

Формулы (1.5) или (1.6) и (1.7) дают точный количественный ответ на вопрос, как происходят движения в системе, определяемой уравнением (1.1). Они позволяют определять «будущее из настоящего», т. е. позволяют вычислять значения x и \dot{x} для каждого момента времени t , если они известны для момента времени $t = 0$.

§ 2. Понятие о фазовой плоскости. Представление совокупности движений гармонического осциллятора на фазовой плоскости

1. Фазовая плоскость. Положим $\dot{x} = y$ и будем изучать движение гармонического осциллятора, изображая это движение на плоскости x, y , где x и y — прямоугольные декартовы координаты. Каждому состоянию нашей системы, каждой паре значений координаты x и скорости y соответствует точка на плоскости x, y . Обратно, каждой точке на плоскости x, y соответствует одно и только одно состояние системы. Плоскость x, y носит название плоскости состояний или, иначе, *фазовой плоскости*; она изображает совокупность всех возможных состояний нашей системы. Каждому новому состоянию системы соответствуют все новые и новые точки фазовой плоскости. Таким образом, изменению состояний системы можно соподчинить движение некоторой точки на фазовой плоскости, которая носит название «изображающей» или «представляющей» точки. Траектория такой изображающей точки называется *фазовой траекторией*; ее не следует смешивать с действительной траекторией движения. Скорость такой изображающей точки называется *фазовой скоростью*; опять-таки ее не следует смешивать с действительной скоростью. *Целой фазовой траекторией* мы будем называть ту кривую, которую описывает изображающая точка за все время своего движения (от $t = -\infty$ до $t = +\infty$)¹⁾.

Зная решение линейного дифференциального уравнения гармонического осциллятора (1.1), нетрудно найти уравнение траектории на фазовой плоскости. Именно, уравнения

$$x = K \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad y = -K \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.6)$$

¹⁾ Метод отображения состояния системы с n степенями свободы заданием одной точки в пространстве $2n$ измерений уже давно применяется в физике. Это $2n$ -мерное пространство состояний (фаз) системы получило название фазового пространства. Отсюда термины «фазовое пространство» и, в частности, «фазовая плоскость» перешли в теорию колебаний.

Для целей изучения динамики колебательных систем фазовое пространство было впервые применено Леотэ [172], который исследовал работу некоторого устройства автоматического регулирования путем построения в фазовом пространстве этого устройства интегральных кривых и предельных циклов (не давая им этого названия; он, по-видимому, не был знаком с опубликованной несколько раньше работой Пуанкаре [108], в которой предельные циклы впервые появились в математике). К сожалению, замечательные работы Леотэ были впоследствии почти полностью забыты.

являются параметрическими уравнениями фазовой траектории; исключая из этих уравнений t , найдем координатное уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2 \omega_0^2} = 1. \quad (1.8)$$

Нетрудно видеть, что это — уравнение семейства подобных (с постоянным отношением осей) эллипсов, причем через каждую точку плоскости проходит один и только один эллипс¹), соответствующий определенному значению K , т. е. определенному классу начальных условий, а именно одним и тем же начальным значениям полной энергии системы. Вся плоскость x, y в этом случае заполнена вложенными друг в друга эллипсами, за исключением точки $x = 0, y = 0$; «проходящий» через эту точку эллипс сам вырождается в точку (рис. 12).

Все эти эллипсы представляют собой траектории движения представляющей точки.

Посмотрим, как будет двигаться изображающая точка по какому-нибудь из этих эллипсов. Легко видеть, что при выбранном нами направлении осей координат движение представляющей точки будет всегда, по любой траектории, происходить по часовой стрелке, так как в верхней полуплоскости $\dot{x} = y > 0$ и x увеличивается со временем, а в нижней полуплоскости $\dot{x} = y < 0$ и, следовательно, x уменьшается со временем.

