

ДОПОЛНЕНИЕ II

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАЗБИЕНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА НА ТРАЕКТОРИИ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛОГРАФА

Изучение колебательных процессов в тех или иных системах путем рассмотрения разбиения соответствующего фазового пространства на траектории является не только теоретическим (математическим), но и экспериментальным методом. Применяя электронный осциллограф, можно наблюдать не только форму колебаний, но и движение изображающей точки по фазовой плоскости x, y . Для этого нужно на одну пару отклоняющих пластин трубки осциллографа подать (непосредственно или через соответствующий усилитель) напряжение, пропорциональное переменной x (например, напряжение на конденсаторе колебательного контура лампового генератора), а на другую пару пластин — напряжение, пропорциональное переменной y (пропорциональное, например, силе тока в колебательном контуре). Тогда положение светящейся точки на экране осциллографа будет в точности соответствовать положению изображающей точки на фазовой плоскости. Если состояние системы будет изменяться, то соответствующим образом будет изменяться и положение светящейся точки на экране, светящаяся точка будет вычерчивать на экране фазовую траекторию (точнее, положительную полутраекторию), соответствующую данному начальному состоянию. Эту траекторию можно сфотографировать или наблюдать визуально, если трубка осциллографа имеет длительное послесвечение экрана.

Если же применяется осциллограф с малым послесвечением экрана трубки, то для получения визуально наблюдаемых фазовых траекторий нужно, чтобы один и тот же кусок фазовой траектории прочерчивался на экране осциллографа многократно и достаточно часто (не реже 10—15 раз в секунду). В известных случаях это условие соблюдается само собой: именно, когда мы наблюдаем периодический процесс. Тогда изображающая точка (светящаяся точка на экране) снова и снова возвращается в исходное положение и вычерчивает одну и ту же замкнутую кривую — предельный цикл. Таким образом, при помощи электронного осциллографа можно непосредственно воспроизвести предельный цикл на фазовой плоскости. Но представляет интерес получить на экране осциллографа весь фазовый портрет, который содержит не только предельные циклы, но и все другие фазовые траектории, не соответствующие периодическим движениям. Для этого необходимо обеспечить возвращение изображающей точки в исходное положение при помощи какого-либо специального приспособления. Это приспособление должно состоять в том, чтобы, после того как «изображающая точка» прочертила весь экран или достигла стационарного состояния, она снова вернулась в исходное

положение; для этого необходимо возвратить систему к тем же начальным условиям.

Для примера опишем схему, разработанную В. Бовшеверовым [140] для «зарисовки фазовых портретов» ламповых генераторов. Схема эта приведена на рис. 599. В емкостную ветвь колебательного контура генератора включено небольшое сопротивление R_2 , и падение напряжения на нем, пропорциональное силе тока i в емкостной ветви, подается на одну пару отклоняющих пластин трубки осциллографа.

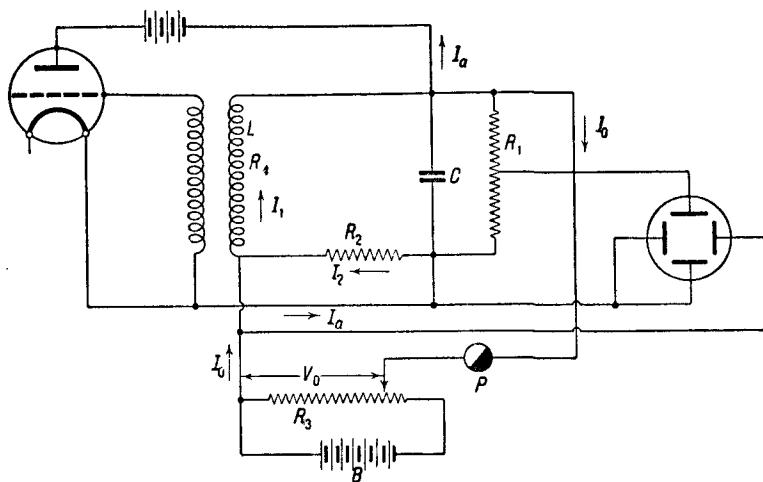


Рис. 599.

На другую пару пластин трубки подается напряжение u на конденсаторе C (через высокоомный потенциометр R_1). Сопротивление R_1 выбирается настолько большим, а сопротивление R_2 — настолько малым, чтобы они не изменяли существенно затухание колебаний в колебательном контуре, т. е. чтобы их влиянием на колебательный контур можно было пренебречь.

