

ту замкнутую кривую S , которая касается заданного квадрата и вся лежит внутри него. Заметим, кстати, что это всегда можно сделать независимо от того, имеют ли замкнутые интегральные кривые в не-посредственном соседстве с особой точкой форму эллипсов или какую-либо другую. Для наличия такой кривой необходимо лишь существование континуума замкнутых кривых, не имеющих особенностей, вложенных друг в друга и стягивающихся к точке, что мы всегда и имеем в случае центра. Область внутри кривой S (двойная штриховка) и будет областью $\delta(\epsilon)$, так как если начальное положение черной точки будет внутри этой области (точка A); то она никогда не уйдет из квадрата ϵ , а будет совершать периодическое движение вокруг состояния равновесия. Мы могли бы, конечно, за область δ выбрать любую другую область, лежащую внутри кривой S , например область внутри квадрата, лежащего всеми своими точками внутри кривой A , кроме вершин, которые могут лежать на кривой S ¹⁾. Мы можем, таким образом, утверждать, что *состояние равновесия типа центра является устойчивым состоянием равновесия*.

§ 4. Линейный осциллятор при наличии трения

Для ответа на те вопросы, для которых трение играет существенную роль, мы должны отказаться от одной идеальной черты нашего гармонического осциллятора — отсутствия трения, сохранив остальную идеализацию. Примем, что сила трения пропорциональна скорости. Это предположение также представляет собой идеализацию, а именно, идеализацию реальных законов трения, которая находится в удовлетворительном согласии с опытом, когда речь идет о жидком трении или трении о воздухе при достаточно малых скоростях. Всякий иной закон трения нарушил бы линейность осциллятора, между тем мы пока ограничиваем наше рассмотрение только линейными системами.

Уравнение движения при сделанном предположении о законе трения напишется так:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (1.14)$$

где b — коэффициент трения, т. е. сила трения для скорости, равной единице. Электрическим аналогом такой механической системы с трением, пропорциональным скорости, является «томсоновский контур» с омическим сопротивлением. Такой контур подчиняется уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (1.15)$$

¹⁾ Ясно, что нельзя за область $\delta(\epsilon)$ выбрать самую область ϵ , так как при всех начальных положениях черной точки внутри области ϵ , но вне области δ , например в точке B (рис. 18), она непременно выйдет из области ϵ .

где q — заряд на обкладках конденсатора, а L , R и C , как обычно, — индуктивность, сопротивление и емкость.

Обозначая $\frac{b}{m} = 2h$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ (или соответственно $\frac{R}{L} = 2h$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$), получим уравнения (1.14) и (1.15) в обычном виде

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.16)$$

Решение этого уравнения, как известно, имеет вид¹⁾:

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}, \quad (1.17)$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.18)$$

Как известно, при $h^2 > \omega_0^2$ эти корни действительные, а при $h^2 < \omega_0^2$ — комплексные. В соответствии с этим в зависимости от знака $h^2 - \omega_0^2$ мы получим два типа решений и два различных процесса: при $h^2 < \omega_0^2$ — затухающий осцилляторный процесс, при $h^2 > \omega_0^2$ — затухающий апериодический процесс.

1. Затухающий осцилляторный процесс. При достаточно малом трении, когда $h^2 < \omega_0^2$, корни характеристического уравнения (1.18) имеют значения:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm j\omega,$$

где

$$\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (1.19)$$

и для общего решения уравнения (1.16) получаем:

$$x = e^{-ht} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (1.20)$$

где A и B определяются начальными условиями. Именно, если для $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-ht} \left\{ x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + h x_0}{\omega} \sin \omega t \right\}, \\ \dot{x} &= e^{-ht} \left\{ \dot{x}_0 \cos \omega t - \frac{\omega^2 x_0 + h \dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Решение (1.20) может быть также записано в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= K e^{-ht} \cos (\omega t + \alpha), \\ \text{где } K &= +\sqrt{A^2 + B^2} = +\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + h x_0}{\omega} \right)^2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0 + h x_0}{\omega x_0}, \\ \left(\cos \alpha &= \frac{x_0}{K}, \quad \sin \alpha = -\frac{\dot{x}_0 + h x_0}{\omega K} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

¹⁾ За исключением частного случая $h^2 = \omega_0^2$.

К аналогичному виду можно привести и выражение для скорости:

$$\dot{x} = -K\omega_0 e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha + \theta), \quad (1.23)$$

где θ определено соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} h &= \omega_0 \sin \theta, \\ \omega &= \omega_0 \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Формулы (1.22) и (1.23) определяют один из типов затухающего колебательного движения, именно осцилляторный затухающий процесс, в котором затухание амплитуды происходит по показательному закону.

Полученные функции $x(t)$, равно как и функция $\dot{x}(t)$, не являются периодическими функциями. Действительно, периодическими функциями называются, как известно, такие функции $f(t)$, для которых можно указать некоторую величину τ , так что

$$f(t + \tau) = f(t)$$

при любом значении аргумента t . Наименьшая величина τ называется периодом функции $f(t)$. Функции (1.22) и (1.23) не подходят под это определение, ибо для них приведенное условие не удовлетворяется для любых значений аргумента t . Поэтому периода в строгом смысле этого слова в этом случае не существует. Однако промежуток времени между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия (в одном и том же направлении) или между двумя последовательными максимальными отклонениями (в одну и ту же сторону) постоянен и равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Этот промежуток времени мы будем называть «условным периодом» затухающего осцилляторного процесса. Зависимость координаты от времени имеет вид, изображенный на рис. 19¹.

Скорость затухания рассматриваемого осцилляторного процесса может быть охарактеризована величиной h , так называемым показателем затухания. Численное значение h зависит от выбора единиц времени. Однако можно дать иную характеристику затухания такого процесса, не зависящую от выбора единиц измерения.

Возьмем отношение двух последовательных экстремумов, направленных в одну и ту же сторону, например двух последовательных максимумов:

$$\frac{x'_{\max}}{x''_{\max}} = e^{ht} = e^{\frac{2\pi h}{\omega}}.$$

¹⁾ Заметим, что все экстремумы (как минимумы, так и максимумы) не находятся на серединах временных расстояний между соответствующими нулями, а сдвинуты влево на величину $\frac{\theta}{\omega}$, где θ определяется формулами (1.24).

