затухание системы, чтобы h^2 было возможно ближе к ω_0^2. Этим, с одной стороны, устраняются колебания в системе, которые неизбежны при h^2, много меньшем, чем ω_0^2, а с другой стороны, скорость апериодического возвращения системы к нулю получается наибольшая (больше, чем при больших величинах h). Такие именно условия являются наивыгоднейшими для ряда измерительных приборов, например, для гальванометров. Но при сколь угодно малом изменении параметров системы этот предельный случай превратится в один из двух других, рассмотренных ранее. Поэтому он не представляет физического интереса и не отражает характерных черт реальной физической системы. Предельный случай имеет значение только как граница, формально разделяющая системы на колебательные и апериодические. Необходимо, однако, иметь в виду, что разделение систем на колебательные и апериодические, которое в случае линейной системы хотя и может быть математически проведено вполне строго, в сущности говоря, не имеет большого физического содержания, ибо при больших значениях h система теряет свои наиболее характерные «колебательные черты» еще до того, как h^2 достигает величины ω_0^2. Действительно, если h^2 лишь немного меньше ω_0^2, то затухание системы весьма велико, и уже второй максимум, следующий за начальным отклонением, может быть практически совершенно не заметен. Точно так же становится незаметным и явление резонанса — одно из наиболее характерных явлений в неавтономных колебательных системах.

Таким образом, хотя формально случай $h^2 = \omega_0^2$ и является граничным, но фактически граница между колебательным и апериодическим процессами размыта и не может быть проведена резко. Заметим, кстати, что для некоторых нелинейных систем (например, систем с «постоянным», «кулоновским» трением, или с «квадратичным» трением), как мы увидим, разделение на колебательные и периодические теряет смысл.

§ 5. Осциллятор с малой массой[1])

1. Линейные системы с $^1/_2$ степени свободы. Рассматривая линейный осциллятор при наличии трения, мы предполагали, что все три параметра осциллятора — масса (индуктивность), коэффициент трения (сопротивление) и коэффициент упругости (величина, обратная емкости) — играют одинаково существенную роль и заметно влияют на свойства и поведение системы. В тех случаях, когда трение мало, можно, как мы уже указывали, вовсе не учитывая влияния трения на движения в системе, ответить на некоторые вопросы, для которых трение играет второстепенную роль. Если же трение ве-

[1]) Пункты 1 и 2 переработаны Н. А Железцовым, пункты 3 и 4 написаны им заново.

лико[1]), то может встретиться другой случай, когда вследствие своей малости играет второстепенную роль один из двух других «колебательных» параметров системы — масса или коэффициент упругости (индуктивность или величина, обратная емкости).

Мы рассмотрим движение тела *малой массы* в сильно сопротивляющейся среде под действием пружины (этот случай представляет наибольший интерес для рассмотрения в дальнейшем так называемых «разрывных» колебаний). Дополнительно к тем предположениям, которые мы делали при постановке задачи о линейном осцилляторе с трением, мы пренебрежем массой движущегося тела. Тогда уравнение движения запишется в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$b\dot{x} + kx = 0 \tag{1.47}$$

(здесь, как и раньше, x — смещение относительно положения равновесия, k и b — положительные коэффициенты упругости и трения). Таким образом, в рассматриваемом случае мы пришли к системе с $^1/_2$ степени свободы. Для однозначного определения состояния такой системы достаточно задания одной величины (например, координаты x) вместо двух величин, необходимых для определения состояния систем с одной степенью свободы. Соответственно, для системы с $^1/_2$ степени свободы фазовое пространство является одномерным и представляет собой не плоскость, а *линию*.

Решение уравнения (1.47), как известно, имеет вид:

$$x = Ae^{-\frac{k}{b}t}$$

или, если ввести начальное условие $x = x_0$ при $t = 0$[2]),

$$x = x_0 e^{-\frac{k}{b}t}. \tag{1.48}$$

Очевидно, $x = 0$ является состоянием равновесия; при всех других начальных условиях ($x_0 \neq 0$) осциллятор без массы совершает апериодически затухающие движения, приближаясь (при $t \to +\infty$) к состоянию равновесия.

Ту же картину мы получим и при рассмотрении движения изображающей точки по фазовой линии — прямой x (рис. 30). Начало

---

[1]) Мы говорим «мало» и «велико», не указывая, по сравнению с чем. Как было отмечено во Введении, в таком виде эти утверждения не имеют большого содержания. Но из дальнейшего рассмотрения станет ясно, по сравнению с чем должно быть велико трение или сопротивление.

