§ 49. Колебания звезд с фазовым переходом

Вещество нейтронных звезд при плотностях, близких к ядерным, может быть неустойчивым относительно рождения π-мезонов [158]. Это явление, называемое π – конденсацией, приводит к зависимости $P(\rho)$ ван-дер-ваальсовского типа, что соответствует фазовому переходу. Другим примером фазового перехода является нейтронизация. Рассмотрим колебания звезд при наличии фазового перехода в приближении несжимаемой жидкости [57]. Будем рассматривать устойчивые звезды на растущем участке кривой $M(P_c)$ (см. § 40). Здесь P_c удобно использовать в качестве переменной вместо ρ_c ввиду его непрерывности при скачкообразном изменении ρ_c.

а) **Уравнения движения при наличии фазового перехода.** Пусть вещество является несжимаемым везде, за исключением фазового перехода, т.е.

$$\rho = \rho_1 \quad \text{при} \quad P<P_0, \qquad \rho = \rho_2 \quad \text{при} \quad P>P_0. \tag{49.1}$$

Из уравнения неразрывности (27.2) имеем

$$u = u_1(t)\left(\frac{r_2(t)}{r}\right)^2 \quad \text{при} \quad r>r_2, \qquad u=0 \quad \text{при} \quad r<r_2. \tag{49.2}$$

Здесь $r_2(t)$ – радиус ядра новой фазы, более плотной, вещество которой покоится. Подставляя (49.2) в уравнение движения (27.3) и интегрируя по радиусу r от r_2 до R (радиус звезды), получаем [158, 57]

$$\dot u_1 r_2^2 + 2u_1 r_2 \dot r_2 - \frac{1}{2}u_1^2 r_2^4\,\frac{R^3+R^2r_2+Rr_2^2+r_2^3}{R^3r_2^3} -$$

$$-\frac{P_1}{\rho_1}\,\frac{Rr_2}{R-r_2} + \frac{4\pi G}{3}\left[(\rho_2-\rho_1)r_2^3 + \frac{\rho_1}{2}Rr_2(R+r_2)\right] = 0. \tag{49.3}$$

Для сведения уравнения (49.3) к одной функции, подлежащей нахождению, рассмотрим условия на границе разрыва при $r = r_2$. Из непрерывности потоков массы, импульса, энергии на скачке, аналогичных условиям на фронте ударной волны [142], получаем

$$\begin{gathered} u_1 = -(\lambda-1)\dot r_2, \quad \lambda = \rho_2/\rho_1, \qquad P_2 - P_1 = \rho_2(\lambda-1)\dot r_2^2 \\ E_2 - E_1 = \frac{1}{2}(\lambda-1)^2\dot r_2^2 + \frac{P_1}{\rho_2}(\lambda-1). \end{gathered} \tag{49.4}$$

Здесь P_1, E_1 – давление и удельная энергия на внутренней границе старой фазы, а P_2, E_2 – на границе ядра новой фазы. При адиабатическом сжатии

$$(E_2-E_1)_{\text{ad}} = \frac{P_0}{\rho_2}(\lambda-1). \tag{49.5}$$

Очевидно, что $P_1 \leqslant P_0$, а $P_2 \geqslant P_0$. Если ввести параметр δ так, что

$$\begin{gathered} P_2 = P_0 + \frac{1+\delta}{2}\rho_2(\lambda-1)\dot r_2^2, \\ P_1 = P_0 - \frac{1-\delta}{2}\rho_2(\lambda-1)\dot r_2^2, \quad -1\leqslant\delta\leqslant1, \end{gathered} \tag{49.6}$$

то выделение тепла на фазовом скачке при сжатии равно

$$q = E_2 - E_1 - (E_2 - E_1)_{ad} = \frac{\delta}{2}(\lambda - 1)^2 \dot{r}_2^2, \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant 1, \tag{49.7}$$

а при расширении

$$q = E_1 - E_2 - (E_1 - E_2)_{ad} = -\frac{\delta}{2}(\lambda - 1)^2 \dot{r}_2^2, \qquad -1 \leqslant \delta \leqslant 0. \tag{49.7a}$$