Логарифм этой величины, или, иначе говоря, разность логарифмов двух последовательных максимумов, носит название логарифмического декремента затухания d , причем

$$d = hT = \frac{2\pi h}{\omega}. \quad (1.25)$$

Чтобы еще иначе пояснить физический смысл логарифмического декремента d , заметим, что обратная величина $\frac{1}{d}$ дает число условных периодов, после которого амплитуда уменьшается в e раз (e — основание натуральных логарифмов¹⁾).

Легко видеть, что полученный закон затухания тесно связан с принятой нами идеализацией закона трения. Только предположив, что сила трения пропорциональна скорости, мы получили

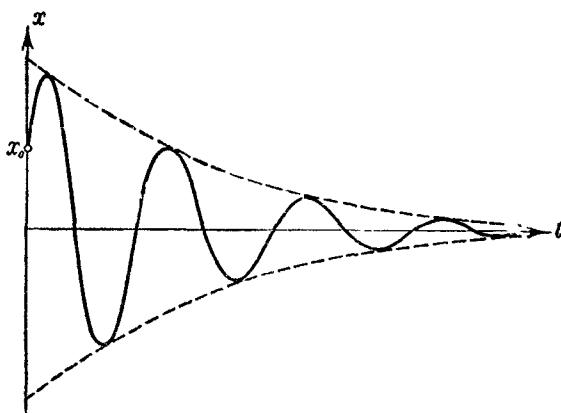


Рис. 19.

закон убывания максимумов по геометрической прогрессии с показателем прогрессии e^{-d} . Ясно, с другой стороны, что самое понятие логарифмического декремента затухания имеет определенный смысл только при этом законе затухания и теряет свой смысл, если закон затухания таков, что отношение двух последовательных максимумов не остается постоянным. Следовательно, без специальных оговорок понятие логарифмического декремента затухания применимо только к системам линейным. Определение логарифмического декремента затухания может быть сделано по кривой, изображенной на рис. 19,

¹⁾ Например, если $d = 0,02$, то это значит, что через 50 условных периодов амплитуда уменьшается в e раз, т. е. примерно до $\frac{1}{3}$ первоначальной величины.

или по полученной из этой кривой зависимости экстремумов от времени, нанесенной в полулогарифмическом масштабе (вместо отклонений по оси ординат откладываются логарифмы наибольших отклонений). В этом последнем случае зависимость принимает вид прямой линии, угол наклона которой дает непосредственно показатель затухания h , откуда умножением на условный период T получается логарифмический декремент затухания d (однако практически вместо этого прямого метода чаще применяется более удобный метод определения затухания по кривой резонанса).

Мы видим, что затухающее колебательное движение характеризуется четырьмя величинами: условным периодом T (или соответствующей условной угловой частотой ω), логарифмическим декрементом затухания d , амплитудой K и фазой α .

Свойствами системы определяются условный период и логарифмический декремент затухания колебаний; произвольными остаются амплитуда и фаза, которые определяются начальными условиями.

2. Изображение затухающего осцилляторного процесса на фазовой плоскости. Переядем теперь к исследованию фазовой плоскости рассматриваемой системы, к построению ее «портрета», отображающего всю совокупность возможных движений.

Зная решение дифференциального уравнения (1.16), можно найти уравнение семейства фазовых траекторий. Согласно (1.22) параметрические уравнения траекторий на фазовой плоскости x, y имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= Ke^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= \dot{x} = -Ke^{-ht} [h \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Покажем, что это — семейство спиралей, имеющих асимптотическую точку в начале координат.

Для этой цели воспользуемся линейным преобразованием координат — приемом, к которому мы и в дальнейшем будем неоднократно прибегать. Именно, перейдем от переменных x, y к переменным

$$u = \omega x, \quad v = y + hx, \quad (1.27)$$

которые мы будем интерпретировать как декартовы координаты на другой плоскости (так называемая «активная» интерпретация преобразования координат¹⁾). Очевидно, если обозначить $\omega K = C_1$, то

$$u = C_1 e^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \quad v = -C_1 e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha).$$

¹⁾ «Активная» интерпретация преобразования координат состоит в том, что преобразование $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ рассматривается как закон некоторого точечного преобразования плоскости x, y в другую плоскость с ортогональной (декартовой) системой координат u, v и соответствующей деформацией фигур.

Эта деформация фигур в нашем случае линейного и однородного преобразования (1.27) сводится к простому повороту и равномерным укорочениям или

Еще более простой вид уравнения фазовых траекторий на плоскости u , v получают в полярных координатах ρ , φ ($u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$):

$$\rho = C_1 e^{-ht}, \quad \varphi = -(\omega t + \alpha),$$

или, исключив время,

$$\rho = C e^{\frac{h}{\omega} \varphi} \quad (1.28)$$

(здесь $C = C_1 e^{\frac{ha}{\omega}}$ — новая произвольная постоянная).

Таким образом, на плоскости u , v фазовыми траекториями будет семейство логарифмических спиралей с асимптотической точкой в

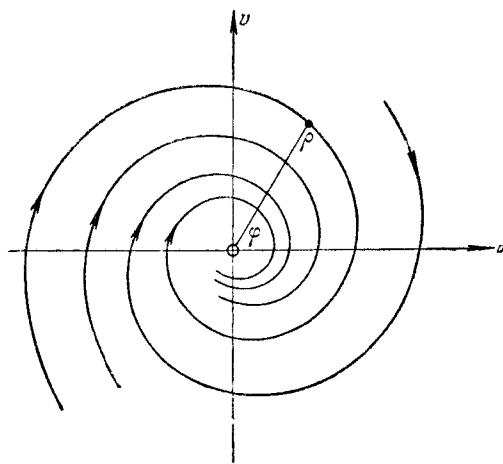


Рис. 20.

начале координат (рис. 20). При этом, поскольку φ убывает со временем, а $\rho \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, изображающая точка, двигаясь по спиралям на плоскости u , v , асимптотически приближается к началу координат.

Перейдем обратно на плоскость x , y . Из (1.28), заметив, что

$$\rho^2 = u^2 + v^2 = \omega^2 x^2 + (y + hx)^2 = y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2,$$

$$\varphi = \arctan \frac{v}{u} = \arctan \frac{y + hx}{\omega_0 x},$$

удлинениям по двум так называемым главным осям. Нетрудно убедиться, что каждая прямая на плоскости x , y , проходящая через начало координат, преобразуется преобразованием (1.27) также в прямую, проходящую через начало координат, причем расстояния соответствующих точек на этих прямых до начал координат (соответственно плоскости x , y и плоскости u , v) пропорциональны друг другу.