[2]) Мы не можем теперь (при принятой идеализации) задавать начальное значение скорости $\dot{x}_0$ произвольно, независимо от задания x_0, так как значения скорости $\dot{x}$ и координаты x однозначно связаны между собой уравнением (1.47), которое мы считаем справедливым в любой момент времени (для момента $t = 0$ получаем: $\dot{x}_0 = -\frac{k}{b}x_0$).

координат является состоянием равновесия; изображающая точка из других состояний двигается по направлению к состоянию равновесия (так как справа от него $\dot{x} < 0$ и слева $\dot{x} > 0$).

Системами с $^1/_2$ степени свободы являются и электрические контуры, состоящие из сопротивления и емкости (RC-контур, рис. 31) или из сопротивления и индуктивности (RL-контур, рис. 32). Это, конечно, также идеализированные системы, к которым мы прихо-

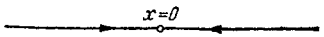

Рис. 30.

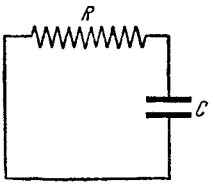

Рис. 31.

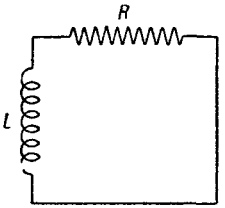

Рис. 32.

дим, отправляясь от соответствующих реальных электрических контуров, но учитывая из всего многообразия свойств и качеств этих контуров только некоторые основные, существенные для рассматриваемого круга вопросов, и пренебрегая, в частности, малыми (паразитными) индуктивностями или емкостями тех или иных элементов, составляющих контуры. Уравнения движения для таких контуров могут быть записаны в виде

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \tag{1.49}$$

для RC-контура (q — заряд конденсатора) и

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{1.50}$$

для RL-контура (i — сила тока в контуре). Их решениями, очевидно, являются:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Встает вопрос, насколько «законно» или целесообразно принятое нами представление рассматриваемых физических систем в виде систем с $^1/_2$ степени свободы, т. е. насколько точно дифференциальные уравнения первого порядка (1.47), (1.49) и (1.50) и их решения отображают движения этих реальных физических систем. Само собой разумеется, что сейчас идет речь только о тех движениях физических систем, которые начинаются из состояний, *совместимых* (с известной степенью точности) с уравнениями движения соответствующих систем с $^1/_2$ степени свободы [1]). Ответ на этот вопрос мы

[1]) Как указывалось во Введении, с помощью любой данной идеализированной системы мы можем рассматривать только те движения реальной физической системы, которые начинаются из состояний, допускаемых уравнениями этой идеализированной системы.

можем получить, сравнивая результаты, полученные решением уравнений (1.47), (1.49) или (1.50), с экспериментальными данными. Такое сравнение показывает целесообразность, «законность» применения систем с $^1/_2$ степени свободы для отображения движений соответствующих физических систем.

Мы покажем сейчас аналитически, что, например, учет малой массы осциллятора не дает ничего существенно нового, т. е. что масса, если она достаточно мала, не является существенным параметром в рассматриваемой задаче. Учтем малую массу осциллятора и сравним решение более «полного» уравнения осциллятора с малой массой

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0, \tag{1.14}$$

где m мало́, но отлично от нуля, с решением уравнения первого порядка (1.47). Задаваясь начальными условиями $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, имеем, согласно (1.40), решение в виде:

$$x=x_0\left[\frac{q_2}{q_2-q_1}e^{-q_1t}-\frac{q_1}{q_2-q_1}e^{-q_2t}\right]+\frac{\dot{x}_0}{q_2-q_1}\left[e^{-q_1t}-e^{-q_2t}\right], \tag{1.51}$$

где

$$q_1=\frac{b}{2m}-\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}, \qquad q_2=\frac{b}{2m}+\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}.$$

Для удобства сопоставления заменим точное решение (1.51) уравнения (1.14) приближенным решением $x_1(t)$, таким, что разность между $x_1(t)$ и $x(t)$ и их производными $\dot{x}_1$ и $\dot{x}$ могла быть сделана сколь угодно малой (равномерно относительно t) за счет выбора достаточно малого m.

