

§ 6. Линейные системы с «отрицательным трением»

В обычных системах с трением, примеры которых мы рассмотрели выше, коэффициент $h = \frac{b}{2m}$ (или в электрических системах $h = \frac{R}{2L}$) является всегда положительной величиной, ибо трение всегда препятствует движению и $b > 0$ (точно так же и $R > 0$). Положительный коэффициент трения и положительное сопротивление соответствуют тому, что на преодоление сил трения (или сопротивления в электрической цепи) расходуется энергия. Действительно, если в уравнении движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.14)$$

умножить все члены на $\frac{dx}{dt}$ и затем взять интеграл за некоторый промежуток времени от 0 до τ , то получим:

$$m \int_0^\tau \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} dt + \int_0^\tau b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + \int_0^\tau kx \frac{dx}{dt} dt = 0.$$

Произведя интегрирование, имеем:

$$\left| \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right|_0^\tau + \left| \frac{kx^2}{2} \right|_0^\tau = - \int_0^\tau b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt. \quad (1.57)$$

Слева стоят члены, выражающие изменение кинетической и потенциальной энергии системы за время от 0 до τ ; сумма их, очевидно, определяет изменение полной энергии системы за этот промежуток времени. Если $b > 0$, то интеграл, стоящий справа, положителен и изменение энергии отрицательно, т. е. энергия системы убывает. Эта убыль энергии обусловлена потерями энергии на трение.

Если бы b , а вместе с тем и h было отрицательно, то энергия системы возрастала бы, и «трение» в этом случае явилось бы источником энергии. Ясно, что в системе, не обладающей собственным источником энергии, это невозможно, и b , а вместе с тем и h , всегда положительно. Но если система обладает собственным резервуаром энергии, то, вообще говоря, можно допустить, что $h < 0$ и что энергия системы возрастает за счет «трения» или «сопротивления». Конечно, это уже не будет трение или сопротивление в обычном смысле. Но поскольку оно характеризуется тем же членом дифференциального уравнения, что и обычное трение, именно членом, содержащим $\frac{dx}{dt}$, мы будем и в случае отрицательного h применять термин «трение» и «сопротивление» и будем говорить об «отрицательном трении» и «отрицательном сопротивлении».

1. Механический пример. Простейшим примером такой механической системы, в которой «трение» в известной области отрица-

тельно, может служить устройство, изображенное на рис. 41. На движущейся равномерно со скоростью v_0 ленте лежит масса m , укрепленная пружинами k_1 и k_2 . Сила трения ленты о груз есть некоторая, вообще говоря довольно сложная, функция относительной скорости ленты и тела. Если мы обозначим смещения груза через x , а его скорость через \dot{x} , то сила трения, действующая на массу m , как функция относительной скорости $v = v_0 - \dot{x}$ может быть записана таким образом: $F(v_0 - \dot{x})$. Если обозначить «результатирующий» коэффициент упругости через k и считать пропорциональными первой степени скорости все остальные силы трения, действующие в этой системе (например, сопротивление воздуха или внутреннее трение в пружинах), то уравнение движения массы m напишется так:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}), \quad (1.58)$$

где, как уже было указано, $F(v) = F(v_0 - \dot{x})$ — функция, характеризующая зависимость силы трения от относительной скорости v , или, иначе, *характеристика трения*. Не прецизируя вида функции $F(v_0 - \dot{x})$, можно ограничить рассмотрение областью, в которой $|\dot{x}| \ll v_0$ (например, выбрав достаточно большое v_0), в этой области разложить функцию F в ряд вблизи значений v_0 и ограничиться одним первым членом ряда. Тогда $F(v_0 - \dot{x}) = F(v_0) - \dot{x}F'(v_0) + \dots$, и при этом ограничении уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} + [b + F'(v_0)]\dot{x} + kx = F(v_0). \quad (1.59)$$

