ГЛАВА I

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Линейная система без трения (гармонический осциллятор)

Мы начнем наше рассмотрение с простейшей автономной колебательной системы, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.1}$$

и которую в физике называют *гармоническим осциллятором.*

Примером такой системы является (при соответствующих предположениях), например, тело массы m, которое может совершать горизонтальные движения вдоль стержня под действием двух пружин (рис. 9). Чтобы рассмотрение этой системы привело к интересующему нас случаю, сделаем следующие упрощающие предположения[1]). Предположим, во-первых, что силы, с которыми действуют пружины на тело, пропорциональны его смещению x относительно положения равновесия. В действительности это с некоторой степенью точности выполняется только при достаточно малых смещениях (только при малых деформациях пружина подчиняется закону Гука). Во-вторых, мы будем предполагать, что система при движении не испытывает трения (нет трения ни о воздух, ни о поддерживающий стержень, пружины не обладают внутренним трением). Это второе предположение об отсутствии трения в системе, конечно, еще с меньшей степенью точности выполняется в реальных физических системах. При сделанных предположениях

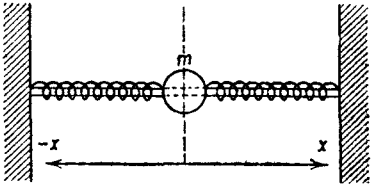

Рис. 9.

[1]) Мы не упоминаем и не будем упоминать более о других упрощающих предположениях, о которых шла речь во Введении.

движение такой системы отображается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{1.2}$$

где k — положительный коэффициент, зависящий от упругости пружин. Полагая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, получим уравнение гармонического осциллятора (1.1).

Примером электрической системы этого типа может служить колебательный контур, состоящий из емкости C и самоиндукции L (рис. 10); такие контуры мы будем для краткости называть «томсоновскими» [1]). Чтобы прийти к случаю линейной системы без трения, мы должны, конечно, идеализировать свойства этого контура. Прежде всего надо предположить, что в контуре не происходит потерь энергии, т. е. что соответствующие проводники не обладают сопротивлением, что в диэлектрике энергия также не рассеивается и, наконец, что отсутствует излучение электромагнитной энергии. Эти предположения никогда не осуществляются с достаточной точностью в реальных системах, о чем свидетельствует хотя бы тот факт, что во всяком контуре всегда происходит более или менее сильное, но во всяком случае заметное (если подождать достаточно долго) затухание колебаний. Идеализируя колебательный контур как систему без потерь энергии, мы уже не можем передать одну из наиболее типичных черт всякой реальной системы — затухание собственных колебаний; и в этом смысле предположение об отсутствии потерь энергии является гораздо более далеко идущей идеализацией, чем предположение о линейности контура, которое в реальных системах довольно хорошо соблюдается. Однако такая идеализация позволяет все же достаточно удовлетворительно ответить на некоторые основные вопросы теории колебаний, например на вопросы о частоте и форме собственных колебаний (конечно, только в тех случаях, когда затухание колебаний достаточно мало). Кроме того, надо считать, что емкость C конденсатора не зависит от его заряда, а индуктивность L катушки — от силы тока, протекающего через нее. При сделанных предположениях электрическая система также подчиняется уравнению вида (1.1); именно, если обозначить заряд конденсатора через q, то получим:

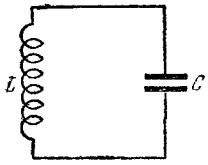

Рис. 10.

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0. \tag{1.3}$$

Обозначая $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, снова приходим к уравнению гармонического осциллятора (1.1).

---

[1]) Целесообразность этого специального термина выяснится в дальнейшем, когда нам придется рассматривать другие системы, «нетомсоновские», в которых сопротивление играет преобладающую роль.