Пользуясь разложением корня

$$\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}=\frac{b}{2m}\sqrt{1-\frac{4km}{b^2}}=\frac{b}{2m}\left(1-\frac{2km}{b^2}+\ldots\right),$$

без труда получаем:

$$x_1(t)=x_0\left[e^{-\frac{k}{b}t}-\frac{mk}{b^2}e^{-\frac{b}{m}t}\right]+\dot{x}_0\frac{m}{b}\left[e^{-\frac{k}{b}t}-e^{-\frac{b}{m}t}\right]. \tag{1.52}$$

Можно показать, что это приближенное решение аппроксимирует точное решение в том смысле, что, сколь бы ни было мало ε, всегда можно найти столь малое m, что

$$|x_1(t)-x(t)|<\varepsilon, \qquad |\dot{x}_1(t)-\dot{x}(t)|<\varepsilon$$

для всех значений t в интервале $0\leqslant t\leqslant+\infty$ [1]).

---

[1]) Заметим, что эти неравенства не могут быть заменены неравенствами вида

$$\left|\frac{x_1(t)}{x(t)}-1\right|<\varepsilon, \qquad \left|\frac{\dot{x}_1(t)}{\dot{x}(t)}-1\right|<\varepsilon, \tag{α}$$

пригодными для всех значений t, если m достаточно мало. Однако на вся-

Сравним теперь (1.48) и (1.52). Обозначая решение уравнения первого порядка через $\bar{x}$ и принимая, что начальные значения координаты для решений полного уравнения[1]) и уравнения первого порядка совпадают, имеем:

$$x_1(t)-\bar{x}(t)=\frac{m}{b}\left\{-\left(\dot{x}_0+\frac{k}{b}x_0\right)e^{-\frac{b}{m}t}+\dot{x}_0e^{-\frac{k}{b}t}\right\} \qquad (1.53)$$

и для скоростей

$$\dot{x}_1(t)-\dot{\bar{x}}(t)=\left(\dot{x}_0+\frac{k}{b}x_0\right)e^{-\frac{b}{m}t}-\frac{mk}{b^2}\dot{x}_0e^{-\frac{k}{b}t}. \qquad (1.54)$$

Так как сейчас мы рассматриваем только те движения, которые начинаются из состояний, совместных (с некоторой степенью точности) с уравнением (1.47), т. е. для которых $\dot{x}_0+\frac{k}{b}x_0=0$ или близко к нулю, то, как это сразу видно из соотношений (1.53) и (1.54), разности $x_1(t)-\bar{x}(t)$ и $\dot{x}_1(t)-\dot{\bar{x}}(t)$, а следовательно и разности $x(t)-\bar{x}(t)$ и $\dot{x}(t)-\dot{\bar{x}}(t)$, могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора достаточно малого m и притом равномерно относительно t (для всех $0\leqslant t<+\infty$). Условием близости решений (1.48) и (1.51), очевидно, является выполнение неравенства:

$$\frac{mk}{b^2}\ll 1 \quad \text{или} \quad m\ll\frac{b^2}{k}.$$

Иными словами, если начальное состояние системы *совместно* с уравнением первого порядка (1.47) (или близко к состоянию, совместному с этим уравнением), то последнее достаточно точно (тем точнее, чем меньше масса) отображает движение осциллятора с малой массой. Учет массы в этом случае дает лишь небольшие количественные поправки, не давая ничего существенно нового; масса осциллятора, если она достаточно мала, не является существенным параметром, и представление осциллятора с малой массой $\left(m\ll\frac{b^2}{k}\right)$ в виде системы с $^1/_2$ степени свободы, в виде системы *без массы*, является вполне целесообразным.

2. Начальные условия и идеализация. Рассмотрим теперь случай, когда начальное состояние осциллятора с малой массой (заданы x_0 и $\dot{x}_0$) не совместно с уравнением первого порядка (1.47), т. е. когда $\dot{x}_0\neq-\frac{k}{b}x_0$ и, следовательно, $\dot{x}_0+\frac{k}{b}x_0$ не мало. В этом случае мы, конечно, не можем ожидать, что уравнение первого по-

---

ком сколь угодно большом заданном промежутке значений t можно добиться соблюдения неравенств (α), выбрав достаточно малое m.

[1]) Полной системой, полным уравнением мы будем называть здесь ради сокращения осциллятор с учтенной массой и его уравнение.

рядка будет адекватно отображать *весь* процесс движения такого осциллятора, так как это уравнение заведомо не применимо в начальный момент времени. Изучение таких движений осциллятора с малой массой, несмотря на малость последней (масса может быть сколь угодно малой), мы должны вести, пользуясь уравнением второго порядка (1.14), с которым заданные начальные условия совместны.