Для того чтобы найти величину фазовой скорости, введем, как это обычно делается в механике, фазовый радиус-вектор

$$\mathbf{r} = i x + j y.$$

В таком случае фазовая скорость изобразится в виде:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = i \dot{x} + j \dot{y}$$

или по (1.6) в виде:

$$\mathbf{v} = i \{-K \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)\} + j \{-K \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha)\}. \quad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что фазовая скорость, за исключением случая $K=0$, никогда не обращается в нуль, так как синус и косинус одновременно никогда не обращаются в нуль.

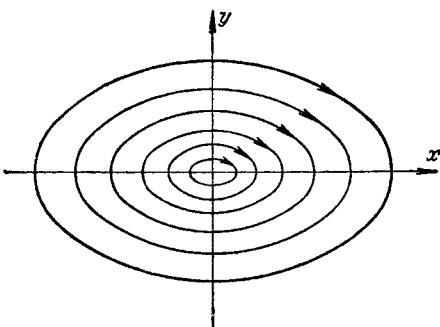


Рис. 12.

¹) В других более сложных примерах может случиться, что исключая время t из параметрических уравнений фазовой траектории, мы получим координатное уравнение не одной траектории, а сразу нескольких.

Мы исследовали характер фазовой плоскости и обнаружили, что периодическим движениям, происходящим в системе, на фазовой плоскости соответствуют замкнутые траектории представляющей точки — в нашем случае эллипсы, по которым движется изображающая точка с не обращающейся в нуль фазовой скоростью (рис. 12), совершая полный оборот в $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ единиц времени. Состоянию равновесия осциллятора соответствует на фазовой плоскости фазовая траектория, выродившаяся в точку.

Допустим теперь, что нам не известен характер движений в системе, но каким-либо образом стал известен характер фазовых траекторий и величины фазовых скоростей. Можем ли мы, пользуясь этим знанием, делать высказывания, касающиеся отображаемых этими кривыми движений? Как мы увидим дальше, общий характер движения, качественные его черты, выявляются уже в характере фазовых траекторий. Фазовая плоскость, разбитая на траектории, дает легко обозримый «портрет» динамической системы; она дает возможность сразу, одним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть при всевозможных начальных условиях.

Мы получили для рассматриваемого случая гармонического осциллятора картину на фазовой плоскости, исходя из готового решения (1.6) уравнения осциллятора. Можно, однако, не пользуясь этим решением, непосредственно из уравнения (1.1) вывести заключения о движении изображающей точки на фазовой плоскости. Именно этот второй путь и представляет особый интерес, так как он позволяет вывести известные заключения о характере движения без знания аналитических выражений интегралов исходного уравнения и, следовательно, применим и в тех случаях, когда такие аналитические выражения, подобные (1.6), не могут быть найдены.

2. Уравнение, не содержащее времени. Чтобы от исходного уравнения (1.1), не интегрируя этого уравнения, непосредственно перейти к картине на фазовой плоскости, поступим следующим образом. Заменим исходное уравнение второго порядка двумя эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x. \quad (1.10)$$

Деля одно из этих уравнений на другое, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}. \quad (1.11)$$

Это уравнение определяет так называемые *интегральные кривые* — кривые, в каждой точке которых касательная имеет наклон (угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}$), вычисляемый по уравнению (1.11). Мы видим, что, в то время как зависимость x от t выражается дифференциальным уравнением второго порядка (1.1), зависимость y от x

выражается дифференциальным уравнением первого порядка. Проинтегрировав уравнение (1.11), мы получили бы уравнение интегральных кривых уже не в дифференциальной, а в конечной форме. В данном, простейшем случае интегральные кривые, как нетрудно видеть, совпадают с фазовыми траекториями. Однако в дальнейшем нам придется различать интегральные кривые и фазовые траектории, так как может случиться, что одна интегральная кривая состоит не из одной, а сразу из нескольких фазовых траекторий.