получаем координатное уравнение (с исключенным временем) фазовых траекторий:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C^2 e^{2 \frac{h}{\omega} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y+hx}{\omega x}}. \quad (1.29)$$

Так как деформация фазовых траекторий при обратном преобразовании (от u, v к x, y) не может изменить их качественного характера, то мы можем утверждать, что семейство фазовых траекторий (1.29) на плоскости x, y также является семейством спиралей с асимптотической точкой в начале координат.

Относительно характера этих спиралей можно заметить следующее. При малых $\frac{h}{\omega}$, т. е. малых логарифмических декрементах затухания, логарифмическая спираль (1.28) в течение каждого оборота

близка к соответствующему кругу $u^2 + v^2 = \text{const}$. Этот круг при линейном преобразовании (1.27) превращается в эллипс $y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = \text{const}$. Отсюда мы можем заключить, что при малых

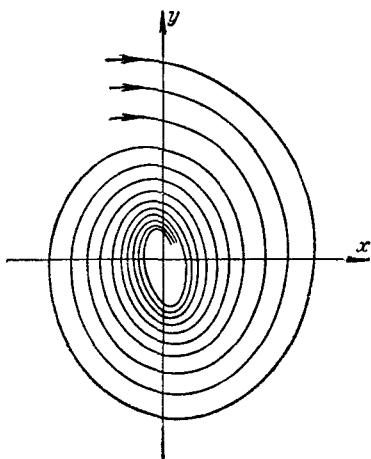


Рис. 21.

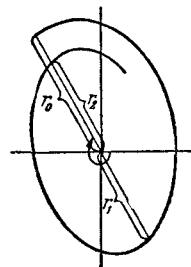


Рис. 22.

$\frac{h}{\omega}$ исследуемая нами спираль (1.29) близка на протяжении каждого оборота к эллипсу (с соответствующим образом выбранным значением константы)

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = \text{const}. \quad (1.30)$$

На рис. 21 изображено семейство исследуемых нами спиралей — фазовых траекторий на плоскости x, y . Изображающая точка, двигаясь по любой спирали, будет асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаться к началу координат, являющемуся состоянием равновесия. Радиус-вектор изображающей точки будет уменьшаться (по длине) за каждый оборот.

Подсчитаем величину этого уменьшения при полуобороте, обороте и т. д. Для этой цели проведем на плоскости x, y произволь-

ную прямую, проходящую через начало координат, и обозначим через r_0, r_1, r_2, \dots расстояния до начала координат точек пересечения некоторой спирали (1.29) с проведенной прямой (рис. 22). При преобразовании (1.27) проведенная прямая вместе с точками пересечения преобразуется также в прямую, проходящую через начало координат, причем, как мы указывали выше,

$$r_0 : r_1 : r_2 : \dots = p_0 : p_1 : p_2 : \dots ,$$

где через p_0, p_1, p_2, \dots обозначены расстояния на плоскости u, v преобразованных точек пересечения до начала координат.

Отсюда следует, что каждому полуобороту радиуса-вектора r изображающей точки, двигающейся на плоскости x, y по спирали (1.29), соответствует также полуоборот радиуса-вектора r на плоскости u, v (с уменьшением угла φ на π за интервал времени, равный $\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$). Согласно (1.28), очевидно имеем:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 e^{-\frac{h\pi}{\omega}}, \\ p_2 &= p_0 e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}, \dots \end{aligned}$$

Так как расстояния r_0, r_1, r_2, \dots и p_0, p_1, p_2, \dots пропорциональны друг другу, то, очевидно, длина радиуса-вектора изображающей точки на плоскости x, y после полуоборота равна

$$r_1 = r_0 e^{-\frac{\pi h}{\omega}} = r_0 e^{-\frac{d}{2}}, \quad (1.31)$$

после полного оборота

$$r_2 = r_0 e^{-\frac{2\pi h}{\omega}} = r_0 e^{-d}$$

и после n оборотов

$$r_{2n} = r_0 e^{-nd}. \quad (1.32)$$

Мы видим, что уменьшение радиуса-вектора происходит по ранее найденному показательному закону с логарифмическим декрементом затухания $d = hT$.

Мы выяснили, таким образом, характер фазовых траекторий. Можно показать, что через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна спираль, соответствующая определенному значению константы C или, иначе говоря, соответствующая определенным начальным условиям. Вся плоскость заполнена спиральями,ложенными друг в друга, по которым изображающая точка асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближается к началу координат. Исключение составляет лишь состояние равновесия — точка $x = 0, y = 0$, которую следует рассматривать как отдельную фазовую

траекторию. При движении изображающей точки по спирали фазовая скорость никогда не обращается в нуль, постепенно убывая с каждым оборотом, так что время каждого оборота остается неизменным и равным $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Фазовая скорость всегда равна нулю для «движения», отображаемого траекторией $x = 0, y = 0$.

3. Непосредственное исследование дифференциального уравнения. Мы исследовали характер движений на фазовой плоскости для случая линейного осциллятора при наличии трения, пропорционального скорости, и выяснили, что процессам при малом затухании ($h^2 < \omega_0^2$) соответствует движение изображающей точки по спиралеобразной фазовой траектории, имеющей асимптотическую точку в начале координат. Само начало координат в этом случае является состоянием равновесия. Однако мы получили эту картину на фазовой плоскости, исходя из заранее найденного решения (1.20). Мы могли бы получить эту же картину непосредственно из (1.16), не зная решения (1.20).

Заменим, как мы уже это делали, исходное уравнение второго порядка (1.16) двумя эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= -2hy - \omega_0^2 x. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Деля одно уравнение на другое, получим дифференциальное уравнение интегральных кривых в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y}. \quad (1.34)$$

Нетрудно видеть, что это уравнение, подобно уравнению (1.11), определяет на фазовой плоскости некоторое поле касательных, а вместе с уравнением (1.33) — некоторое векторное поле с единственной особой точкой $x = 0, y = 0$.