Для исследования особенностей движений осциллятора с малой массой в рассматриваемом сейчас случае сравним решение уравнения (1.14) в его приближенной форме (1.52) с решением уравнения первого порядка. Обращаясь к (1.53), мы видим, что по-прежнему разность $x_1(t)-\bar{x}(t)$, а значит и $x(t)-\bar{x}(t)$, может быть сделана сколь угодно малой для всех $0\leqslant t<+\infty$ за счет выбора достаточно малого m, несмотря на то, что теперь $\dot{x}_0+\frac{k}{b}x_0$ не мало. Однако нетрудно заметить, что для скоростей ситуация будет иной. Действительно, согласно (1.54) разность $\dot{x}_1(t)-\dot{\bar{x}}(t)$ при малом фиксированном m и малых t $\left(\text{при } t\leqslant\frac{m}{b}\right)$ близка к $\dot{x}_0+\frac{k}{b}x_0$ (это вполне понятно, так как $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ и $\dot{\bar{x}}(0)=-\frac{k}{b}x_0\Big)$. Эта величина не зависит от m, и мы не можем сделать ее малой, выбирая малое m. Но, исследуя структуру выражения (1.54) и обращая внимание на быстрое уменьшение $e^{-\frac{b}{m}t}$ при фиксированном $t>0$ и уменьшающемся m, приходим к следующему заключению: выбором достаточно малого m всегда можно добиться для всех t, начиная с некоторого, сколь угодно малого, но определенного момента $\tau>0$ (для всех $\tau\leqslant t<+\infty$), выполнения неравенства

$$|\dot{x}_1(t)-\dot{\bar{x}}(t)|<\varepsilon \quad \text{или} \quad |\dot{x}(t)-\dot{\bar{x}}(t)|<\varepsilon$$

(здесь, как и раньше, ε — любая наперед заданная сколь угодно малая положительная величина).

Таким образом, на начальном этапе движения (при $0\leqslant t\leqslant\tau$) скорость осциллятора с малой массой весьма быстро меняется (тем быстрее, чем меньше масса) от начального значения $\dot{x}_0$ до значений, близких к получаемым из решения уравнения (1.47). Изменение координаты за этот промежуток времени τ, само собой разумеется, стремится к нулю вместе с τ (или, что то же самое, вместе с m)[1]).

---

[1]) Длительность этого начального этапа движения τ, в течение которого происходит быстрое изменение скорости, по порядку величины совпадает с $\frac{m}{b}$: за время $\frac{m}{b}$ первый, главный член в выражении (1.54) уменьшится в e раз ($e\approx 2{,}7$), а через время $5\frac{m}{b}$ — примерно в 150 раз.

Совершенно ясно, что движение осциллятора с малой массой на этом этапе движения с быстрыми изменениями скорости и, следовательно, с большими ускорениями не может быть отображено уравнением первого порядка (1.47), ибо существенную роль играет масса, даже сколь угодно малая (член $m\ddot{x}$ не мал по сравнению с другими членами уравнения (1.14), несмотря на малость массы m). Только после того, как осциллятор придет через время τ в состояние, близкое к совместному с уравнением (1.47) (а это как раз и означает, что член $m\ddot{x}$ стал очень малым), скорость осциллятора перестанет быстро изменяться и его движение будет отображаться уравнением первого порядка (1.47) $\left(\text{тем точнее, чем меньше } \frac{mk}{b^2}\right)$.

Рассмотрим для пояснения сказанного движение осциллятора с малой массой при следующих начальных условиях: при $t=0$ $x=x_0$, $\dot{x}=0$ (эти начальные условия, конечно, не совместны с уравнением (1.47)). Пока $\dot{x}$ очень мало, член $b\dot{x}$ не играет роли, и, как следует из полного уравнения (1.14), ускорение определяется приблизительно выражением

$$\ddot{x} \approx -\frac{k}{m}x,$$

и так как m очень мало, то ускорение в системе очень велико — скорость чрезвычайно быстро возрастает. Вместе с тем возрастает и сила трения, и все бо̀льшая и бо̀льшая часть силы пружины расходуется на преодоление трения. Вследствие этого ускорение системы становится все меньше и меньше, и в конце концов член $m\ddot{x}$ перестает играть заметную роль. Дальнейшее движение системы уже может быть удовлетворительно описано уравнением первого порядка (1.47). К этому времени скорость приобретает такое значение, которое связано со значением координаты уравнением (1.47), так как при исчезновении члена $m\ddot{x}$ устанавливается приблизительное равенство между членами kx и $(-b\dot{x})$. Так совершается этот быстрый переход от состояния, не совместимого с уравнением (1.47), к состоянию, которое этим уравнением допускается. Мы проследили этот переход аналитически, пользуясь полным уравнением второго порядка (1.14) и его решением (1.52).

