ляя члены $\sim\alpha^3$, β^3, Δ^3 для учета затухания в первом неисчезающем члене. В результате элементарных выкладок получаем

$$x_* = 1 + 2\Delta - \frac{5}{3}\Delta^2 - \frac{2}{3}\delta\Delta^2\lambda.$$

$$x_{**} = 1 - 2\Delta + \frac{17}{3}\Delta^2 + \frac{4}{3}\delta\Delta^2\lambda, \qquad (49.22)$$

$$\frac{r^{(1)}_{2,\min}}{r^{(0)}_{2,\min}} = 1 + \frac{2}{3}\delta\Delta^2\lambda.$$

С учетом того, что $\Delta = \dfrac{r_{2,0}}{r_{2,\min}} - 1$, и третьего соотношения (49.22), получим уравнение для изменения $r_{2,\min}$, приняв период равным $2\pi/\omega_0$:

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\frac{\delta\omega_0\lambda}{3\pi}\Delta^2 \qquad (49.23)$$

В случае начального условия $\Delta = \Delta_0$ при $t = 0$ имеем

$$\frac{\Delta_0 - \Delta}{\Delta\Delta_0} = \frac{\delta\omega_0\lambda}{3\pi}t. \qquad (49.24)$$

В идеальном фазовом переходе на всей фазе сжатия естественно принять $\delta = \text{const} > 0$ (возможно, $\delta = 1$, как принято в [158, 487]). В случае размазанного перехода δ переменно, ввиду изменения отношения v/a_s в процессе движения, и плавно обращается в нуль вблизи начала и конца фазы сжатия. Качественная зависимость $\delta(t)$ вдоль периода колебаний показана на рис. 133. В реальных объектах скорости фазовых превращений конечны и всегда действует механизм второй вязкости, количественные оценки для которого нужно делать отдельно для каждого типа фазового перехода.

§ 50. Колебательная устойчивость массивных звезд

В настоящее время точно не известна верхняя граница массы звезд в Галактике. Начиная с работы Леду 1941 г. было сделано несколько исследований устойчивости массивных звезд относительно раскачки колебаний на основной радиальной моде [568, 602, 603, 649, 251, 252, 539, 540] в связи с попыткой теоретического определения максимально возможной массы звезды. С ростом массы увеличивается роль лучистого давления и средний показатель адиабаты γ_1 приближается к 4/3. Ввиду того что адиабатическая звезда с $\gamma_1 = 4/3$ нейтральна относительно расширения или сжатия (см. § 34), влияние дестабилизирующих факторов возрастает с ростом массы из-за уменьшения запаса колебательной устойчивости.

Исследование данной проблемы в линейном приближении [568] показало, что в звездах с $M > 65\,M_\odot$ неустойчивость относительно раскачки колебаний быстро развиваеется и звезда может разрушиться. Последующие расчеты обнаружили сильную стабилизацию этих колебаний в нелинейном режиме.

Таблица 56

Равновесные модели и их пульсационные свойства (из [568])

$M/M_\odot$	$L/L_\odot$	$R/R_\odot$	T_{ef}, K	τ, 10^6 лет	P, сут	$1/K$, годы
218,3	4,36 (6)	20,5	5,82 (4)	0	0,546	930
121,1	1,80 (6)	14,3	5,58 (4)	0	0,383	1800
62,7	5,77 (5)	9,71	5,09 (4)	0	0,260	44 000
28,2	1,08 (5)	6,00	4,27 (4)	0	0,157	1400
121,1	2,21 (6)	18,75	5,13 (4)	1,39	0,502	−2200
62,7	7,93 (5)	13,3	4,72 (4)	2,08	0,356	−94
62,7	1,09 (6)	27,6	3,55 (4)	3,68	0,833	−3

а) **Линейный анализ.** В работе [568] рассматривались звезды с массами 28,2, 62,7, 121,1 и 218,3 $M_\odot$ с начальным химическим составом $x_H = 0{,}75$, $x_{He} = 0{,}22$. Равновесные модели строились методом Шварцшильда (§ 22, п. а)). Вычисление периода радиальных пульсаций проводилось с помощью решения уравнения (43.26) с граничным условием (43.29), (43.31). Непрозрачность определялась электронным рассеянием (см. § 7), уравнение состояния – суммой давления полностью ионизованного газа и излучения (1.2), для которого γ_1 дано в (1.20). Характеристики равновесных моделей: массы M, светимости L, эффективные температуры T_{ef}, возрасты τ, периоды радиальных пульсаций P в линейном приближении на основной моде даны в табл. 56 из [568].

