таким образом: *такая система при любых начальных условиях совершает периодические движения вокруг состояния равновесия* $x=0$, $y=0$, *за исключением того единственного случая, когда начальные условия как раз соответствуют состоянию равновесия.*

§ 3. Устойчивость состояния равновесия

Интуитивно мы себе представляем смысл слов «устойчивость состояния равновесия». Однако такого интуитивного представления, конечно, недостаточно, и нужно, чтобы оно превратилось в строгое понятие, которым мы сможем воспользоваться в дальнейшем.

Начнем наше рассмотрение с простейшего примера: представим себе математический маятник без трения (рис. 15). Очевидно, что возможны два состояния равновесия маятника: 1) когда мы его помещаем, не сообщая начальной скорости, в самую нижнюю точку a; 2) когда мы его помещаем, опять-таки не сообщая скорости, в самую верхнюю точку b. Очевидно также, что нижнее состояние равновесия устойчивое, верхнее — неустойчивое. Действительно, если маятник находится в точке b, то достаточно сколь угодно малого толчка (если даже предположить, что маятник сначала точно находился в точке b), чтобы маятник начал двигаться с возрастающей скоростью от точки b и ушел из непосредственной близости к этой точке. Иначе будет вести себя маятник, покоящийся в точке a. Получив толчок, он начнет двигаться с уменьшающейся скоростью, причем чем меньше будет толчок, тем на меньшее расстояние он отойдет от точки a, а затем повернет обратно и будет колебаться вокруг точки a. При достаточно малом толчке маятник не выйдет из любой заданной области вокруг точки a и скорость его не превзойдет любой заданной величины.

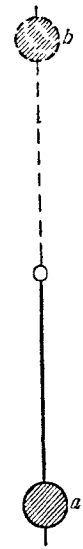

Рис. 15.

Исходя из этого примера, мы попытаемся дать определение устойчивости состояния равновесия, используя для этой цели уже введенное нами представление о фазовой плоскости. Пусть рассматриваемая система находится в состоянии равновесия. Тогда изображающая точка на фазовой плоскости находится в неподвижности в одной из особых точек уравнения интегральных кривых. Если теперь мы выведем нашу систему из состояния равновесия, сообщив ей, например, некоторый толчок [1]), то изображающая точка сместится из особой точки и начнет двигаться по фазовой плоскости. «Выкрасим» для краткости речи

[1]) В теории устойчивости обычно рассматриваются «мгновенные» толчки, роль которых сводится к мгновенному смещению изображающей точки на фазовой плоскости, т. е., иначе говоря, к мгновенному изменению начальных условий. Конечно, это идеализация реальных толчков.

изображающую точку в черный цвет, особую же точку оставим светлой (рис. 16). Мы можем тогда охарактеризовать устойчивое состояние равновесия таким образом: если при достаточно малом начальном смещении черная точка никогда не уйдет далеко от светлой, то светлая точка является устойчивым состоянием равновесия[1]).

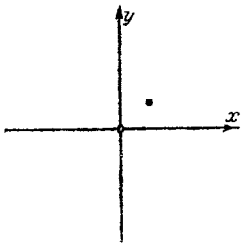

Рис. 16.

Ясно, что и эта характеристика неполна. Во-первых, назовем ли мы светлую точку устойчивой, если черная точка не уходит далеко при начальных смещениях в одних направлениях и уходит далеко, как бы мало мы ни сместили ее в других направлениях? Очевидно, что такая светлая точка не будет устойчивой; она, так сказать, лишь «условно» устойчива, при запрещении некоторого класса смещений. Нужно требовать, чтобы черная точка не уходила далеко от светлой в результате достаточно малого смещения в любом направлении.

Во-вторых, — и это самое существенное, — не являются достаточно определенными термины: «не уйдет далеко», «остается вблизи» и т. д. Ясно, что понятие «близко», «далеко» зависит от конкретных физических условий задачи. Поэтому слова «далеко», «близко» не значат ничего другого, как уйдет или нет черная точка из некоторой заданной области, окружающей светлую точку, причем эта область может быть большей или меньшей в зависимости от условий задачи.

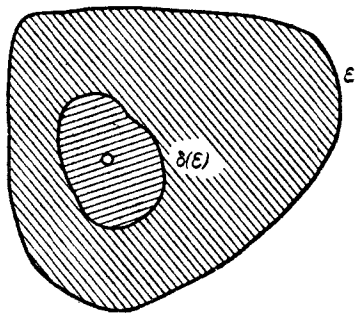

Рис. 17.

Поэтому окончательно мы остановимся на таком определении (рис. 17): *состояние равновесия является устойчивым, если по любой заданной области допустимых отклонений от состояния равновесия (область ε) мы можем указать область δ(ε), окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ, никогда не достигнет границы области ε. Наоборот, состояние равновесия неустойчиво, если может быть указана такая область отклонений от состояния равновесия (область ε), для которой не существует области δ(ε), окружающей состояние равновесия и обладающей тем свойством, что ни одно движение, начинающееся внутри δ, никогда не достигнет границы области ε.*

---

[1]) Часто это же условие формулируют так: состояние равновесия устойчиво, если достаточно малое возмущение всегда останется малым.