При этом мы убедились, что если m достаточно мало, то ускорения вначале очень велики и скорость изменяется очень быстро: система за очень короткий промежуток времени переходит в состояние, совместимое (конечно, с известной степенью точности) с уравнением первого порядка, причем этот промежуток времени настолько мал, что, несмотря на большие ускорения, координата системы не успевает сколько-нибудь заметно измениться.

3. Условия скачка. Как мы видели, при переходе к состоянию, совместимому с уравнением первого порядка, скорость системы изменяется очень быстро, координата же системы остается почти неизменной. Но если самый переход совершается достаточно быстро,

нас часто не интересуют его подробности. Мы можем рассматривать этот быстрый переход как мгновенный скачок и ограничиться только определением того конечного состояния, в которое «перескакивает» система и начиная с которого поведение системы определяется уравнением первого порядка (1.47). Мы можем, следовательно, рассматривать систему как не обладающую массой, но должны применить иной метод рассмотрения всего процесса: должны *дополнить* дифференциальное уравнение первого порядка *условием скачка*, которое заменило бы нам прежнее рассмотрение кратковременного начального этапа движения, определяя то состояние, в которое приходит система быстрым, «мгновенным» переходом и начиная с которого справедливо уравнение первого порядка. Это условие скачка, по существу являющееся своеобразной формой учета малых параметров (в данном случае — малой массы осциллятора), существенных на начальной стадии движения, формулируется либо на основании рассмотрения системы с учетом этих малых существенных параметров (это регулярный метод), либо на основании тех или иных *дополнительных* физических соображений или экспериментальных данных [1]).

Условие скачка для рассматриваемого случая можно, очевидно, сформулировать следующим образом. Если начальное состояние системы (*заданы* x_0, $\dot{x}_0$) не удовлетворяет уравнению первого порядка (1.47), то система скачком переходит в состояние, совместное с этим уравнением, причем *при скачке* скорость системы $\dot{x}$ изменяется мгновенно, а *координата* x *остается неизменной*. После такого скачка начинается уже непрерывное движение системы, определяемое уравнением (1.47). Заметим, что здесь при формулировке условия скачка мы, в сущности, руководствовались результатами рассмотрения системы с помощью уравнения второго порядка (1.14), и наш постулат является только упрощенной формулировкой этих результатов.

Условие скачка можно получить и из рассмотрения разбиения фазовой плоскости «полной» системы на фазовые траектории в *предельном случае* $m \to 0$ (рис. 33). Обозначив, как обычно, $\dot{x} = y$, запишем уравнения движения «полной» системы в виде:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{kx + by}{m}. \tag{1.55}$$

На фазовой плоскости x, y фазовой линией системы с $^1/_2$ степени свободы ($m = 0$) является прямая

$$kx + by = 0. \tag{1.56}$$

---

[1]) Подобным приемом — введением постулатов, которыми заменяют более детальное рассмотрение тех или иных процессов, — пользуются часто. Например, при рассмотрении задачи об ударе в механике обычно отказываются от рассмотрения самого процесса соударения тел и заменяют это рассмотрение представлением о «мгновенном» ударе, добавляя некоторые постулаты, которые позволяют, не рассматривая процесса соударения в деталях, установить те состояния, в которых будут находиться тела непосредственно после соударения.

Очевидно, в любой точке (x, y) фазовой плоскости *вне* этой прямой (там $kx+by\neq 0$) $\dot{y}\to\infty$ при $m\to 0$ (а $\dot{x}$ остается конечной), т. е. всюду вне прямой (1.56) происходят быстрые, в пределе скачкообразные, изменения состояний системы (скачком меняется скорость y). Далее, согласно (1.55):

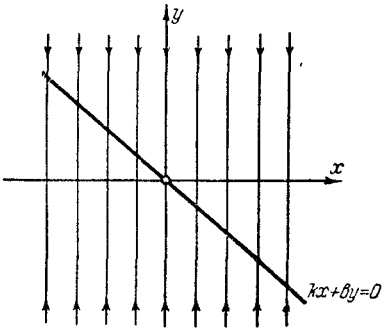

Рис. 33.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{kx+by}{my}.$$

Поэтому вне прямой $kx+by=0$ при $m\to 0$ $\frac{dy}{dx}\to\infty$ и фазовыми траекториями являются вертикальные прямые ($x=\text{const}$). По ним изображающая точка *скачком* (с фазовой скоростью, стремящейся к бесконечности при $m\to 0$; при скачке x не изменяется) идет к фазовой линии системы с $^1/_2$ степени свободы — к прямой (1.56), так как над этой прямой $kx+by>0$ и $\dot{y}\to-\infty$ при $m\to 0$ и под ней $\dot{y}\to+\infty$. Так как *все* фазовые траектории быстрых скачкообразных движений приходят к прямой $kx+by=0$, то дальнейшее движение изображающей точки происходит по этой прямой (по направлению к состоянию равновесия). Подобными приемами получения условий скачка мы часто будем пользоваться в дальнейшем при рассмотрении «разрывных» колебаний.