Для задания различных начальных условий параллельно колебательному контуру включается низкоомный потенциометр R_3 , к которому присоединена батарея B . Потенциометр присоединен к контуру через выключатель P , который периодически разрывает цепь на небольшие промежутки времени. Пока выключатель замкнут, малое сопротивление R_3 сильно шунтирует контур, так что даже при самой сильной обратной связи он остается апериодически затухающим. За время замкнутого положения выключателя в контуре успевают установиться постоянный ток и постоянное напряжение на конденсаторе C . Значения токов и напряжений, которые устанавливаются в схеме, зависят от напряжения V_0 на выходе потенциометра R_3 . Эти постоянные значения могут быть определены точно, но особенно

легко найти их приближенные значения, воспользовавшись тем, что сопротивление катушки индуктивности $R_4 \ll R_1$, а также $R_2 \ll R_1$. В силу этих соотношений почти весь ток I_0 от потенциометра течет через катушку индуктивности L . То же самое относится и к анодному току лампы I_a . Поэтому $I_2 \ll I_0$ и сила тока в индуктивной ветви контура $I_1 \approx I_0 + I_a$. С другой стороны, в ветви, состоящей из сопротивлений R_1 и R_2 , почти все напряжение V_0 падает на сопротивлении R_1 и, значит, приближенно напряжение на конденсаторе $U_0 \approx V_0 = R_1(I_0 + I_a)$.

В момент размыкания выключателя P происходит следующее: цепь тока I_0 размыкается, но I_1 — ток в цепи индуктивности — не может измениться скачком. Следовательно, в цепи сопротивления R_2 ток должен измениться скачком от нулевого значения до I_0 , так как только при этом условии ток I_1 не изменится при размыкании выключателя. Напряжение же на конденсаторе не может изменяться скачком и останется прежним (примерно равным V_0). Таким образом, в начальный момент времени (непосредственно после размыкания выключателя P) напряжение на конденсаторе будет равно V_0 , а в емкостной ветви будет протекать ток $I_0 = \frac{V_0}{R_1} - I_a$. Так как при выключении P отсоединится малое сопротивление R_3 , шунтирующее контур, то дальше в схеме будет протекать процесс, определяемый начальными условиями, и мы получим на экране осциллографа кусок соответствующей положительной полутраектории лампового генератора. Замыкание выключателя P снова шунтирует колебательный контур малым сопротивлением R_3 , и система весьма быстро приходит в исходное состояние ($u = V_0$, $i = I_0$). При новом размыкании процесс будет опять начинаться из тех же начальных условий и т. д. На экране осциллографа «представляющая» точка практически мгновенно будет возвращаться в исходное положение, при размыкании выключателя P — снова прочерчивать ту же самую фазовую траекторию и т. д.¹⁾. Изменяя V_0 , мы можем изменять начальные условия и получать изображения на экране осциллографа различных фазовых траекторий.

Описанным способом были сняты «фазовые портреты» лампового генератора, приведенные на рис. 600. Эти фотографии²⁾ соответствуют четырем различным значениям обратной связи в ламповом генераторе при жестком режиме. На рис. 601 эти значения обратной связи обозначены соответствующими буквами. Рис. 600, a дает

¹⁾ Для периодически повторяющихся замыканий и размыканий цепи потенциометра R_3 можно применить круговой выключатель, вращающийся равномерно при помощи электромотора, или же быстродействующее (например, поляризованное) реле, обмотка которого питается переменным напряжением поддающей (звуковой) частоты.

²⁾ На всех приведенных фотографиях движение «представляющей точки» происходит против часовой стрелки.

фазовый портрет в отсутствии обратной связи — обычную картину для колебательной системы со сравнительно большим затуханием.

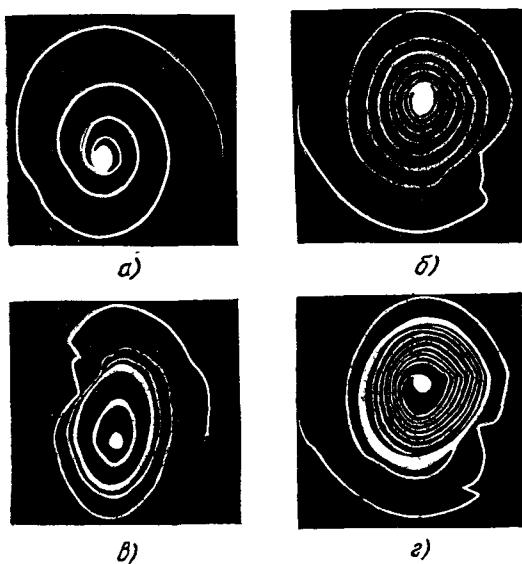


Рис. 600.

Рис. 600, б соответствует наличию обратной связи, еще не достигающей критического значения. Фазовый портрет дает ту же картину, характерную для осциллятора с меньшим, чем в первом случае, затуханием

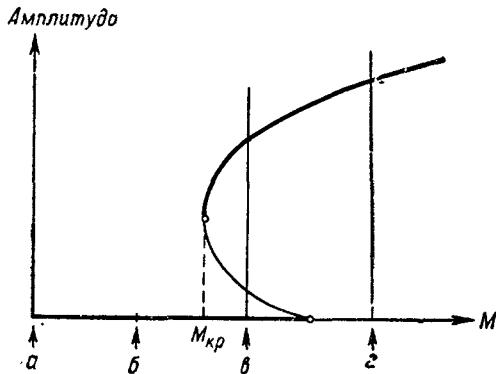


Рис. 601.