Стоящий справа постоянный член обуславливает только смещение положения равновесия на величину $\frac{F(v_0)}{k}$ в направлении движения ленты. Что же касается коэффициента $b + F'(v_0)$, стоящего при \dot{x} , то его знак и величина зависят от вида характеристики трения; величина $F'(v_0)$ представляет собой угол наклона характеристики трения в точке v_0 и в случае падающей характеристики трения $F'(v_0) < 0$. Если характеристика трения в области v_0 спадает достаточно круто, то $b + F'(v_0) < 0$ и уравнение (1.59) описывает систему с «отрицательным трением». Практически этот случай довольно легко реализовать, так как характеристики трения сухих поверхностей имеют обычно вид, изображенный на рис. 42, и, значит, почти всегда имеют вначале, при малых скоростях, более или менее значительный участок достаточно крутого спадания. В этой области наше устройство и будет представлять собой линейную систему с «отрицательным трением». Нужно, однако, иметь в виду, что мы пришли к линейной системе с отрицательным трением, ограничившись областью, где $|\dot{x}| \ll v_0$. Это ограничение, как мы увидим в дальнейшем, является

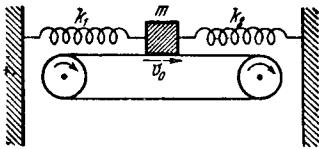


Рис. 41.

весьма принципиальным и при рассмотрении интересующих нас вопросов будет играть очень существенную роль.

Другим примером механической системы, в которой «трение» в известной области отрицательно, может служить так называемый маятник Фроуда [117, 63, 116]. Устройство этого маятника таково: на равномерно вращающемся с угловой скоростью Ω валу подвешен с некоторым трением обычный маятник (рис. 43). Уравнение движения этого маятника будет отличаться от уравнения движения обычного маятника только тем, что в этом уравнении должен быть учтен момент силы трения вращающегося вала о подшипник, на котором подвешен маятник. Так как сила трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, т. е. в нашем случае от относи-

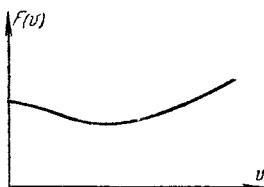


Рис. 42.

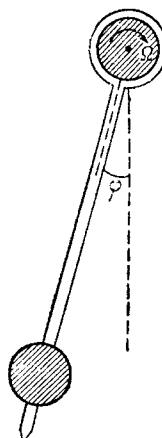


Рис. 43.

тельной угловой скорости вала и маятника ($\Omega - \dot{\phi}$), то момент силы трения можно написать так:

$$F(\Omega - \dot{\phi}).$$

Учитывая, помимо трения маятника о вал, сопротивление воздуха и считая, что оно пропорционально скорости $\dot{\phi}$, мы получим уравнение движения маятника в следующем виде:

$$I\ddot{\phi} + b\dot{\phi} + mg l \sin \phi = F(\Omega - \dot{\phi}). \quad (1.60)$$

Состояния равновесия ($\phi = \phi_0$, $\dot{\phi} = 0$), очевидно, определяются уравнением

$$mg l \sin \phi_0 = F(\Omega).$$

Рассмотрим движение маятника вблизи нижнего состояния равновесия (для него $\cos \phi_0 > 0$). Положим

$$\phi = \phi_0 + \psi,$$

где ψ — малая величина (малой будем считать и скорость $\dot{\phi} = \dot{\psi}$). Разложим нелинейные функции $\sin \phi$ и $F(\Omega - \dot{\phi})$ в ряды по степе-

ням ψ и $\dot{\psi}$; ограничиваясь линейными членами, мы получим линеаризованное уравнение *малых колебаний* маятника в виде:

$$\ddot{\psi} + [b + F'(\Omega)]\dot{\psi} + mgI \cos \varphi_0 \cdot \psi = 0. \quad (1.61)$$