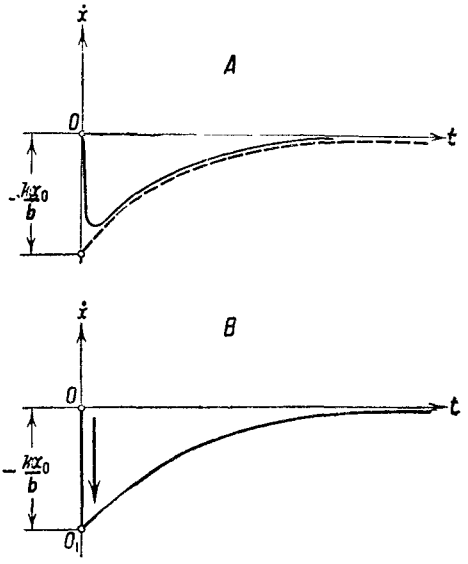

Рис. 34.

Поясним наглядно, при помощи чертежей, смысл введенного нами условия скачка. Так как в рассматриваемом случае скачком меняется скорость, то сопоставим диаграмму скорости по времени для случая $m\neq 0$ (уравнение второго порядка) с такой же диаграммой для $m=0$ (уравнение первого порядка плюс условие скачка).

В начальный момент произвольно могут быть заданы x и $\dot{x}$. Пусть, например, при $t=0$ $x=x_0$ $(x_0>0)$, $\dot{x}=0$. Зависимость

скорости от времени, как нетрудно выяснить, следуя уравнению второго порядка, имеет вид, изображенный на рис. 34, *A* (при построении принято, что $m \ll \frac{b^2}{k}$). Если же мы будем пользоваться уравнением первого порядка, то начальное значение $x = x_0$ автоматически дает начальное значение $\dot{x} = -\frac{k}{b} x_0$ и дальнейшее изменение скорости со временем согласно рис. 34, *B*. Скачок, уничтожающий конфликт между начальными условиями $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ и дифференциальным уравнением первого порядка, изображен на рис. 34, *B* отрезком OO_1.

Легко видеть сходство рис. 34, *A* и *B*; физический смысл этого сходства был выяснен нами в пункте 2.

4. Другие примеры. Рассмотрим теперь колебания *RC*- или *RL*-контура, которые начинаются из состояний, не удовлетворяющих соответствующему уравнению первого порядка:

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \tag{1.49}$$

или

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0. \tag{1.50}$$

Для рассмотрения таких колебаний мы должны или перейти к другим, более «полным» идеализациям соответствующих реальных электрических контуров, учитывая необходимые существенные малые параметры[1]), или дополнить уравнения (1.49) или (1.50) соответствующими условиями скачка.

Пусть в начальный момент $t = 0$ в *RC*-контуре заданы такие начальные значения заряда q_0 и тока $\dot{q}_0$, а в *RL*-контуре — значения тока i_0 и $\left(\frac{di}{dt}\right)_0$, которые не удовлетворяют уравнениям первого порядка для этих контуров (например, начальные состояния $q_0 \neq 0$, $\dot{q}_0 = 0$ и $i_0 \neq 0$, $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = 0$, которые могут быть заданы замыканием ключа в схемах, изображенных на рис. 35 и 36). Чтобы получить системы, совместные с заданными начальными условиями, учтем в случае *RC*-контура малую индуктивность, которой обладают сопротивление и соединительные провода, и в случае *RL*-контура — малую емкость, которой обладают катушка самоиндукции, сопротивление

---

[1]) То, какие малые параметры являются существенными и должны быть учтены, зависит от того начального состояния, которое задано в реальной системе. Во всяком случае идеализированная модель, получаемая в результате учета этих малых параметров, должна быть совместной с заданным начальным состоянием.

и соединительные провода. Представляя эти малые паразитные индуктивности и емкости в виде сосредоточенных, мы придем к систе-

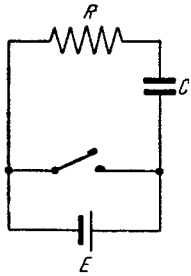

Рис. 35.

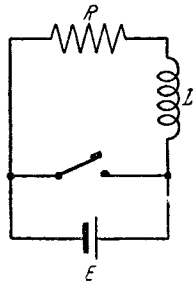

Рис. 36.