3. Особые точки. Центр. Уравнение (1.11) непосредственно определяет в каждой точке плоскости единственную касательную к соответствующей интегральной кривой, за исключением точки $x = 0, y = 0$, где направление касательной становится неопределенным. Как известно из обычной теории дифференциальных уравнений, через те точки, для которых соблюдаются условия теоремы Коши¹⁾ (в числе последних имеется условие, что дифференциальное уравнение даёт определенное направление касательной к интегральной кривой), проходит одна и только одна интегральная кривая; относительно точек же, в которых направление касательной становится неопределенным и в которых, следовательно, условия теоремы Коши не соблюдаются, уже нельзя утверждать (на основании этой теоремы), что через них проходит одна и только одна интегральная кривая. Такие точки, в которых направление касательной неопределенно, носят название *особых точек* данного дифференциального уравнения. Однако теорема Коши не дает права утверждать, что через особую точку проходит больше или меньше одной интегральной кривой (т. е. либо ни одной кривой, либо много). Но для тех простейших особых точек (особых точек первого порядка), с которыми нам придется главным образом сталкиваться, это обратное утверждение оказывается правильным. Именно, как мы убедимся при рассмотрении этих особых точек, через особую точку первого порядка либо не проходит ни одной, либо проходит больше чем одна интегральная кривая.

Дифференциальное уравнение может иметь, вообще говоря, много особых точек. В нашем случае имеется единственная особая точка $x = 0, y = 0$. Существуют разные типы особых точек, различаемые по характеру поведения интегральных кривых вблизи данной особой точки. В рассматриваемом нами случае через особую точку не проходит ни одна интегральная кривая. Такая изолированная особая точка, вблизи которой интегральные кривые представляют собой замкнутые кривые, не имеющие особенностей, в частности, например, эллипсы, «вложенные» друг в друга и охватывающие особую точку, называется *центром*. С другими типами простейших особых точек мы познакомимся при рассмотрении дальнейших примеров. Пока же ограничимся только указанием, что поскольку разным типам

¹⁾ К теореме Коши и ее значению для исследования поведения интегральных кривых мы еще вернемся в дальнейшем (см. также Дополнение I).

интегральных кривых соответствуют различные типы движений системы, классификация особых точек непосредственно связана с поведением системы вблизи особой точки.

4. Изоклины. Итак, уравнение (1.11) определяет поле касательных на фазовой плоскости. Нетрудно отдать себе отчет в характере этого поля, если построить семейство изоклинов¹⁾, которые в данном

случае будут просто прямыми, проходящими через начало координат (рис. 13). Действительно, пусть мы ищем все те точки фазовой плоскости, где наклон интегральных кривых равняется κ ($\frac{dy}{dx} = \kappa$). Тогда согласно (1.11) уравнение этой изоклины будет:

$$-\omega_0^2 \frac{x}{y} = \kappa \text{ или } y = \sigma x,$$

где

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{x}. \quad (1.12)$$

Нетрудно видеть (давая σ различные значения при фиксированном ω_0^2), что исследуемое поле состоит из линейных элементов, симметрично расположенных относительно осей x и y , постепенно (с изменением наклона изоклины σ) меняющих свое направление от горизонтального (вдоль оси y , где $x=0$) до вертикального (вдоль оси x , где $x=\infty$).

Уравнение (1.11) не дает, однако, ответа на вопрос о том, в какую сторону и с какой скоростью будет двигаться изображающая точка на фазовой плоскости. Уравнения же (1.10) определяют фазовую скорость как по величине, так и по направлению; действительно,

$$v = i\dot{x} + j\dot{y} = iy + j(-\omega_0^2 x). \quad (1.13)$$

Если принять во внимание и направление, то целесообразно вместо поля линейных элементов (рис. 13) рассматривать векторное поле (рис. 14), которое характеризует не только направление касательной к интегральной кривой в данной точке, но и направление движения по фазовой траектории.

¹⁾ Изоклина — это геометрическое место точек, в которых касательные ко всем интегральным кривым имеют одинаковый наклон, т. е. образуют одинаковые углы с осью абсцисс.