Ограничения на величину δ в (49.7) следуют из условия неубывания энтропии на фазовом скачке. Учитывая (49.4)–(49.7) в (49.5), получим уравнение для изменения радиуса ядра

$$\ddot{r}_2 + \frac{\dot{r}_2^2}{2r_2}\left\{3 + \delta\lambda + \frac{r_2}{R}\left[\lambda\frac{\delta - r_2^3/R^3}{1 - r_2/R} - 1 - \frac{r^2}{R} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{r_2^2}{R^2}\right]\right\} - \frac{2\pi G\rho_1}{3r_2(1 - r_2/R)(\lambda - 1)}\left[R^2 + (2\lambda - 3)r_2^2 - 2(\lambda - 1)\frac{r_2^3}{R}\right] +$$
$$+ \frac{P_0}{\rho_1 r_2(\lambda - 1)\left(1 - \dfrac{r_2}{R}\right)} = 0. \tag{49.8}$$

Если вместо P_0 использовать равновесные значения радиуса R_0 и радиуса ядра $r_{2,0}$ звезды с массой M_0

$$M_0 = \frac{4\pi}{3}\left[\rho_1 R_0^3 + (\rho_2 - \rho_1)r_{2,0}^3\right] = \frac{4\pi}{3}\left[\rho_1 R^3 + (\rho_2 - \rho_1)r_2^3\right], \tag{49.9}$$

$$\frac{P_0}{\rho_1} = \frac{2\pi G\rho_1}{3}\left[R_0^2 + (2\lambda - 3)r_{2,0}^2 - 2(\lambda - 1)\frac{r_{2,0}^3}{R_0}\right], \tag{49.10}$$

то уравнение (49.8) удобно переписать в виде

$$\ddot{r}_2 + \frac{\dot{r}_2^2}{2r_2}\left\{3 + \delta\lambda + \frac{r_2}{R}\left[\lambda\frac{\delta - r_2^3/R^3}{1 - r_2/R} - 1 - \frac{r_2}{R} - \frac{r_2^2}{R^2}\right]\right\} +$$
$$+ \frac{2\pi G\rho_1}{3r_2\left(1 - \dfrac{r_2}{R}\right)}\left\{\frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1}(r_{2,0}^2 - r_2^2) - \frac{r_{2,0}^3 - r_2^3}{R(R^2 + RR_0 + R_0^2)} \times \right.$$
$$\left. \times\left[3R^2 + 3RR_0 + 2R_0^2 + 2(\lambda - 1)\frac{r_{2,0}^3}{R_0}\right]\right\} = 0. \tag{49.11}$$

Уравнение (49.11) справедливо для колебаний произвольной амплитуды. Для колебаний звезды с малой амплитудой $|r_2 - r_{2,0}| \ll r_2$, $|R - R_0| \ll \ll r_2$, пренебрегая квадратичными по амплитуде членами в (49.11), имеем

$$\ddot{r}_2 + \frac{4\pi G\rho_1(r_{2,0} - r_2)}{3\left(1 - \dfrac{r_{2,0}}{R_0}\right)}\left[\frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} - 4\frac{r_{2,0}}{R_0} - (\lambda - 1)\frac{r_{2,0}^4}{R_0^4}\right] = 0, \tag{49.12}$$

что при $\omega^2 > 0$ соответствует гармоническим колебаниям с частотой

$$\omega^2 = \frac{4\pi G\rho_1}{3\left(1 - \frac{r_{2,0}}{R_0}\right)} \left[4\frac{r_{2,0}}{R_0} + (\lambda - 1)\frac{r_{2,0}^4}{R_0^4} - \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} \right]. \tag{49.12a}$$

Очевидно, что при $\lambda > 3/2$ колебания возможны только у звезды с конечным ядром [193]. Для звезды с малым ядром $r_{2,0} \ll R_0$ частота малых колебаний есть

$$\omega_0 = \left[\frac{4\pi G\rho_1}{3} \frac{3 - 2\lambda}{\lambda - 1} \right]^{1/2}. \tag{49.13}$$

Если фазовый переход происходит в оболочке $r_{2,0} \approx R_0$, то

$$\omega^2 = \frac{4\pi G\rho_1}{3} \frac{\lambda^2}{\lambda - 1} \frac{1}{1 - r_{2,0}/R_0}. \tag{49.14}$$

Нелинейные колебания звезды с малым ядром ($|r_2 - r_{2,0}| \sim r_{2,0}$, r_2, $r_{2,0} \ll R_0$) описываются уравнением

$$\ddot{r}_2 + \frac{\dot{r}_2^2}{2r_2}(3 + \delta\lambda) + \frac{\omega_0^2}{2r_2}(r_2^2 - r_{2,0}^2) = 0. \tag{49.15}$$

При $\delta = 1$ и $r_{2,0} = 0$ получается уравнение, рассмотренное в [158].