Так как характерные времена жизни конвективных элементов на границе конвективного ядра много больше периода колебаний P, влиянием конвекции на устойчивость пренебрегалось. Длина перемешивания предполагалась равной двум характерным шкалам высот по давлению, $\alpha = 2$ в (10.22).

Пульсационная устойчивость при учете изменения светимости, тепловыделения в ядре, генерации акустических волн проверялась методом, аналогичным § 48, п. г. Вычислялась величина

$$K = \frac{1}{2}\frac{L_p}{E_p}, \qquad L_p = L_{pN} - L_{pH} - L_{ps}, \tag{50.1}$$

где

$$E_p = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \int_0^M (\delta r)^2 dm \quad - \tag{50.2}$$

кинетическая энергия пульсаций,

$$L_{pN} = \int_0^M \delta\epsilon \frac{\delta T}{T}\, dm \quad - \tag{50.3}$$

скорость роста энергии пульсаций за счет ядерных реакций со скоростью выделения энергии e,

$$L_{pH} = \int_0^M \frac{d(\delta L)}{dm} \frac{\delta T}{T} dm \quad - \tag{50.4}$$

скорость потери энергии пульсаций за счет излучения с поверхности,

$$L_{ps} = 4\pi R^2 \left[\frac{1}{2}\rho_R \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \left(\frac{\delta r}{r}\bigg|_R R\right)^2\right] \sqrt{\frac{kT_R}{\mu m_u}} \quad - \tag{50.5}$$

скорость потери энергии пульсаций за счет генерации акустических волн. Здесь индекс "R" относится к поверхности звезды. Член в квадратных скобках есть плотность энергии звуковых колебаний у фотосферы. Параметры фотосферы приближенно определялись из соотношений (см. точнее (22.11) – (22.18))

$$T_R = T_{\rm ef}, \qquad k_R \frac{P_R}{g_R} = 2/3, \qquad k_R = 0{,}19\,(1 + x_H),$$

$$g_R = \frac{GM}{R^2}, \qquad P_R = \frac{aT_R^4}{3} + \frac{kT_{\rm ef}}{\mu m_u} \rho_R. \tag{50.6}$$

При положительном K звезда пульсационно неустойчива, при этом K равно обратному времени увеличения энергии пульсаций в e раз. Отрицательные K означают пульсационную устойчивость и $|K|$ есть тогда обратное время затухания колебаний. Условие устойчивости (50.1) при отсутствии последнего члена L_{ps} из (50.5) следует из (48.53), если задаться там малыми синусоидальными колебаниями всех величин и проинтегрировать по периоду пульсаций. Значения δr, δT, δL в (50.2) – (50.5) имеют смысл амплитуд пульсаций.

Результаты исследования устойчивости представлены в последнем столбце табл. 56, откуда видно, что в процессе эволюции звезда может восстановить свою устойчивость. На главной последовательности устойчивыми оказываются звезды с массами $M \leqslant 60\,M_\odot = M_{c0}$. Согласно [568] эта величина зависит от химического состава, так что

$$\mu^2 \frac{M_{c0}}{M_\odot} = \text{const} \approx 20, \qquad \mu \text{ определяется из } (1.7). \tag{50.7}$$

В [649] проведено специальное исследование зависимости M_{c0} от химического состава. Описание конвекции и, что важнее, непрозрачности отличалось от [568] и значения M_{c0} оказались выше при тех же составах. Для построения равновесных моделей в [649] использовался метод Хеньи (см. § 22, п. б). Значения $\mu^2 M_{c0}/M_\odot$ сохранялись примерно постоянными ($= 34$) при изменении $x_{\rm He}$ от 0,28 до 0,4 при том же содержании тяжелых элементов $x_Z = 0{,}02$. Изменение x_Z и входящего в него $x_{\rm CNO}$ приводит к тому, что $\mu^2 M_{c0}/M_\odot = 58$ для $x_{\rm He} = 0{,}384$, $x_Z = 0{,}1$, $x_{\rm CNO} = 0{,}06$. Значение $M_{c0} = 127\,M_\odot$ получается для $x_{\rm He} = 0{,}184$, $x_Z = 0{,}0201$, $x_{\rm CNO} = 0{,}012$.