мам, схемы которых изображены на рис. 37 и 38 (там L_0 и C_0 — малые паразитные индуктивность и емкость). Уравнения колебаний теперь запишутся в виде

$$L_0\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

для схемы на рис. 37 и

$$C_0LR\frac{d^2i}{dt^2} + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

для схемы на рис. 38, т. е. в виде линейных уравнений второго порядка с малым положительным коэффициентом при старшей произ-

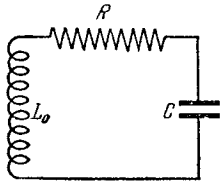

Рис. 37.

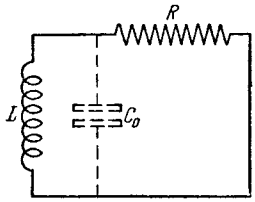

Рис. 38.

водной, полностью аналогичных уравнению (1.14) для движения осциллятора с малой массой, которое нами было подробно рассмотрено в пункте 2 настоящего параграфа.

На основании этой аналогии мы можем утверждать, что в начальной стадии движения в RC-контуре (при малой индуктивности L_0) будут происходить быстрые изменения силы тока $i = \dot{q}$ (заряд конденсатора q за это время почти не меняется), а в RL-контуре (при малой емкости C_0) — быстрые изменения $\frac{di}{dt}$, или э. д. с. самоиндук-

ции (ток i при этом почти не меняется). В результате быстрых изменений тока (в первом случае) и э. д. с. самоиндукции (во втором) системы за малый промежуток времени, длительность которого по порядку величин совпадает с $\frac{L_0}{R}$ или C_0R, приходят в состояния, близкие к совместным с уравнением первого порядка (1.49) или (1.50). Дальнейшие движения удовлетворительно отображаются уравнениями первого порядка $\left(\text{тем точнее, чем меньше по сравнению с единицей } \frac{L_0}{CR^2} \text{ в первом случае и } \frac{C_0R^2}{L} \text{ — во втором}\right)$[1]).

Если нас не интересуют подробности этих быстрых изменений, мы можем не принимать во внимание малую индуктивность L_0 в RC-контуре и малую емкость C_0 в RL-контуре и вместо детального рассмотрения начальной стадии движения ввести соответствующие условия скачка.

Для RC-контура мы должны допустить скачки тока i при неизменном заряде конденсатора q; для RL-контура — скачки э. д. с. самоиндукции $\left(\text{или } \frac{di}{dt}\right)$ при неизменном токе i.

Если бы мы допустили мгновенные изменения силы тока в цепи с самоиндукцией, т. е. допустили бы, что в некоторые моменты $\frac{d^2q}{dt^2}=\infty$, то на концах катушки самоиндукции мы должны были бы допустить возникновение бесконечно большой э. д. с. самоиндукции $L\frac{d^2q}{dt^2}$. С другой стороны, если бы мы допустили мгновенные изменения заряда на обкладках конденсатора, то это вынудило бы нас допустить возникновение бесконечно больших токов в контуре (так как если q изменяется скачком, то $\left.\frac{dq}{dt}=i=\infty\right)$. Как те, так и другие изменения запрещаются установленными нами постулатами о характере скачков[2]).

Заметим, что во всех трех рассмотренных примерах мы имели дело с *консервативными* скачками, т. е. с такими скачками, при которых энергия системы не менялась. В самом деле, в случае осциллятора без массы вся энергия системы состояла из потенциальной энергии пружины и равнялась $\frac{kx^2}{2}$ (кинетическая энергия равнялась

---

[1]) На основании этой же аналогии мы можем утверждать, что те же малые паразитные емкости и индуктивности являются несущественными, второстепенными параметрами для колебаний в контурах при начальных условиях, совместных с соответствующими уравнениями первого порядка.

[2]) Можно, очевидно, получить сформулированные выше условия скачка из постулата *ограниченности* токов и напряжений на отдельных элементах контуров. Этот постулат, конечно, не является следствием уравнений первого порядка, а является дополнительным физическим предположением.

нулю в силу предположения, что $m=0$). При скачке координата x оставалась неизменной, следовательно, не менялась и энергия. Точно так же в RC-контуре энергия системы состояла из энергии электрического поля в конденсаторе $\left(\text{энергия равнялась } \frac{q^2}{2C}\right)$, в RL-контуре — из энергии магнитного поля катушки самоиндукции $\left(=\frac{Li^2}{2}\right)$, и, поскольку при скачке не менялся в первом случае заряд конденсатора q и во втором — ток i, энергия также оставалась неизменной.

