

ДОПОЛНЕНИЕ I

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящем дополнении без доказательств формулируются те основные предложения, касающиеся дифференциальных уравнений, которые использованы в тексте книги. Доказательство этих теорем читатель может найти, например, в [103, 113, 129].

Пусть дана система дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = P_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = P_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{array} \right\} \quad (\text{Д.1})$$

(n — любое целое число), где функции $P_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ определены в некоторой открытой области R , непрерывны в этой области и имеют непрерывные частные производные по x_1, x_2, \dots, x_n . Это требование, во всяком случае, выполнено; когда правые части — аналитические функции переменных x_1, x_2, \dots, x_n, t .

Теорема I (о существовании и единственности решения).

Какую бы точку $M_0(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ области R мы ни взяли, существуют содержащий t_0 интервал значений t ($t_1 < t < t_2$) и одна и только одна система функций

$$x_k = \varphi_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

определенная на этом интервале, для которой удовлетворяются следующие условия:

а) $\varphi_k(t_0) = x_k^0$;

б) при всех t ($t_1 < t < t_2$) точка $M[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]$ принадлежит области R ;

в) $\varphi_k(t) = P_k[t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]$ при всех $t_1 < t < t_2$, т. е. система функций удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (Д.1);

г) какую бы замкнутую область \bar{R}_1 , целиком лежащую в области R , мы ни взяли, найдутся значения t' и t'' ($t_1 < t' < t_2$ и $t_1 < t'' < t_2$)

такие, что точки $M_1 [t', \varphi_1(t'), \dots, \varphi_n(t')]$ и $M_2 [t'', \varphi_1(t''), \dots, \varphi_n(t'')]$ лежат вне \bar{R}_1 .

Можно показать, что интервал $t_1 < t < t_2$ значений t , фигурирующий в теореме I, в силу условия г) является «максимально возможным интервалом определения решения» в следующем смысле: не существует интервала (t_1^*, t_2^*) значений t , содержащего интервал (t_1, t_2) , на котором были бы определены функции $x_k = \varphi_k^*(t)$, удовлетворяющие условиям а), б) и в) настоящей теоремы, и, следовательно, совпадающие на интервале (t_1, t_2) с функциями $x_k = \varphi_k(t)$.

Условие г), которое характеризует тот факт, что интервал (t_1, t_2) является максимально возможным, часто выражают также следующими словами: «решение системы может быть продолжено до границы области R ».

В настоящей книге под решением системы вида (Д.1) всегда подразумевается решение, определенное на максимально возможном промежутке значений t . При этом в настоящей книге решение обычно бывает определено при всех значениях t , т. е. при значениях t в интервале $-\infty < t < +\infty$.

В пространстве t, x_1, x_2, \dots, x_n функции $x_k = \varphi_k(t)$ определяют *интегральную кривую*. В силу теоремы I через каждую точку $M(t_0, x_1^0, x_n^0)$ области R проходит одна и только одна интегральная кривая.

Для того чтобы в явной форме отметить тот факт, что решение зависит от начальных значений t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 , его записывают также в виде:

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0). \quad (\text{Д.2})$$

По самому смыслу этой записи мы, очевидно, имеем:

$$\varphi_k(t_0, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \equiv x_k^0.$$

Если t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 рассматриваются как произвольные параметры (но, очевидно, такие, что точка $M(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ принадлежит области R), то систему функций (Д.2) называют *общим решением*. Если t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 фиксированы, то систему функций (Д.2) называют *частным решением* или просто *решением* (так что «решение» и частное решение имеют один и тот же смысл). Для него имеет место следующая теорема.

Теорема II (о непрерывной зависимости от начальных значений).

Пусть

$$x_k = \varphi_k(t, t^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

— какое-нибудь решение системы (Д.1), определенное при всех значениях $t_1 < t < t_2$, и пусть τ_1 и τ_2 — любые числа, принадлежащие этому интервалу, причем $\tau_1 < \tau_2$. Тогда при любом $\epsilon > 0$ можно

указать такое $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, \tau_1, \tau_2)$, что для всех t_0, x_1^0, \dots, x_n^0 , для которых

$$|t_0 - t^*| < \delta, \quad |x_i^* - x_i^0| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

решение

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

определенено при всех значениях $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ и при всех этих значениях t выполняются неравенства:

$$|\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) - \varphi_k(t, t^*, x_1^*, \dots, x_n^*)| < \varepsilon.$$

Теорема III.

Если функции $P_i(t, x_1, \dots, x_n)$ в правых частях системы (Д.1) имеют непрерывные частные производные по переменным x_1, x_2, \dots, x_n , то функции

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

имеют непрерывные частные производные по переменным x_1^0, \dots, x_n^0 ¹⁾. Эти частные производные вместе с самими функциями φ_k удовлетворяют системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_k}{dt} &= P_k(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} &= \frac{\partial P_k}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i^0} + \dots + \frac{\partial P_k}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i^0}, \\ i &= 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

В случае, когда правые части системы (Д.1) — аналитические функции своих переменных, справедлива следующая теорема.

Теорема IV.

Если функции $P_k(t, x_1, \dots, x_n)$ — аналитические функции переменных x_1, x_2, \dots, x_n , то функции

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

являются аналитическими функциями своих аргументов в окрестности всякой системы значений, для которой они определены.

