические цефеиды с периодами 1–50 суток и звезды типа PP Лиры с периодами 1,5–24 часа. Цефеиды имеют массы 4–14 $M_\odot$, светимости 300–26000 $L_\odot$ и радиусы 14–200 $R_\odot$. Звезды типа PP Лиры имеют меньшие значения массы, радиуса и светимости. Оба этих типа переменных звезд находятся на стадиях эволюции после главной последовательности и выгорания водорода в ядре звезды. Механизм возбуждения радиальных колебаний у этих звезд связан с зонами неполной ионизации гелия и в меньшей степени водорода, в которых непрозрачность увеличивается с ростом температуры [648]. Нерадиальные p-моды колебаний с периодом, близким к пяти минутам, наблюдались на Солнце [321а].