Легко исследовать приближенно с помощью изоклин характер этого поля. Уравнение изоклины, для точек которой интегральные кривые имеют наклон κ , напишется так:

$$\frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y} = \kappa \text{ или } y = \sigma x,$$

где

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{x + 2h}, \quad (1.35)$$

т. е. изоклины и в этом случае представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Задав, например, достаточно большой ряд значений x (при фиксированных h и ω_0 , которые опреде-

ляются системой), получим семейство изоклинов и с помощью их с нужной степенью точности сможем построить векторное поле¹⁾.

На рис. 23 изображено такое векторное поле, построенное при помощи нескольких изоклинов, и уже из этого чертежа можно предугадать характер интегральных кривых.

Полученное после исключения времени уравнение (1.34) допускает интегрирование, так как оно принадлежит к классу однородных уравнений.

Интегрируя по обычным правилам (подстановка $z = \frac{y}{x}$), получим для нашего случая ($h^2 < \omega_0^2$) уравнение интегральных кривых:

$$\begin{aligned} y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 &= \\ &= Ce^{2 \frac{h}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y+hx}{\omega x}}, \end{aligned}$$

исследованием которого мы уже занимались²⁾. Теперь мы это уравнение получили иным путем, не зная решения уравнения (1.16). Выражение фазовой скорости v находится из уравнений (1.13) и (1.33):

$$v = i \cdot y + j (-2hy - \omega_0^2 x)$$

и

$$|v|^2 = \omega_0^4 x^2 + 4h\omega_0^2 xy + (1 + 4h^2)y^2. \quad (1.36)$$

Мы видим при этом способе рассмотрения сразу, почти без всяких вычислений, что фазовая скорость нигде не обращается в нуль, за исключением начала координат $x = 0, y = 0$, но уменьшается по мере приближения представляющей точки к началу координат.

Что можно сказать о характере движений в нашей системе, зная характер интегральных кривых на фазовой плоскости и зная выражение для фазовой скорости?

¹⁾ Заметим, что метод изоклинов является не только методом приближенного численного интегрирования, но и методом, с помощью которого можно строго доказывать различные утверждения, относящиеся к интегральным кривым.

²⁾ Положительная постоянная интегрирования C^2 в выражении (1.29) здесь обозначена через C .

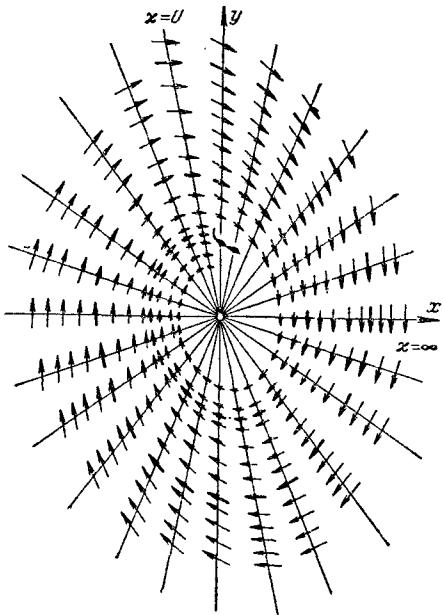


Рис. 23.

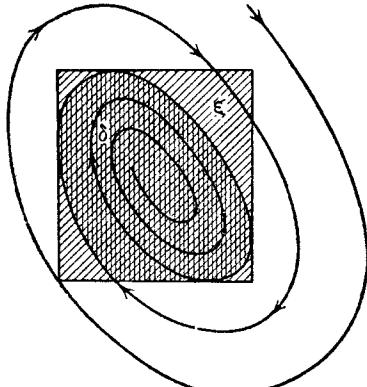
Во-первых, можно утверждать, что все фазовые траектории соответствуют осцилирующим, но затухающим, стремящимся к положению равновесия движениям (за исключением «движения» по траектории $x = 0, y = 0$). Действительно, все эти траектории — спирали; так как при движении представляющей точки по спирали координата и скорость системы многократно проходят через нуль, то спирали на фазовой плоскости отображают осцилляторный процесс. Далее радиус-вектор представляющей точки, двигающейся по спирали, уменьшается после каждого оборота; это значит, что мы имеем дело с затухающим процессом, максимальные значения x и \dot{x} уменьшаются от оборота к обороту. Во-вторых, очевидно, что особая точка $x = 0, y = 0$ соответствует состоянию равновесия.

Результаты, полученные из анализа характера движений на фазовой плоскости, можно сформулировать так: *наша система при любых начальных условиях совершает затухающие осцилляторные движения вокруг положения равновесия $x = 0, y = 0$, за исключением того единственного случая, когда начальные условия как раз соответствуют состоянию равновесия.*

В рассматриваемом случае мы имеем только одну особую точку системы интегральных кривых, являющуюся асимптотической точкой для всех интегральных кривых. Такая особая точка, которая является асимптотической точкой всех интегральных кривых, имеющих вид спиралей, вложенных друг в друга, называется *фокусом*.

Выясним теперь вопрос, является ли в рассматриваемом случае особая точка типа фокуса устойчивой. При-

Рис. 24.



нимая во внимание, что представляющая точка по всякой интегральной кривой будет двигаться, приближаясь к особой точке, легко убедиться в том, что условие устойчивости состояния равновесия, сформулированное нами выше, в этом случае соблюдается. Действительно, мы всегда можем выбрать такую область δ (рис. 24, двойная штриховка), чтобы представляющая точка не вышла за пределы области ε (простая штриховка). Следовательно, в рассматриваемом нами случае состояние равновесия устойчиво и особая точка — устойчивый фокус. Устойчивость особой точки типа фокуса, очевидно, связана с тем, раскручиваются или скручиваются интегральные кривые, считая по направлению движения представляющей точки. Так как направление движения представляющей точки однозначно определено выбором координат (точка должна двигаться по часовой стрелке), то вместе

с тем (так как направление отсчета времени не может быть изменено) однозначно устанавливается и устойчивость особой точки в рассматриваемом случае. Наоборот, если бы спирали раскручивались (считая в том же направлении), то особая точка была бы неустойчива. Как легко убедиться, например, из уравнения (1.28), скручивание интегральных кривых обусловлено тем, что $h > 0$, так как только в этом случае радиус-вектор при движении по часовой стрелке убывает.