Если нормировать амплитуду пульсаций, приняв $\left.\dfrac{\delta r}{r}\right|_R = 1$, то результаты расчетов [568] можно представить в виде интерполяционных формул

$$\frac{L_p}{L} = 0{,}10\left(\frac{M}{M_\odot} - 1\right) - 2\frac{\tau}{10^6}, \qquad (50.8)$$

$$\frac{E_p}{L} = 3750 \text{ лет} \cdot \exp\left[-0{,}007\left(\frac{M}{M_\odot} - 60\right) - 1{,}2\frac{\tau}{10^6}\right],$$

где τ – время эволюции в годах. Величина K, определяемая из (50.8), не зависит от нормировки. Из (50.8) следует, что через время τ_{cr}, при котором K обращается в нуль –

$$\tau_{\text{cr}} = 0{,}05\left(\frac{M}{M_\odot} - 60\right) \cdot 10^6 \text{ лет} \quad – \qquad (50.9)$$

звезда станет пульсационно устойчивой. Величину τ_{cr} следует сравнить с $1/K$ из табл. 56. Устойчивость успевает восстановиться, если за время τ_{cr} энергия колебаний вырастет не очень значительно. Величина

$$N(\tau) = \int_0^\tau K d\tau \qquad (50.10)$$

имеет смысл числа, стоящего в экспоненте, которая задает рост энергии пульсаций. Если принять, что устойчивость восстановится при $N(\tau_{\text{cr}}) \leqslant 9$, то массу устойчивых звезд можно оценить в $M_{\text{cr}} = 65\, M_\odot$. Из расчетов [568] получено, что $N = 5{,}7$ для $M = 64\, M_\odot$ и $N = 13{,}7$ для $M = 66\, M_\odot$.

В [568] отмечено, что полученная таким образом величина M_{cr} оказывается существенно меньше наблюдаемой массы некоторых звезд, достигающей $\sim 95\, M_\odot$ (например, звезда ζ^1 Scorpi). Для устранения этого противоречия в [568] предполагается, что в звездах с массами $65-95\, M_\odot$ развитие пульсационной неустойчивости приведет не к полному развалу звезды, а к интенсивному истечению вещества с поверхности, приводя к появлению звезд со спектрами типа P Cyg, наблюдаемых у очень массивных звезд*). В [568] сделано также предположение, что с ростом амплитуды пульсаций появляется нелинейная стабилизация колебаний, ведущая к ограничению их амплитуды конечной величиной задолго до разрушения звезды. Потеря массы звездой может осуществляться в состоянии квазистационарных колебаний с конечной амплитудой.

б) Нелинейные колебания. Для исследования нелинейных колебаний массивных звезд в [649] использовались уравнения гидродинамики (35.1)

---

*) Спектр звезды относят к типу P Cyg, если она имеет линии с поглощением у фиолетового конца и эмиссией, приблизительно симметричных относительно центральных частот. Они характерны для звезд с мощным истечением, характерным представителем является звезда P Cyg [197].

с уравнением энергии в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial (r/\rho)}{\partial t} = F\left(\epsilon - \frac{\partial L}{\partial m}\right). \qquad (50.11)$$

Ввиду того что период пульсаций (P) много меньше времени роста в e раз их амплитуды ($\sim 1/K$), необходимо искусственно сблизить эти времена для возможности численного исследования роста амплитуды в нелинейном режиме. Эту роль выполняет множитель F в (50.11). Он выбирается примерно равным отношению $(PK)^{-1}$. Введение его эффективно уменьшает теплоемкость вещества звезды и, соответственно, увеличивает инкремент тепловой неустойчивости. Расчеты нелинейных пульсаций звезды с массой $100 M_\odot$, $x_{He} = 0{,}384$, $x_Z = 0{,}20$, неустойчивой в линейном приближении, проводились для $F = 4{,}133 \cdot 10^5$. Получено, что за примерно десять периодов поверхностная амплитуда пульсаций $\delta r/r$ выросла от 0,1 до 4. При этой амплитуде колебания застабилизировались. В процессе роста амплитуды и на стадии нелинейных колебаний с постоянной амплитудой потери массы получено не было. Относительная амплитуда колебаний в нелинейном режиме быстро падает вглубь звезды. В [649] отмечено, что при учете уноса энергии за счет образования ударных волн в атмосфере звезды амплитуда нелинейных колебаний может быть существенно меньше. Вычисления с большим F сильно занижают диссипацию энергии колебаний ударными волнами.