Не следует, однако, думать, что консервативность является непременным условием, справедливым для любых скачков. Уже в механике при рассмотрении ударов приходится часто пользоваться представлением о неконсервативных ударах (при ударе кинетическая энергия соударяющихся тел «мгновенно» уменьшается). С подобными же скачками, при которых энергия системы меняется, мы встретимся в дальнейшем (в теории часов и лампового генератора с Г-характеристикой). Сейчас же мы приведем только один пример системы с неконсервативными скачками.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 39. Состояние схемы, получаемое непосредственно после замыкания ключа (ток в сопротивлении и напряжение на конденсаторе C_1 равны нулю, напряжение на конденсаторе C_2 равно E), очевидно, не совместимо с уравнением (1.49) для RC-контура с емкостью $C=C_1+C_2$. Пренебрегая сопротивлением и индуктивностью ключа (в замкнутом состоянии) и проводов, соединяющих конденсаторы C_1 и C_2, мы должны допустить, что после замыкания ключа по проводам, соединяющим эти конденсаторы, потекут бесконечные токи, в результате чего напряжения на конденсаторах C_1 и C_2, а также ток через сопротивление изменятся скачком. В конце этого «мгновенного» скачка напряжения на конденсаторах должны стать одинаковыми (обозначим это напряжение через v_0), а ток через сопротивление R должен быть равным v_0/R. Для определения v_0 заметим, что во время «мгновенного» перезаряда конденсаторов суммарный заряд конденсаторов не должен изменяться, ибо токи через сопротивление R всегда конечны. Таким образом,

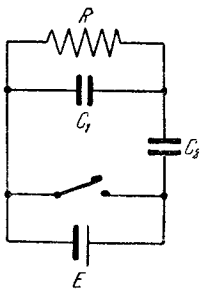

Рис. 39.

$$C_1\cdot 0+C_2\cdot E=(C_1+C_2)\,v_0,$$

откуда

$$v_0=\frac{C_2E}{C_1+C_2}.$$

После такого скачка тока, зарядов и напряжений на конденсаторах, когда напряжения на конденсаторах уравняются, начнется непрерыв-

ное движение, определяемое, очевидно, уравнением (1.49) (с емкостью $C = C_1 + C_2$). Как легко подсчитать, энергия системы при таком скачке *уменьшается*. В самом деле, сравним энергию системы до скачка $\frac{C_2E^2}{2}$ с энергией системы после скачка $\frac{1}{2}(C_1 + C_2)v_0^2$. Очевидно,

$$\frac{1}{2}(C_1 + C_2)v_0^2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{C_2E^2}{2} < \frac{C_2E^2}{2}.$$

Мы рассмотрели сейчас скачок в системе, опираясь на добавочное (по отношению к уравнению (1.49)) предположение о сохранении при скачке суммы зарядов конденсаторов. То же самое можно сделать и путем рассмотрения более «полной» системы, которая уже допускает заданное начальное состояние; например, это может быть система, в которой учитывается малое сопротивление проводов R_1, соединяющих конденсаторы (рис. 40). Мы предоставляем читателю проделать это рассмотрение и доказать на его основе примененное нами условие скачка.

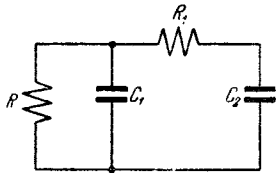

Рис. 40.

Приведенными примерами в достаточной степени поясняется все сказанное относительно систем, движения которых отображаются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с малыми положительными коэффициентами при второй производной.

Как мы видели, в таких системах на начальной стадии движения могут иметь место (при соответствующих начальных условиях) быстрые изменения состояний, после которых движение описывается достаточно удовлетворительно соответствующим уравнением первого порядка. Эти быстрые изменения состояний, во время которых играют существенную роль те или иные малые параметры, могут быть проанализированы только при учете последних, т. е. в результате решения соответствующих уравнений второго порядка, несмотря на то, что движения системы после этих быстрых изменений состояний достаточно точно отображаются уравнением первого порядка. Однако, если нас не интересуют детали этой начальной и весьма кратковременной стадии движения, мы можем заменить это рассмотрение уравнения второго порядка предположением о том, что состояние, совместное с уравнением первого порядка, устанавливается мгновенно, скачком. При этом мы должны ввести новый постулат (условие скачка), который определял бы то состояние, в которое приходит система в результате скачка и начиная с которого движение системы отображается соответствующим уравнением первого порядка.

Это представление о скачкообразных изменениях состояний системы будет нами широко использоваться в дальнейшем при изучении систем с «разрывными» колебаниями (см. гл. X).