Таким образом, особая точка типа фокуса, вообще говоря, может быть как устойчивой, так и неустойчивой (в отличие от особой точки типа центра, которая, как мы видели, всегда устойчива). В рассматриваемом случае фокус устойчив, потому что $h > 0$. Физический смысл этого условия устойчивости ясен: трение должно быть положительно, т. е. должно препятствовать движению и потреблять энергию. Такое положительное, препятствующее движению трение, на преодоление которого затрачивается работа, не может вызвать неустойчивости, и если положение равновесия в системе было устойчиво при отсутствии трения (в гармоническом осцилляторе), то оно останется устойчивым и при наличии положительного трения. При дальнейшем рассмотрении мы встретимся с неустойчивыми особыми точками типа фокуса.

Рассмотренный нами устойчивый фокус обладает «более сильной» устойчивостью, чем рассмотренный в предыдущем параграфе центр. Действительно, в случае устойчивого фокуса будет выполнено не только условие устойчивости по Ляпунову, но и более жесткое требование. Именно, при любых начальных отклонениях система по прошествии достаточно длинного промежутка времени вернется как угодно близко к положению равновесия. Такую устойчивость, при которой начальные отклонения не только не нарастают, но, наоборот, затухают, мы будем называть *абсолютной устойчивостью*. В рассмотренном нами случае линейного осциллятора фокус абсолютно устойчив.

4. Затухающий апериодический процесс. Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения действительны, т. е. когда $h^2 > \omega_0^2$. В этом случае, обозначая

$$q = +\sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad (1.37)$$

получим корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -h + q = -q_1, \quad \lambda_2 = -h - q = -q_2 \quad (1.38)$$

($q_2 > q_1 > 0$). Поэтому общее решение уравнения (1.16) может быть записано в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t} \\ \dot{x} &= -q_1 Ae^{-q_1 t} - q_2 Be^{-q_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

и

Здесь A и B определяются начальными условиями. Именно, если для $t=0$ $x=x_0$ и $\dot{x}=\dot{x}_0$, то

$$x = \frac{\dot{x}_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{q_1 - q_2} e^{-q_2 t} \quad (1.40)$$

Нашей задачей является исследовать характер возможных движений в зависимости от начальных условий.

Во-первых, очевидно, что при всяких начальных условиях движение затухает, так как $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ и, значит, при $t \rightarrow +\infty$ $x(t) \rightarrow 0$. Чтобы выяснить подробнее характер затухания, найдем t_1 и t_2 — моменты времени (т. е. промежутки времени после начального момента), для которых соответственно обращаются в нули x и \dot{x} . Воспользовавшись (1.40), находим следующие уравнения для определения t_1 и t_2 :

$$e^{(q_2 - q_1)t_1} = \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} = 1 - \frac{x_0(q_2 - q_1)}{\dot{x}_0 + q_2 x_0}, \quad (1.41)$$

$$e^{(q_2 - q_1)t_2} = \frac{q_2(\dot{x}_0 + q_1 x_0)}{q_1(\dot{x}_0 + q_2 x_0)} = 1 + \frac{\dot{x}_0(q_2 - q_1)}{q_1(\dot{x}_0 + q_2 x_0)}. \quad (1.42)$$

Из этих уравнений сразу видно, что каждое из них имеет не более одного корня; таким образом, осцилляторное затухание невозможно, мы имеем дело с так называемым апериодическим процессом.

Выясним, когда уравнение, определяющее t_2 , не имеет ни одного положительного корня. В этом случае движение монотонно затухает, асимптотически стремясь к нулю. Как видно из выражения для t_2 (1.42), это будет, если

$$\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} < 0. \quad (1.43)$$

На рис. 25 указана область начальных значений, которые удовлетво-

¹⁾ Часто представляется удобным записывать решение уравнения (1.16) при $h^2 > \omega_0^2$ через гиперболические функции: общее решение в виде

$$x = e^{-ht} (A \operatorname{ch} qt + B \operatorname{sh} qt)$$

и решение, удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$, в виде:

$$x = e^{-ht} \left\{ x_0 \operatorname{ch} qt + \frac{\dot{x}_0 + h x_0}{q} \operatorname{sh} qt \right\},$$

$$\dot{x} = e^{-ht} \left\{ \dot{x}_0 \operatorname{ch} qt - \frac{\omega_0^2 x_0 + h \dot{x}_0}{q} \operatorname{sh} qt \right\}.$$

Последние выражения получаются из (1.21) заменой тригонометрических функций на соответствующие гиперболические и ω на q .

ряют этому неравенству (область II). Для остальных начальных значений $\frac{\dot{x}_0}{x_0 + q_2 x_0} > 0$ — уравнение, определяющее t_2 , имеет положительный корень; это значит, что смещение не убывает монотонно, а сначала возрастает по абсолютной величине и, лишь достигнув некоторого экстремума, начинает убывать, асимптотически стремясь к нулю.

Здесь следует различать два случая, смотря по тому, имеет ли при рассматриваемых начальных условиях уравнение, определяющее t_1 , положительный корень или такого корня нет. Если такого корня нет, то смещение в течение всего времени движения ($0 < t < \infty$) сохраняет свой знак; система отдаляется от положения равновесия, достигает некоторого максимального отклонения и затем монотонно приближается к положительному равновесию (но не проходит через положение равновесия). По (1.41) этот случай имеет место, если

$$\frac{x_0}{x_0 + q_2 x_0} > 0. \quad (1.44)$$

На рис. 25 цифрой I отмечены области начальных значений, приводящих к движению такого типа.

Если уравнение, определяющее t_1 , имеет положительный корень, то система сначала приближается к положению равновесия, в момент $t = t_1$ проходит через положение равновесия, далее в момент $t = t_2$ достигает некоторого максимального отклонения в направлении, противоположном начальному отклонению, и, наконец, монотонно приближается к положительному равновесию, не достигая, однако, его в конечное время¹⁾.

На рис. 25 область III соответствует начальным значениям, приводящим к такого рода движению.