В работах [602, 603] для исследования нелинейных пульсаций также использовалось уравнение энергии в виде (50.11) с большим F, но в дополнение к этому исследовалась зависимость стационарной амплитуды от F при более реалистическом учете диссипации энергии колебаний ударными волнами. Расчеты были проделаны для звезд с массами 100, 1000, 10 000 $M_\odot$. Получено, что во всех случаях устанавливается стационарное колебательное состояние конечной амплитуды типа предельного цикла, причем амплитуда падает с уменьшением F. Это связано с увеличением роли диссипации ударными волнами. Для реального случая $F = 1$ оценка амплитуды пульсаций была сделана в [603] по критерию (48.53), в котором изменение параметров по нелинейному циклу приближенно задавалось на основе численных расчетов. Учитывалась также диссипация за счет образования ударных волн в атмосфере. Стационарная амплитуда пульсаций при $F = 1$ на поверхности составила $\delta r/r \mid_R = 0{,}085$, 0,102, 0,09 для $M = 100, 1000, 10\,000 M_\odot$ соответственно. Результаты численных расчетов, сделанных в [603] указывают на то, что радикальные моды более высокого порядка всегда затухают.

Методика счета, примененная в [602, 603, 649] не позволила определить темп потери массы на стадии нелинейных пульсаций, а получить лишь верхний предел $\dot{M} < 0{,}03 M_\odot$/год. Исследование нелинейных колебаний другим методом, позволяющим учитывать слабую потерю массы, сделано в [251, 252]. Вместо использования коэффициента F в (5.11), для ускорения счета применялось искусственное увеличение энергии колебаний на каждом шагу по времени путем умножения скорости $v(m, t)$ на множитель немного больше единицы. Для контроля проводился подсчет изменения истинной энергии колебаний за каждый период по формуле, аналогичной (48.53). Физические свойства вещества в этих работах брались, как в [568] и значения M_{c0} в этих работах почти совпадают. Исследование колебаний звезд с массами от 60 до 600 $M_\odot$ показало, что при $M < 100\,M_\odot$ колебания звезд практически не приводят к потере массы. Звезды с массами $M = 100 - 200\,M_\odot$ теряют массу в процессе колебаний, но за время жизни на главной последовательности эта потеря не очень существенна ($\leqslant 3\cdot 10^{-5}\ M_\odot$/год). Если же масса звезды превышает $300\,M_\odot$, то существенная часть массы звезды теряется на стадии водородного горения.

В последующих работах [539, 540] как в аналитических, так и в численных расчетах была получена генерация из-за неустойчивости нескольких радиальных мод колебаний, что приводит к изрезанности кривой предельного цикла $u(t)$. В то же время у звезд с массами от 70 до 210 $M_\odot$ на стадии нелинейных пульсаций не было получено истечения вещества с поверхности. В [540] отмечается, что отсутствие возбуждения гармоник в работах [568, 603], возможно, связано с выбором слишком большого значения F при численных расчетах. Истечения вещества в [540] получено не было. Возможно, что, как и в [603], отсутствие истечения связано с грубостью пространственной сетки у поверхности звезды.

§ 51. О переменных звездах

Наблюдения показывают, что все звезды в большей или меньшей степени меняют свой блеск, т. е. являются переменными. Открытие солнечных пульсаций в области периодов ~ 5 мин привели к рождению новой области астрофизики – гелиосейсмологии. К настоящему времени наблюдалось более тысячи частот собственных колебаний Солнца, измеренных с точностью до четвертого-пятого знака [83а]. Этим колебаниям соответствуют небольшие амплитуды переменности блеска $\Delta m = 10^{-5} \div 10^{-6}$ и они относятся к высоким акустическим P-модам с $n = 11 \div 33$ и различными значениями l, меняющимися от нуля до нескольких сотен. По m наиболее благоприятны для наблюдений значения $m = 0, \pm l$.

Экспериментальные значения собственных частот сопоставляются с теоретическими, которые в области больших n, l представимы в виде [83а]

$$\frac{\omega_{nl}}{2\pi} \approx \left(n + \frac{l}{2} + \epsilon_p\right)\Delta\nu - \frac{l(l+1) + \delta_p}{n + \dfrac{l}{2} + \epsilon_p} A_p \Delta\nu, \tag{50.12}$$

где

$$\Delta\nu = \left(2\int_0^R \frac{dr}{c_s}\right)^{-1}, \quad \epsilon_p, \quad \delta_p, \quad A_p \; - \tag{50.13}$$

константы, чувствительные к строению Солнца.

В первом приближении частоты колебаний с одинаковыми $n + l/2$ совпадают. При фиксированном l частоты эквидистантны по n с интервалом $\Delta\nu$. Отклонение от такого вырождения описывается вторым членом