б) **Физические процессы на фазовом скачке.** В [487] рассматривались нелинейные затухающие колебания и предполагалось, что на стадии сжатия $\delta = 1$, а на стадии расширения также имеет место диссипация и $\delta = -1$. Чтобы обосновать выбор величины δ, рассмотрим фазовый переход, как предельный случай уравнения состояния, в котором давление меняется от P_a до P_b при изменении ρ от ρ_1 до ρ_2. При $P_b \to P_0 \leftarrow P_a$ и неизменных ρ_1 и ρ_2 получаем фазовый переход.

В веществе промежуточного слоя скорость звука есть $a_s \approx [(P_b - P_a)/(\rho_2 - \rho_1)]^{1/2}$. Если амплитуды колебаний столь малы, что скорость движения $v < a_s$, то колебания будут адиабатическими с условием на скачке $\delta = 0$. В пределе $P_b \to P_0 \leftarrow P_a$ имеем $a_s \to 0$, т.е. всегда наступит $v > a_s$ и движение в переходном слое станет сверхзвуковым. Столкновение потока сверхзвуковой скорости со стенкой в виде ядра новой фазы приведет к формированию ударной волны, в которой кинетическая энергия переходит в тепло. Очевидно, что "фазовая диссипация" кинетической энергии в процессе сжатия звезды и росте ядра новой фазы имеет ту же природу, что и в ударной волне. В пределе при $P_b \to P_0 \leftarrow P_a$ величина δ в условии на скачке (49.6) может приближаться к единице, но пока $v < a_s$ имеет место $\delta = 0$.

Иным образом происходит стадия расширения звезды, сопровождающаяся уменьшением ядра новой фазы. В этом случае даже в идеально тонком фазовом скачке при сверхзвуковой скорости движения ударный фронт может не возникнуть ввиду отсутствия препятствия для движущейся наружу оболочки. Давление на границе ядра становится больше P_0 ввиду силы реакции при расширении оболочки. Таким образом, фаза расширения может всегда остаться адиабатической с $\delta = 0$. Затухание колебаний звезды с фазовым переходом в этом случае происходит только на стадии сжатия звезды, а в случае неидеального, слегка размазанного скачка возможны строго адиабатические колебания малой, но конечной амплитуды.

в) **Адиабатические колебания конечной амплитуды.** В отсутствие затухания при $\delta = 0$ сохраняется полная энергия колеблющейся звезды, соответствующая первому интегралу уравнения (49.8)

$$E = 2\pi\rho_1(\lambda-1)^2\dot{r}_2^2 r_2^3\left(1-\frac{r_2}{R}\right)+\frac{4\pi}{3}r_2^3 P_0(\lambda-1)-$$
$$-\frac{16\pi^2 G\rho_1^2 R^5}{15}\left[1+\frac{5}{2}(\lambda-1)\frac{r_2^3}{R^3}+(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)\frac{r_2^5}{R^5}\right]. \qquad (49.16)$$

Из (49.16), используя (49.9), получим решение и формулу для периода колебаний в нелинейном случае. Во избежание излишне громоздких выражений рассмотрим нелинейные колебания звезды с малым ядром $r_2/R \ll 1$, для которого уравнение (49.16) с учетом (49.10), (49.13) примет вид

$$\dot{x}^2 = \omega_0^2\left(\frac{x^{-3}-x^2}{5} - x_0^2\,\frac{x^{-3}-1}{3}\right). \qquad (49.17)$$

Здесь $x = r_2/r_{2,\min}$, $x_0 = r_{2,0}/r_{2,\min}$ и учтено начальное условие $r_2 = r_{2,\min}$ при $\dot{r}_2 = 0$; $r_{2,\min}$ – минимальный радиус ядра. Период нелинейных адиабатических колебаний в случае малого ядра равен

$$T_{\rm ad} = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{x_*}\left[\frac{x^{-3}-x^2}{5} - x_0^2\,\frac{x^{-3}-1}{3}\right]^{-1/2} dx. \qquad (49.18)$$