Связь между характером движения и начальными условиями можно представить графически еще и в другом виде, именно изобразить зависимость смещения от времени для всех трех случаев I , II , III :

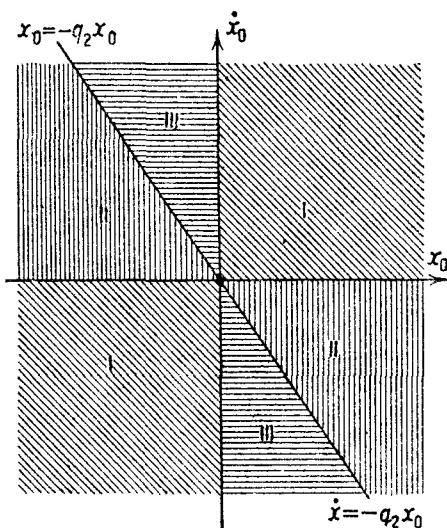


Рис. 25.

¹⁾ Нетрудно видеть из уравнений (1.41) и (1.42), что $e^{(q_2 - q_1)(t_2 - t_1)} = \frac{q_2}{q_1}$ и, следовательно, непременно $t_2 > t_1$.

это и выполнено на рис. 26, причем предполагается, что во всех случаях начальное смещение $x_0 > 0$.

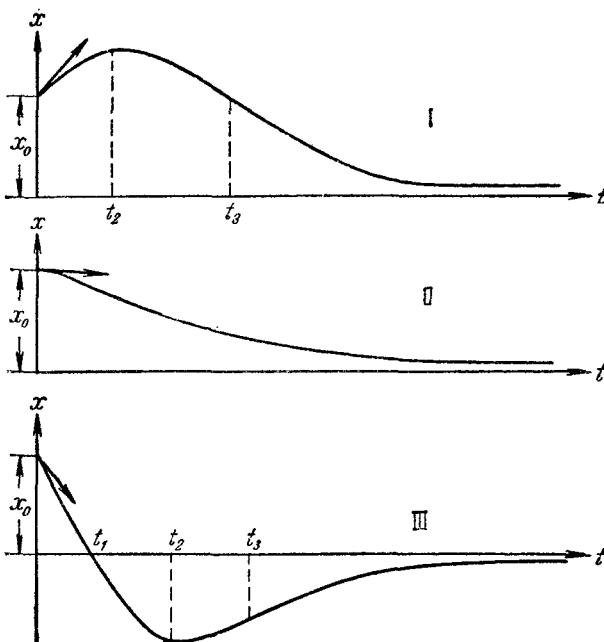


Рис. 26.

5. Изображение апериодического процесса на фазовой плоскости. Переходим теперь к исследованию фазовых траекторий на фазовой плоскости x, y ($y = \dot{x}$). Уравнения (1.39) являются параметрическими уравнениями фазовых траекторий в рассматриваемом случае. Исключая из них время $t^1)$, нетрудно получить координатное уравнение интегральных кривых:

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C(y + q_2 x)^{q_2}. \quad (1.45)$$

Чтобы исследовать это семейство кривых, опять воспользуемся линейным преобразованием координат:

$$y + q_1 x = v; \quad y + q_2 x = u.$$

¹⁾ Это можно сделать, например, следующим образом. Разрешая уравнения (1.39) относительно $Ae^{-q_1 t}$ и $Be^{-q_2 t}$, получим:

$$y + q_1 x = (q_1 - q_2) Be^{-q_2 t}, \quad y + q_2 x = (q_2 - q_1) Ae^{-q_1 t}.$$

После возведения первого выражения в степень q_1 и второго — в степень q_2 и деления одного из полученных соотношений на другое получим (1.45).

После этого преобразования уравнение (1.45) примет в новых переменных простой вид:

$$v = Cu^a, \text{ где } a = \frac{q_2}{q_1} > 1. \quad (1.46)$$

Толкуя u и v как прямоугольные координаты, мы можем сказать, что после преобразования получили семейство «парабол», причем, поскольку $a > 1$: 1) все интегральные кривые, за исключением кривой, соответствующей $C = \infty$, касаются в начале координат оси u , так как $\frac{dv}{du} = Cau^{a-1}$, следовательно, $(\frac{dv}{du})_{u=0} = 0$; 2) интегральные кривые при $C = 0$ и $C = \infty$ вырождаются в прямые: при $C_1 = 0$ имеем $v = 0$, т. е. ось v ; при $C_1 = \infty$ имеем $u = 0$, т. е. ось v ; 3) интегральные кривые обращены выпуклостью к оси u ¹⁾, ординаты их монотонно возрастают по абсолютной величине при увеличении u . Семейство таких парабол изображено на рис. 27.

Перейдем теперь обратно на плоскость x, y . Оси v на плоскости u, v соответствует прямая $y + q_2x = 0$ на плоскости x, y ; оси u — прямая $y + q_1x = 0$. Остальные интегральные кривые или, точнее, остальные кривые семейства (1.45) на плоскости x, y представляют собой деформированные параболы, касающиеся прямой $y = -q_2x$ («бывшей» оси u). Для того чтобы изобразить это семейство кривых, нужно учсть еще следующие обстоятельства: 1) кривые семейства имеют горизонтальные касательные в точках

пересечения с прямой $y = -\frac{q_1q_2}{q_1 + q_2}x$ ($\frac{q_1q_2}{q_1 + q_2} < q_1$); 2) кривые семейства имеют вертикальные касательные в точках пересечения с осью x ; 3) наклон кривых, пересекающих ось x , монотонно увеличивается на участке от состояния равновесия до оси x и меняется от $-q_1$ до $+\infty$; 4) кривые семейства имеют параболические бесконечные ветви с осями, параллельными прямой $y = -q_2x$ (при уходе в бесконечность наклон кривых $\frac{dy}{dx} \rightarrow -q_2$). Это семейство кривых изображено на рис. 28.

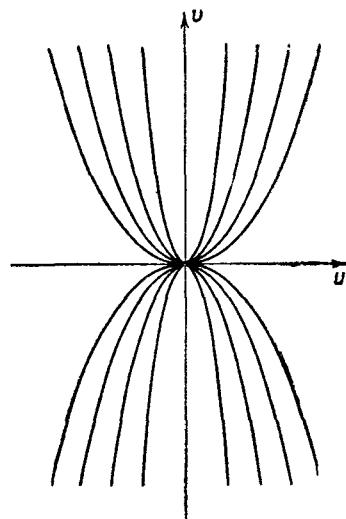


Рис. 27.

1) Так как $\frac{v''}{v} = \frac{a(a-1)}{u^2}$.