Напомним теперь характерные свойства движений гармонического осциллятора. Общее решение дифференциального уравнения (1.1), как известно, имеет вид

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \tag{1.4}$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Если для $t=0$ $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, то

$$x = x_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t;\quad \dot{x} = -x_0\omega_0\sin\omega_0 t + \dot{x}_0\cos\omega_0 t. \tag{1.5}$$

Это же решение может быть также записано в виде

$$x = K\cos(\omega_0 t + \alpha);\quad \dot{x} = -K\omega_0\sin(\omega_0 t + \alpha), \tag{1.6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &K = +\sqrt{A^2+B^2} = +\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \\ &\left(\cos\alpha = \frac{x_0}{K},\ \sin\alpha = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 K}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Мы видим, что зависимость смещения или заряда от времени (осциллограмму колебаний) можно изобразить в виде хорошо известной «синусоиды» (рис. 11). Для характеристики такого «синусоидального» или гармонического колебания нужно задать три величины: K — максимальное отклонение, или *амплитуду* колебаний, ω_0 — число колебаний в 2π секунд, или *угловую частоту*, и α — так называемую *начальную фазу* колебаний, которая играет очень существенную роль, когда мы имеем дело сразу с несколькими процессами. Действительно, так как выбор фазы колебания вполне определяет начальный момент отсчета времени, то ее нельзя выбирать произвольно, если начальный момент отсчета времени уже задан каким-либо другим процессом. Но фаза колебаний не играет какой-либо физической роли, когда мы имеем дело только с одним «изолированным» процессом. Итак, гармонический осциллятор совершает периодические синусоидальные (гармонические) движения (отсюда его название). Колебательное движение не возникает лишь в случае $x_0=0$ и $\dot{x}_0=0$, т. е. когда осциллятор в начальный момент находится в состоянии равновесия; в этом случае он продолжает и дальше в нем оставаться. Амплитуда и фаза гармонического колебательного движения определяются начальными условиями. Угловая частота, а значит, и период процесса не зависят от начальных условий и определяются параметрами колебательной системы.

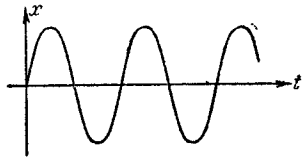

Рис. 11.

Формулы (1.5) или (1.6) и (1.7) дают точный количественный ответ на вопрос, как происходят движения в системе, определяемой уравнением (1.1). Они позволяют определять «будущее из настоящего», т. е. позволяют вычислять значения x и $\dot{x}$ для каждого момента времени t, если они известны для момента времени $t=0$.

§ 2. Понятие о фазовой плоскости. Представление совокупности движений гармонического осциллятора на фазовой плоскости

1. Фазовая плоскость. Положим $\dot{x}=y$ и будем изучать движение гармонического осциллятора, изображая это движение на плоскости x, y, где x и y — прямоугольные декартовы координаты. Каждому состоянию нашей системы, каждой паре значений координаты x и скорости y соответствует точка на плоскости x, y. Обратно, каждой точке на плоскости x, y соответствует одно и только одно состояние системы. Плоскость x, y носит название плоскости состояний или, иначе, *фазовой плоскости*; она изображает совокупность всех возможных состояний нашей системы. Каждому новому состоянию системы соответствуют все новые и новые точки фазовой плоскости. Таким образом, изменению состояний системы можно соподчинить движение некоторой точки на фазовой плоскости, которая носит название «изображающей» или «представляющей» точки. Траектория такой изображающей точки называется *фазовой траекторией*; ее не следует смешивать с действительной траекторией движения. Скорость такой изображающей точки называется *фазовой скоростью*; опять-таки ее не следует смешивать с действительной скоростью. *Целой фазовой траекторией* мы будем называть ту кривую, которую описывает изображающая точка за все время своего движения (от $t=-\infty$ до $t=+\infty$)[1].

Зная решение дифференциального уравнения гармонического осциллятора (1.1), нетрудно найти уравнение траектории на фазовой плоскости. Именно, уравнения

$$x=K\cos(\omega_0 t+\alpha);\quad y=-K\omega_0\sin(\omega_0 t+\alpha) \tag{1.6}$$

[1]) Метод отображения состояния системы с n степенями свободы заданием одной точки в пространстве $2n$ измерений уже давно применяется в физике. Это $2n$-мерное пространство состояний (фаз) системы получило название фазового пространства. Отсюда термины «фазовое пространство» и, в частности, «фазовая плоскость» перешли в теорию колебаний.

Для целей изучения динамики колебательных систем фазовое пространство было впервые применено Леотэ [172], который исследовал работу некоторого устройства автоматического регулирования путем построения в фазовом пространстве этого устройства интегральных кривых и предельных циклов (не давая им этого названия; он, по-видимому, не был знаком с опубликованной несколько раньше работой Пуанкаре [108], в которой предельные циклы впервые появились в математике). К сожалению, замечательные работы Леотэ были впоследствии почти полностью забыты.