Здесь $x_* > x_0 > 1$ соответствует максимальному радиусу ядра $x_* = r_{2,\max}/r_{2,\min}$ и является корнем знаменателя в (49.18). Зависимость

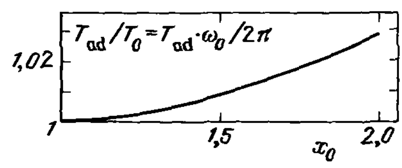

Рис. 132. Зависимость периода нелинейных адиабатических колебаний звезды с фазовым переходом $T_{\rm ad}$ от амплитуды в случае малого ядра. По оси абсцисс отложены значения $x_0 = r_{2,0}/r_{2,\min}$ отношение равновесного радиуса ядра $r_{2,0}$ к минимальному $r_{2,\min}$, по оси ординат $T_{\rm ad}/T_0 = T_{\rm ad}\omega_0/2\pi$, где T_0 и ω_0 – период и частота малых гармонических колебаний

$T_{\rm ad}\omega_0/2\pi$ от x_0 приведена на рис. 132. Колебания малой амплитуды $x = 1 + \alpha$, $x_0 = 1 + \Delta$, α, $\Delta \ll 1$ являются гармоническими и из (49.18) следует

$$T_0 = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{\alpha_{\max}=2\Delta}(2\Delta\alpha-\alpha^2)^{-1/2}d\alpha = 2\pi/\omega_0$$

в соответствии с (49.13).

Оценим величину максимальной амплитуды адиабатических колебаний при пионизации, связанную с конечным давлением электронов. Для двух случаев, рассмотренных в [487], получаем из (49.12а):

$$1)\ \lambda = 5,\quad r_2/R = 0{,}518,\quad \omega = 0{,}648\omega_{00};$$
$$2)\ \lambda = 1{,}2,\quad r_2/R = 0{,}295,\quad \omega = 1{,}4\omega_{00},\quad \omega_{00} = \sqrt{4\pi G\rho_1}. \qquad (49.19)$$

Максимальная скорость движения вещества оболочки относительно скачка $v = \lambda\dot{r}_2 = \lambda\omega r_2\eta$, где η – относительная амплитуда колебаний радиуса ядра. Скорость звука в области фазового перехода $a_s \sim (P_e/\rho)^{1/2}$, где P_e давление электронов. При $\rho = 2\cdot 10^{14}$ г $\cdot$ см$^{-3}$, $P_e = 10^{30}$ дин, $R = 10$ км условие $v < a_s$ дает $\eta \leqslant 0{,}003$ и $\eta \leqslant 0.01$ соответственно.

г) Затухающие колебания конечной амплитуды. При достаточно большой амплитуде колебаний или в случае идеального фазового перехода при $P = P_0$, т.е. $a_s = 0$, стадия сжатия сопровождается затуханием колебаний и $\delta > 0$. На стадии расширения звезды (уменьшение ядра) затухание отсутствует, поэтому примем там $\delta = 0$, в отличие от [487]. Интеграл уравнения (49.15), аналогичный (49.17) при $\delta = \mathrm{const} \neq 0$ примет вид

$$\dot{x}^2 = \omega_0^2\left[\frac{x^{-3-\delta\lambda} - x^2}{5+\delta\lambda} - x_0^2\,\frac{x^{-3-\delta\lambda} - 1}{3+\delta\lambda}\right]. \qquad (49.20)$$

Если в начальном состоянии минимальный радиус ядра равен $r_{2,\min}^{(0)}$ и $\dot{r}_2 = 0$, то через время T, равное

$$T = \frac{1}{\omega_0}\left\{\int_1^{x_*}\left[\frac{x^{-3-\delta\lambda} - x^2}{5+\delta\lambda} - x_0^2\,\frac{x^{-3-\delta\lambda} - 1}{3+\delta\lambda}\right]^{-1/2} dx + \right.$$
$$\left. + \int_{x_{**}}^{1}\left[\frac{x^{-3} - x^2}{5} - \frac{x_0^2}{x_*^2}\,\frac{x^{-3} - 1}{3}\right]^{-1/2} dx\right\} \qquad (49.21)$$

минимальный радиус ядра станет равным $r_{2,\min}^{(1)} > r_{2,\min}^{(0)}$. Здесь первый