Подобно предыдущему случаю мы можем и в этом случае прийти к полученным результатам, не интегрируя дифференциального уравнения (1.16), а заменяя это уравнение второго порядка двумя эквивалентными уравнениями первого порядка и исключая из них время. Мы получим то же уравнение интегральных кривых, как и в предыдущем случае:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y}. \quad (1.34)$$

Единственная особая точка этого семейства кривых есть точка $x = 0, y = 0$, соответствующая состоянию равновесия системы. Изо-

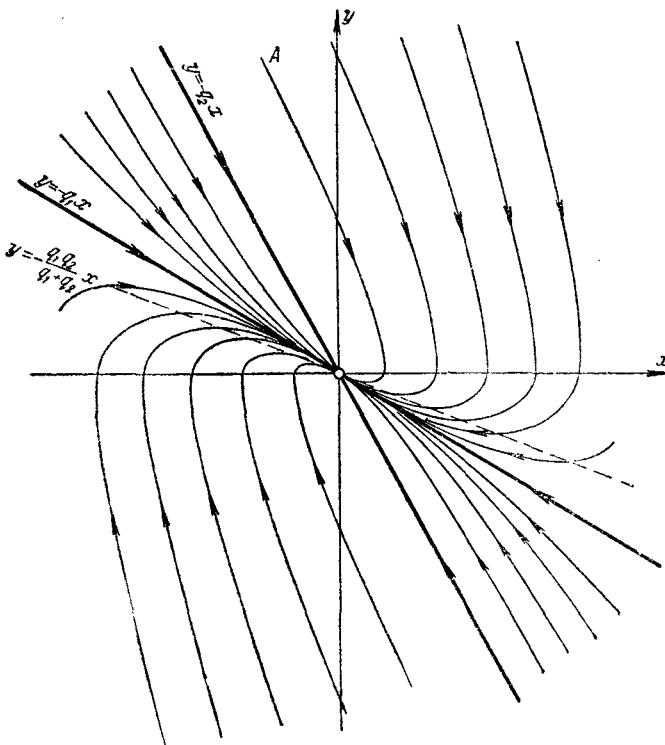


Рис. 28.

клины и в этом случае будут прямыми, определенными уравнениями (1.35). Но так как в рассматриваемом случае $h^2 > \omega_0^2$, то расположение изоклинов будет несколько иным (рис. 29). В рассматриваемом случае имеются две прямолинейные интегральные кривые, проходящие через начало координат. Для их отыскания подставим уравне-

ние прямой $y = \beta x$ в уравнение интегральных кривых (1.34). Тогда для углового коэффициента β прямоугольной интегральной кривой получим уравнение $\beta^2 + 2h\beta + \omega_0^2 = 0$, совпадающее с характеристическим (1.18). В нашем случае оно имеет действительные корни: $\beta_1 = -q_1$, $\beta_2 = -q_2$, т. е. интегральными кривыми будут прямые $y = -q_1 x$, $y = -q_2 x$. Это сразу исключает существование спиральных фазовых траекторий, охватывающих начало координат, и, следовательно, существование осцилляторно затухающих движений в системе.

Точно так же при интегрировании уравнения (1.34) подстановкой $z = \frac{y}{x}$ мы получим (вследствие того, что $h^2 > \omega_0^2$) результат, отличный от предыдущего случая, именно уравнение семейства интегральных кривых «параболического типа»:

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C \left[\frac{\frac{y}{x} + h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}}{\frac{y}{x} + h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2 - \omega_0^2}}}$$

или

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C_1 (y + q_2 x)^{q_2}, \quad (1.45)$$

где $q_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$ и $q_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$, т. е. то же уравнение, которое было нами выше получено иным путем (исключением t из решений исходного дифференциального уравнения).

Направление движения представляющей точки определяется с помощью тех же соображений, что и в предыдущих случаях, именно из условия, что при $y = \dot{x} > 0$ значение x должно возрастать. Так как тангенс угла касательной к интегральной кривой с осью x изменяет знак только один раз при пересечении с осью x , то сразу видно, что представляющая точка будет двигаться по интегральным кривым в направлениях, указанных на рис. 28 стрелками, т. е.

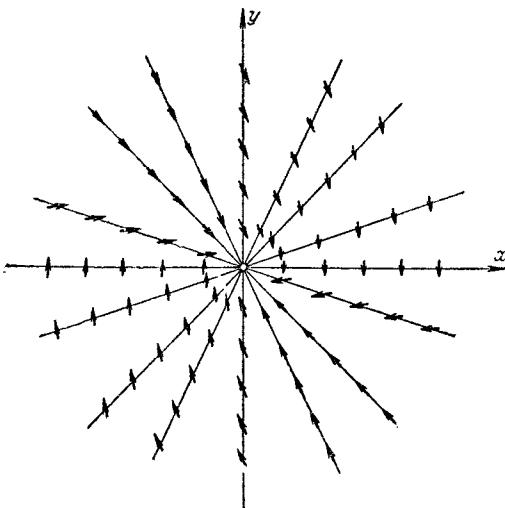


Рис. 29.

всегда будет приближаться к началу координат. Скорость движения представляющей точки, как и в предыдущих случаях, обращается в нуль только там, где одновременно $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$, т. е. в особой точке рассматриваемого дифференциального уравнения.

Как мы уже говорили, мы будем делать различие между *интегральными кривыми* и *фазовыми траекториями*, так как одной интегральной кривой может соответствовать несколько существенно различных движений или, иначе говоря, несколько различных фазовых траекторий. Например, в рассматриваемом случае, задавая определенное значение константы C , мы еще не фиксируем единственную траекторию, так как в нашем случае каждая интегральная кривая проходит через особую точку и, следовательно, состоит из трех фазовых траекторий (две из них соответствуют движениям, асимптотическим к состоянию равновесия, третьей является само состояние равновесия). В нашем случае все интегральные кривые проходят через особую точку. Такая особая точка, через которую проходят интегральные кривые, подобно тому, как семейство парабол $y = Cx^\alpha$ ($\alpha > 0$) проходит через начало координат, носит название *узла*. Нетрудно видеть, что состояние равновесия, соответствующее в нашем случае особой точке — узлу, является устойчивым по Ляпунову, так как изображающая точка по всем интегральным кривым движется по направлению к началу координат. Устойчивое состояние равновесия, которое соответствует особой точке типа узла, мы в дальнейшем будем называть *устойчивым узлом*. Как мы убедимся в дальнейшем, узел может быть и неустойчивым, для чего достаточно, чтобы h было отрицательно. Как и в случае фокуса, физический смысл этого обстоятельства заключается в том, что если состояние равновесия в системе без трения с одной степенью свободы устойчиво, то прибавление положительного трения, т. е. трения, на преодоление которого должна затрачиваться работа, не может нарушить устойчивости (даже более того — положительное трение сообщает положению равновесия абсолютную устойчивость).