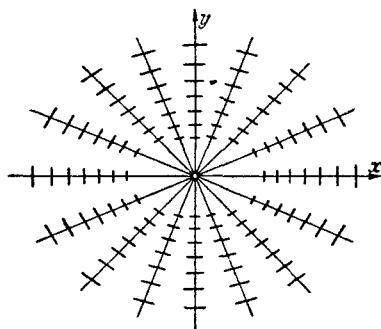


Рис. 13.

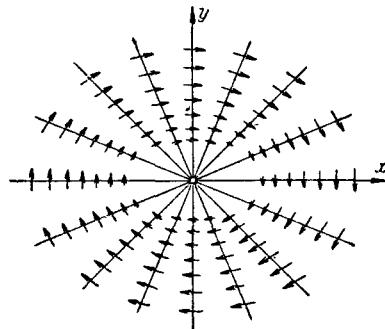


Рис. 14.

Как мы уже указывали, фазовая скорость $v = \sqrt{y^2 + \omega_0^4 x^2}$ обращается в нуль только в начале координат, т. е. только в особой точке.

Нетрудно, взглянув на рис. 13 и 14, убедиться, что метод изоклинов в рассматриваемом случае позволяет сразу получить известное представление о характере траекторий на фазовой плоскости. Конечно, применение метода изоклинов в рассматриваемом простейшем случае, когда исходное дифференциальное уравнение (1.11) допускает разделение переменных и, следовательно, легко интегрируется, вряд ли представляет какие-либо преимущества. В самом деле, интегрируя уравнение

$$xdx + \frac{1}{\omega_0^2} y dy = 0,$$

получим:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2\omega_0^2} = C,$$

или, полагая $2C = K^2$, находим, как и следовало ожидать, на фазовой плоскости по-прежнему уравнение семейства эллисов:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2 \omega_0^2} = 1.$$

Не следует забывать, что сейчас мы его получили совсем другим путем, не зная решений дифференциального уравнения (1.1). В тех же случаях, когда уравнение, подобное (1.11), не может быть проинтегрировано, метод изоклинов позволяет получить достаточно точное представление о характере интегральных кривых на фазовой плоскости, несмотря на то, что аналитическое выражение для этих интегральных кривых не может быть найдено. В этих более сложных случаях применение метода изоклинов, как мы увидим в дальнейшем, может принести существенную пользу.

5. Состояние равновесия и периодические движения. Сделаем теперь обратные выводы по отношению к тем, которые мы делали в начале этого параграфа, когда, зная движение, зная зависимость x от t , искали вид фазовой плоскости. Посмотрим, что можно сказать о характере движения, зная характер интегральных кривых на фазовой плоскости и зная выражение для фазовой скорости.

Во-первых, мы утверждаем, что все фазовые траектории в нашем случае (кроме траектории $x = 0, y = 0$, которая выродилась в точку) соответствуют периодическим движениям. Действительно, все эти траектории — эллизы, т. е. замкнутые кривые. Если наша изображающая точка движется по замкнутой кривой и если она возвращается через некоторое время, совершив «обход», в ту же самую

точку фазовой плоскости, т. е. имеет через некоторое время то же самое положение и ту же самую скорость, то дальнейшее движение будет совершенно точно совпадать с предшествовавшим, процесс будет повторяться.

Нетрудно видеть, что «время возвращения», или, иначе, период движения, является конечным. Действительно, длина нашего эллипса конечна; с другой стороны, фазовая скорость при движении по эллипсу нигде не приближается к нулю (так как она равна нулю только в начале координат, а наши эллипсы не проходят через начало координат). Поэтому изображающая точка обходит весь эллипс в конечное время, т. е. период процесса конечен.

Во-вторых, мы утверждаем, что выродившаяся траектория $x = 0, y = 0$, или, иначе, особая точка $x = 0, y = 0$, соответствует состоянию равновесия. Действительно, фазовая скорость для точки $x = 0, y = 0$ равна нулю; изображающая точка, находящаяся в исходный момент в начале координат, там и останется, если какие-либо случайные отклонения и толчки не выведут изображающую точку из точки $x = 0, y = 0$.