Теоремы I—IV, в частности, используются при рассмотрении функций последования. Именно, принимая во внимание метод построения функций последования, нетрудно видеть в случае, когда правые части динамической системы — аналитические функции, что в силу теоремы IV функция последования тоже является аналитической функцией. В случае, когда правые части имеют непрерывные производные по x и y , из теорем I, II и III следует, что функция

¹⁾ Когда правые части системы (Д.1) имеют непрерывные частные производные по переменным x_i до порядка $k \geq 1$, то решение этой системы имеет непрерывные частные производные по x_i^0 также до порядка k . Однако случай, когда $k > 1$, не используется в настоящей книге.

последовательность непрерывна и имеет непрерывную производную (см. § 7 гл. V).

Предположим, что наряду с системой (Д.1)

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

рассматривается «измененная» система

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n) + p_k(t, x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (\text{Д.3})$$

где $p_k(t, x_1, \dots, x_n)$ — функции, определенные в той же области R , что и функции P_k , непрерывные в этой области и имеющие непрерывные частные производные по переменным x_1, x_2, \dots, x_n .

В частности, предположим, что правые части заданной системы зависят от некоторого параметра μ , т. е. система имеет вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (\text{Д.4})$$

Пусть эта система рассматривается при некотором частном значении $\mu = \mu_0$, т. е. рассматривается система

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu_0) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (\text{Д.5})$$

и наряду с ней система (Д.4) рассматривается при каком-нибудь не равном μ_0 значении μ . Мы можем считать в этом случае, что система (Д.4) при $\mu \neq \mu_0$ является измененной системой по отношению к системе (Д.5), и можем считать, что система (Д.4) имеет вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu_0) + p_k(t, x_1, \dots, x_n),$$

где

$$p_k(t, x_1, \dots, x_n) = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu) - P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu_0).$$

Теорема V (о непрерывной зависимости решения от изменения правой части и начального значения).

Пусть

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

— решение системы (Д.1), определенное при всех значениях t

$$t_1 < t < t_2 \quad (t_1 < t_0 < t_2),$$

и пусть τ_1 и τ_2 — какие-нибудь числа, удовлетворяющие неравенству $t_1 < \tau_1 < t_0 < \tau_2 < t_2$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при условии:

$$|p_k(t, x_1, \dots, x_n)| < \delta \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

в области R и

$$|x_i^0 - x_i^*| < \delta \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

решение системы (Д.3), соответствующее начальным значениям t_0 , x_1^*, \dots, x_n^* ,

$$x_k = \varphi_k^*(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*),$$

определенное при всех значениях t , $t_1 \leq t \leq t_2$, и при этих значениях t выполняются неравенства

$$|\varphi_k^*(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*) - \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Следствие. Если правые части рассматриваемой системы (Д.4) — непрерывные функции параметра μ , то и в решении этой системы

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$$

функции $\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$ — непрерывные функции μ .

Предположим, что функции $P_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $P_k(t, x_1, \dots, x_n) + p_k(t, x_1, \dots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные по переменным x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда в силу теоремы III в решении системы (Д.1) и в решении системы (Д.3) функции $\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ и $\varphi_k^*(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ имеют частные производные по $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i^0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i^0}.$$

Пусть решение системы (Д.1) определено при значениях t : $t_1 < t < t_2$, и пусть τ_1 и τ_2 — какие-нибудь числа, удовлетворяющие неравенствам $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема VI.

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если в области R

$$|p_k(t, x_1, \dots, x_n)| < \delta, \quad \left| \frac{\partial p_k(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| < \delta, \quad |x_i^0 - x_i^*| < \delta \\ (k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n),$$

то решение системы (Д.3)

$$x = \varphi^*(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*)$$

определенное при всех значениях t в интервале $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ и при этих значениях t выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^0} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i^*} \right| < \varepsilon.$$

Если правые части рассматриваемой динамической системы (Д.4)

$P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu)$ и производные $\frac{(\partial P_k)t, x_1, \dots, x_n, \mu}{\partial x_i}$ — непрерывные функции μ и $x_k = \varphi_k(t, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$ — решение этой системы, то производные

$$\frac{\partial \varphi_k(t, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)}{\partial x_k^0}$$

тоже являются непрерывными функциями μ .

Рассмотрим еще случай, когда у системы

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu)$$

правые части являются аналитическими функциями всех аргументов. Для такой системы справедлива следующая теорема.

Теорема VII.

Если функции $P_k(t, x_1, \dots, x_n, \mu)$ — аналитические функции своих аргументов, то и функции

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$$

также являются аналитическими функциями всех своих аргументов в окрестности всякой системы значений $t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0$, для которой они определены.

Следствие. Пусть для значений $t_0, x_1^*, \dots, x_n^*, \mu^*$ решение

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^*, \dots, x_n^*, \mu^*)$$

определен для всех t в интервале $t_1 < t < t_2$ и пусть τ_1 и τ_2 — какие-либо значения, такие, что $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$. Тогда функции

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \mu)$$

могут быть разложены в ряд по степеням $(x_i^0 - x_i^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), сходящийся для всех t и μ , удовлетворяющих неравенствам

$$\tau_1 \leq t \leq \tau_2, |\mu - \mu^*| < \delta \quad (\text{Д.6})$$

и при всех

$$|x_i^0 - x_i^*| < h_0,$$

где h_0 — некоторая постоянная, не зависящая от выбора значений t и μ , удовлетворяющих неравенствам (Д.6). При этом коэффициенты этих рядов являются аналитическими функциями μ при всех μ в интервале

$$|\mu - \mu^*| < \delta.$$