Рассмотрим несколько подробнее физические черты трех типов апериодических движений, изображенных на рис. 26. Прежде всего, если начальная скорость и начальное отклонение одного знака (т. е. если представляющая точка лежит в области I на рис. 25), то система сначала будет удаляться от положения равновесия, причем скорость ее будет постепенно убывать (начальная кинетическая энергия расходуется на увеличение потенциальной энергии и на преодоление трения). Когда скорость падает до нуля (точка t_2), система начнет двигаться назад к положению равновесия, причем сначала скорость будет возрастать, так как восстанавливающая сила больше силы трения. Но при движении сила трения возрастает (так как скорость возрастает), а восстанавливающая сила убывает (так как система приближается к положению равновесия), и, следовательно, начиная с какого-то момента (точка t_3 на рис. 26, I), скорость,

достигшая к этому моменту максимума, начнет снова убывать. Система будет асимптотически приближаться к положению равновесия.

Другой случай, когда начальная скорость и начальное отклонение разных знаков, т. е. начальный толчок направлен в сторону, противоположную начальному отклонению, приводит к двум различным типам движений (*II* и *III*). Если начальный толчок мал по сравнению с начальным отклонением, то система вследствие наличия большого трения не может перейти через положение равновесия и будет асимптотически приближаться к положению равновесия (кривая *II*). Если же начальная скорость достаточно велика, то система в некоторый момент t_1 пройдет через положение равновесия (кривая *III*) и после этого еще будет обладать некоторой скоростью, направленной от положения равновесия, т. е. в ту же сторону, в которую отклонена система. При этом получается уже рассмотренное движение типа *I*; система достигает некоторого наибольшего отклонения и затем асимптотически приближается к положению равновесия. Таким образом, движение типа *III* только в первой своей части (до точки t_1) отличается от движения типа *I*. После же точки t_1 движение *III* аналогично движению типа *I*. С другой стороны, движение типа *I* после точки t_2 аналогично движению типа *II*. И действительно, движение представляющей точки по некоторым фазовым кривым, проходящим через все три области *I*, *II* и *III* (например, по кривой, отмеченной буквой *A* на рис. 28), будет принадлежать либо к *III*, либо к *I*, либо к типу *II* в зависимости от того, в какой области будет лежать представляющая точка в начальный момент.

Предельный случай (когда $h^2 = \omega_0^2$) мы не будем рассматривать подробно, а ограничимся лишь краткими указаниями, ибо этот случай (как, впрочем, и всякий случай, когда соотношение между параметрами системы точно фиксировано) не может быть точно реализован в физической системе и имеет значение только как граница между двумя различными типами затухающих процессов — осцилляторным и апериодическим. В случае $h^2 = \omega_0^2$, как известно, решение исходного дифференциального уравнения (1.16) нужно искать в виде:

$$x = (A + Bt) e^{-\alpha t}.$$

Можно и в этом случае не искать решение дифференциального уравнения второго порядка, а перейти к уравнению первого порядка, определяющему фазовые кривые (1.34). Мы и в этом случае получим семейство интегральных кривых параболического типа и устойчивую особую точку типа узла, так что с точки зрения поведения интегральных кривых и типа особой точки этот граничный случай следует отнести к случаю $h^2 > \omega_0^2$, а не к случаю $h^2 < \omega_0^2$. Случай $h^2 = \omega_0^2$, не имея физического значения, все же представляет известный расчетный интерес, так как часто бывает выгодно так подобрать

затухание системы, чтобы h^2 было возможно ближе к ω_0^2 . Этим, с одной стороны, устраняются колебания в системе, которые неизбежны при h^2 , много меньшем, чем ω_0^2 , а с другой стороны, скорость апериодического возвращения системы к нулю получается наибольшая (больше, чем при больших величинах h). Такие именно условия являются наивыгоднейшими для ряда измерительных приборов, например, для гальванометров. Но при сколь угодно малом изменении параметров системы этот предельный случай превратится в один из двух других, рассмотренных ранее. Поэтому он не представляет физического интереса и не отражает характерных черт реальной физической системы. Предельный случай имеет значение только как граница, формально разделяющая системы на колебательные и апериодические. Необходимо, однако, иметь в виду, что разделение систем на колебательные и апериодические, которое в случае линейной системы хотя и может быть математически проведено вполне строго, в сущности говоря, не имеет большого физического содержания, ибо при больших значениях h система теряет свои наиболее характерные «колебательные черты» еще до того, как h^2 достигает величины ω_0^2 . Действительно, если h^2 лишь немнога меньше ω_0^2 , то затухание системы весьма велико, и уже второй максимум, следующий за начальным отклонением, может быть практически совершенно не заметен. Точно так же становится незаметным и явление резонанса — одно из наиболее характерных явлений в неавтономных колебательных системах.

Таким образом, хотя формально случай $h^2 = \omega_0^2$ и является граничным, но фактически граница между колебательным и апериодическим процессами размыта и не может быть проведена резко. Заметим, кстати, что для некоторых нелинейных систем (например, систем с «постоянным», «кулоновским» трением, или с «квадратичным» трением), как мы увидим, разделение на колебательные и периодические теряет смысл.

§ 5. Осциллятор с малой массой¹⁾

1. Линейные системы с $1/2$ степени свободы. Рассматривая линейный осциллятор при наличии трения, мы предполагали, что все три параметра осциллятора — масса (индуктивность), коэффициент трения (сопротивление) и коэффициент упругости (величина, обратная емкости) — играют одинаково существенную роль и заметно влияют на свойства и поведение системы. В тех случаях, когда трение мало, можно, как мы уже указывали, вовсе не учитывая влияния трения на движения в системе, ответить на некоторые вопросы, для которых трение играет второстепенную роль. Если же трение ве-

¹⁾ Пункты 1 и 2 переработаны Н. А Железзовым, пункты 3 и 4 написаны им заново.