колебаний (затухание меньше из-за наличия обратной связи). Рис. 600, в дает фазовый портрет лампового генератора с обратной связью,

превышающей кригическую, но еще не дающей самовозбуждения. Фазовый портрет содержит два предельных цикла, причем внешний цикл устойчив, а внутренний неустойчив. Для того чтобы сфотографировать неустойчивый предельный цикл, поступали следующим образом. Начальные условия подбирались так, чтобы они соответствовали некоторой точке, лежащей как раз на неустойчивом предельном цикле. Так как у самого предельного цикла фазовые траектории отходят от него очень медленно, то за время одного движения (за время разомкнутого выключателя P) представляющая точка не успевает сколько-нибудь заметно отойти от предельного цикла.

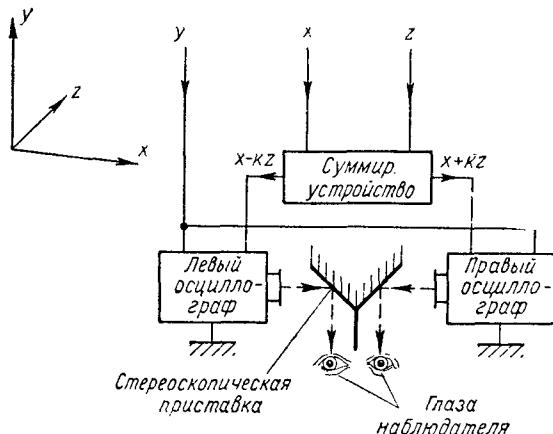


Рис. 602.

В конечном счете на фотографии получается изображение неустойчивого предельного цикла. Необходимо иметь в виду, что фотография на рис. 600, в (так же как и следующая, на рис. 600, г) представляет собой, в сущности, комбинацию из двух фотографий, соответствующих двум различным начальным состояниям генератора: одному, лежащему вне устойчивого предельного цикла, и другому, лежащему как раз на неустойчивом предельном цикле. Рис. 600, г соответствует сильной обратной связи, при которой имеет место самовозбуждение генератора и на фазовой плоскости существует только один, и притом устойчивый, предельный цикл. Этот портрет, как и предыдущий, получен двукратным фотографированием, т. е. фотографированием двух фазовых траекторий, одна из которых начинается вне предельного цикла, а другая — внутри него.

Фазовые траектории в трехмерном фазовом пространстве можно наблюдать при помощи двух осциллографов и стереоскопической приставки. Блок-схема такой установки изображена на рис. 602. Напряжения, пропорциональные трем координатам x , y , z фазового пространства, подаются с исследуемой системы на простое суммирующее

устройство и на осциллографы; напряжение, пропорциональное координате y , подается непосредственно на оба осциллографа — на отклоняющие по вертикали пластины трубок осциллографов, а напряжения, пропорциональные координатам x и z , подаются на суммирующее устройство, на одном выходе которого получается напряжение, пропорциональное $x - kz$, а на другом — напряжение, пропорциональное $x + kz$. Напряжения с выходов суммирующего устройства подаются соответственно на отклоняющие по горизонтали пластины трубок левого и правого осциллографов. В итоге на экранах осциллографов получаются изображения фазовых траекторий в проекциях для левого и правого глаза, которые при одновременном наблюдении через стереоскопическую приставку дают фазовые траектории, видимые (из-за стереоэффекта) в пространстве. Для многократно повторяемого задания одних и тех же начальных условий в исследуемой системе применяется прерыватель, аналогичный примененному в изложенной выше работе В. Бовшеверова¹⁾.

ДОПОЛНЕНИЕ III

НЕКОТОРЫЕ ТРИГНОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z.$$

$$\sin^3 z = \frac{3}{4} \sin z - \frac{1}{4} \sin 3z.$$

$$\sin^4 z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2z + \frac{1}{8} \cos 4z.$$

$$\sin^5 z = \frac{5}{8} \sin z - \frac{5}{16} \sin 3z + \frac{1}{16} \sin 5z.$$

$$\sin^6 z = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2z + \frac{3}{16} \cos 4z - \frac{1}{32} \cos 6z.$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z.$$

$$\cos^3 z = \frac{3}{4} \cos z + \frac{1}{4} \cos 3z.$$

$$\cos^4 z = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2z + \frac{1}{8} \cos 4z.$$

¹⁾ Подобная установка была разработана на кафедре теории колебаний Горьковского университета (студентом-дипломником Г. Г. Денисовым) в 1952 г. Заметим, что примененное линейное преобразование координат не учитывает уменьшения угловых размеров объектов при их удалении от наблюдателя; поэтому в этой установке фазовые траектории наблюдаются с некоторым искажением перспективы.