Эти определения связаны с представлением о фазовой плоскости рассматриваемой системы. Однако оно может быть сформулировано и без применения представления о фазовой плоскости.

Можно также перевести это определение устойчивости на язык математических неравенств, обозначив через $x(t)$ и $y(t)$ движение черной точки после смещения и предположив для простоты, что область допустимых отклонений ε представляет собой квадрат (рис. 18).

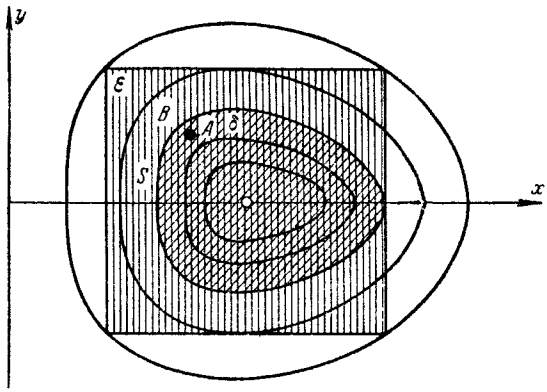

Рис. 18.

Мы получим тогда такую запись нашего определения: состояние равновесия $x=\bar{x}$, $y=0$ называется устойчивым, если, задав наперед сколь угодно малое ε ($\varepsilon>0$), можно найти такое $\delta(\varepsilon)$, что если для $t=0$

$$|x(0)-\bar{x}|<\delta \text{ и } |y(0)|<\delta,$$

то тогда для $0<t<\infty$

$$|x(t)-\bar{x}|<\varepsilon \text{ и } |y(t)|<\varepsilon.$$

Определенную таким образом устойчивость мы будем называть «устойчивостью по Ляпунову» и именно ее будем иметь в виду, когда будем говорить просто об устойчивости. В последующем мы познакомимся с другими определениями устойчивости и с значением работ Ляпунова [84] в учении об устойчивости.

Сейчас мы перейдем к анализу устойчивости состояния равновесия гармонического осциллятора. Это рассмотрение кстати даст нам возможность наглядно представить, почему необходимо говорить в определении устойчивости о двух областях ε и δ.

Нетрудно убедиться, что особая точка типа центра соответствует устойчивому состоянию равновесия. Пусть задана сколь угодно малая область ε, например квадратная (вертикальная штриховка на рис. 18). Выберем из замкнутых кривых, окружающих особую точку,

ту замкнутую кривую S, которая касается заданного квадрата и вся лежит внутри него. Заметим, кстати, что это всегда можно сделать независимо от того, имеют ли замкнутые интегральные кривые в непосредственном соседстве с особой точкой форму эллипсов или какую-либо другую. Для наличия такой кривой необходимо лишь существование континуума замкнутых кривых, не имеющих особенностей, вложенных друг в друга и стягивающихся к точке, что мы всегда и имеем в случае центра. Область внутри кривой S (двойная штриховка) и будет областью $\delta(\varepsilon)$, так как если начальное положение черной точки будет внутри этой области (точка A), то она никогда не уйдет из квадрата ε, а будет совершать периодическое движение вокруг состояния равновесия. Мы могли бы, конечно, за область δ выбрать любую другую область, лежащую внутри кривой S, например область внутри квадрата, лежащего всеми своими точками внутри кривой A, кроме вершин, которые могут лежать на кривой S[1]). Мы можем, таким образом, утверждать, что *состояние равновесия типа центра является устойчивым состоянием равновесия.*

§ 4. Линейный осциллятор при наличии трения

Для ответа на те вопросы, для которых трение играет существенную роль, мы должны отказаться от одной идеальной черты нашего гармонического осциллятора — отсутствия трения, сохранив остальную идеализацию. Примем, что сила трения пропорциональна скорости. Это предположение также представляет собой идеализацию, а именно, идеализацию реальных законов трения, которая находится в удовлетворительном согласии с опытом, когда речь идет о жидком трении или трении о воздух при достаточно малых скоростях. Всякий иной закон трения нарушил бы линейность осциллятора, между тем мы пока ограничиваем наше рассмотрение только линейными системами.

Уравнение движения при сделанном предположении о законе трения напишется так:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \tag{1.14}$$

где b — коэффициент трения, т. е. сила трения для скорости, равной единице. Электрическим аналогом такой механической системы с трением, пропорциональным скорости, является «томсоновский контур» с омическим сопротивлением. Такой контур подчиняется уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \tag{1.15}$$

[1]) Ясно, что нельзя за область $\delta(\varepsilon)$ выбрать самую область ε, так как при всех начальных положениях черной точки внутри области ε, но вне области δ, например в точке B (рис. 18), она непременно выйдет из области ε.