Вообще состояниям равновесия соответствуют такие точки фазовой плоскости, для которых одновременно $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$. Это несложно понять и из физических соображений. Например, для механического случая $\frac{dx}{dt} = 0$ говорит о том, что скорость равна нулю, а $\frac{dy}{dt} = 0$ указывает, что ускорение или, что все равно, сила равны нулю.

Вообще говоря, состояниям равновесия динамической системы соответствуют на фазовой плоскости особые точки уравнения интегральных кривых и, обратно, особые точки соответствуют состояниям равновесия¹⁾.

Таким образом, не зная еще возможных движений с количественной стороны, мы знаем качественную характеристику возможных движений. Результаты качественного исследования линейной системы без трения (гармонического осциллятора) могут быть сформулированы

¹⁾ Рассмотрим динамическую систему, отображаемую уравнениями $\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют общий множитель, обращающийся в нуль, то могут быть состояния равновесия, не являющиеся особыми точками уравнения интегральных кривых $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют общий множитель, обращающийся в бесконечность в особых точках уравнения интегральных кривых, то эти особые точки могут не быть состояниями равновесия.

таким образом: *такая система при любых начальных условиях совершает периодические движения вокруг состояния равновесия $x=0, y=0$, за исключением того единственного случая, когда начальные условия как раз соответствуют состоянию равновесия.*

§ 3. Устойчивость состояния равновесия

Интуитивно мы себе представляем смысл слов «устойчивость состояния равновесия». Однако такого интуитивного представления, конечно, недостаточно, и нужно, чтобы оно превратилось в строгое понятие, которым мы сможем воспользоваться в дальнейшем.

Начнем наше рассмотрение с простейшего примера: представим себе математический маятник без трения (рис. 15). Очевидно, что возможны два состояния равновесия маятника: 1) когда мы его помещаем, не сообщая начальной скорости, в самую нижнюю точку a ; 2) когда мы его помещаем, опять-таки не сообщая скорости, в самую верхнюю точку b . Очевидно также, что нижнее состояние равновесия устойчивое, верхнее — неустойчивое. Действительно, если маятник находится в точке b , то достаточно сколь угодно малого толчка (если даже предположить, что маятник сначала точно находился в точке b), чтобы маятник начал двигаться с возрастающей скоростью от точки b и ушел из непосредственной близости к этой точке. Иначе будет вести себя маятник, покоящийся в точке a . Получив толчок, он начнет двигаться с уменьшающейся скоростью, причем чем меньше будет толчок, тем на меньшее расстояние он отойдет от точки a , а затем повернет обратно и будет колебаться вокруг точки a . При достаточно малом толчке маятник не выйдет из любой заданной области вокруг точки a и скорость его не превзойдет любой заданной величины.

Исходя из этого примера, мы попытаемся дать определение устойчивости состояния равновесия, используя для этой цели уже введенное нами представление о фазовой плоскости. Пусть рассматриваемая система находится в состоянии равновесия. Тогда изображающая точка на фазовой плоскости находится в неподвижности в одной из особых точек уравнения интегральных кривых. Если теперь мы выведем нашу систему из состояния равновесия, сообщив ей, например, некоторый толчок¹⁾, то изображающая точка сместится из особой точки и начнет двигаться по фазовой плоскости. «Выкрасим» для краткости речи

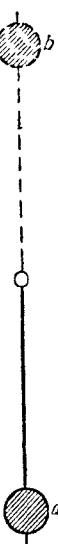


Рис. 15.

¹⁾ В теории устойчивости обычно рассматриваются «мгновенные» толчки, роль которых сводится к мгновенному смещению изображающей точки на фазовой плоскости, т. е., иначе говоря, к мгновенному изменению начальных условий. Конечно, это идеализация реальных толчков.