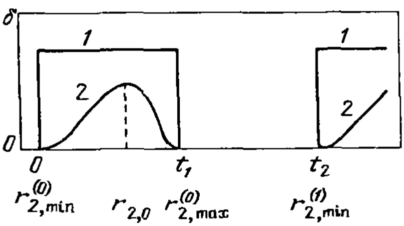

Рис. 133. Качественный вид изменения параметра δ (см. формулы (49.6), (49.7)) во время пульсаций: 1 для идеального фазового перехода, 2 для размазанного

интеграл соответствует сжатию звезды (увеличению ядра), а второй – расширению звезды. Величина $x_* > 1$ является корнем знаменателя в первом, а $x_{**} < 1$ – во втором интеграле соотношения (49.21). Здесь

$$x_0 = r_{2,0}/r_{2,\min}^{(0)},\quad x_* = r_{2,\max}/r_{2,\min}^{(0)},\quad x_{**} = r_{2,\min}^{(1)}/r_{2,\max}.$$

Отсюда

$$r_{2,\min}^{(1)} = r_{2,\min}^{(0)}\,x_*x_{**},\qquad \text{где } x_*x_{**} > 1$$

в силу затухания колебаний. Сделаем в (49.21) разложение, считая в первом интеграле $x = 1 + \alpha$, $x_0 = 1 + \Delta$, а втором $x = 1 - \beta$; $\alpha, \beta, \Delta \ll 1$, оставляя члены $\sim\alpha^3$, β^3, Δ^3 для учета затухания в первом неисчезающем члене. В результате элементарных выкладок получаем

$$x_* = 1 + 2\Delta - \frac{5}{3}\Delta^2 - \frac{2}{3}\delta\Delta^2\lambda.$$

$$x_{**} = 1 - 2\Delta + \frac{17}{3}\Delta^2 + \frac{4}{3}\delta\Delta^2\lambda, \qquad (49.22)$$

$$\frac{r^{(1)}_{2,\min}}{r^{(0)}_{2,\min}} = 1 + \frac{2}{3}\delta\Delta^2\lambda.$$

С учетом того, что $\Delta = \dfrac{r_{2,0}}{r_{2,\min}} - 1$, и третьего соотношения (49.22), получим уравнение для изменения $r_{2,\min}$, приняв период равным $2\pi/\omega_0$:

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\frac{\delta\omega_0\lambda}{3\pi}\Delta^2 \qquad (49.23)$$

В случае начального условия $\Delta = \Delta_0$ при $t = 0$ имеем

$$\frac{\Delta_0 - \Delta}{\Delta\Delta_0} = \frac{\delta\omega_0\lambda}{3\pi}t. \qquad (49.24)$$

В идеальном фазовом переходе на всей фазе сжатия естественно принять $\delta = \mathrm{const} > 0$ (возможно, $\delta = 1$, как принято в [158, 487]). В случае размазанного перехода δ переменно, ввиду изменения отношения v/a_s в процессе движения, и плавно обращается в нуль вблизи начала и конца фазы сжатия. Качественная зависимость $\delta(t)$ вдоль периода колебаний показана на рис. 133. В реальных объектах скорости фазовых превращений конечны и всегда действует механизм второй вязкости, количественные оценки для которого нужно делать отдельно для каждого типа фазового перехода.

§ 50. Колебательная устойчивость массивных звезд

В настоящее время точно не известна верхняя граница массы звезд в Галактике. Начиная с работы Леду 1941 г. было сделано несколько исследований устойчивости массивных звезд относительно раскачки колебаний на основной радиальной моде [568, 602, 603, 649, 251, 252, 539, 540] в связи с попыткой теоретического определения максимально возможной массы звезды. С ростом массы увеличивается роль лучистого давления и средний показатель адиабаты γ_1 приближается к 4/3. Ввиду того что адиабатическая звезда с $\gamma_1 = 4/3$ нейтральна относительно расширения или сжатия (см. § 34), влияние дестабилизирующих факторов возрастает с ростом массы из-за уменьшения запаса колебательной устойчивости.

Исследование данной проблемы в линейном приближении [568] показало, что в звездах с $M > 65\,M_\odot$ неустойчивость относительно раскачки колебаний быстро развиваается и звезда может разрушиться. Последующие расчеты обнаружили сильную стабилизацию этих колебаний в нелинейном режиме.