Если $F'(\Omega) < 0$ и по абсолютной величине больше b , то коэффициент при $\dot{\psi}$ будет отрицателен. В некоторой области значений Ω , где характеристика трения спадает достаточно круто, при достаточно малом b можно достигнуть того, что $b + F'(\Omega)$ станет отрицательным, и мы получим уравнение, аналогичное уравнению обычной системы с трением:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

но с той разницей, что коэффициент h будет отрицателен, т. е. мы снова получим линейную систему с «отрицательным трением». Мы видим, следовательно, что при надлежащем выборе v_0 в первой системе и Ω во второй можно осуществить механическую систему, которую в определенной ограниченной области можно рассматривать как линейную систему с отрицательным трением¹⁾.

2. Электрический пример. Вполне возможно также осуществить и электрическую систему, «сопротивление» которой в известной области отрицательно. Примером такой системы может служить ламповый генератор, т. е. схема с электронной лампой, колебательным контуром и «обратной связью». Для определенности рассмотрим простейшую схему генератора с индуктивной обратной связью и колебательным контуром в цепи сетки (рис. 44)²⁾, пренебрегая сеточными токами. При выбранных положительных направлениях токов и положительной полярности конденсатора для колебательного контура можем (на основании законов Кирхгофа) написать следующие уравнения:

$$i = -C \frac{dv}{dt}, \quad Ri = v - L \frac{di}{dt} - M \frac{di_a}{dt}$$

$(-M \frac{di_a}{dt})$ представляет собой э.д.с. обратной связи, наводимую

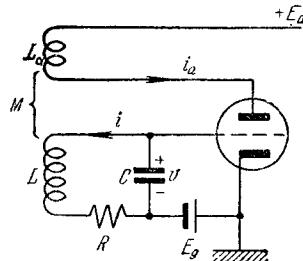


Рис. 44.

¹⁾ Примером механической системы с «отрицательным трением» может также служить колебательная система с однофазным асинхронным мотором [44].

²⁾ Заметим, что аналогичное рассмотрение можно провести для генератора с индуктивной обратной связью и колебательным контуром в цепи анода. Мы не будем рассматривать других схем лампового генератора, так как их рассмотрение либо не дает ничего принципиально нового, либо приводит к дифференциальному уравнению третьего порядка, т. е. к системам с полутора степенями свободы, и таким образом выходит за пределы настоящей книги.

в контуре благодаря воздействию на контур анодного тока, протекающего по катушке L_a) или

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = M \frac{di_a}{dt}. \quad (1.62)$$

Пренебрегая анодной реакцией, т. е. считая анодный ток i_a зависящим только от сеточного напряжения $u_g = v$ (это достаточно хорошо выполняется для триодов с большим коэффициентом усиления или, еще лучше, для пентодов), очевидно, имеем:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{du_g} \cdot \frac{dv}{dt} = S(v) \frac{dv}{dt}, \quad (1.63)$$

где $S = \frac{di_a}{du_g} = S(u_g)$ — крутизна характеристики лампы, конечно, зависящая от сеточного напряжения u_g . Примерная характеристика лампы, а также зависимость крутизны характеристики S от u_g приведены на рис. 45.

Подставляя выражение (1.63) в (1.62), получим:

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + [RC - MS(v)] \frac{dv}{dt} + v = 0 \quad (1.64)$$

— *нелинейное уравнение колебаний лампового генератора*, которое будет нами подробно рассматриваться в дальнейшем. Сейчас же мы

рассмотрим только *малые колебания* в контуре генератора вблизи состояния равновесия $v = 0$. Ограничиваюсь некоторой достаточно малой областью изменения напряжений v , мы будем считать S постоянной: при достаточно малых v $S(v) = S_0$ — крутизна характеристики в рабочей точке. Тогда для таких малых колебаний получим *линейное уравнение*:

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + [RC - MS_0] \frac{dv}{dt} + v = 0. \quad (1.65)$$

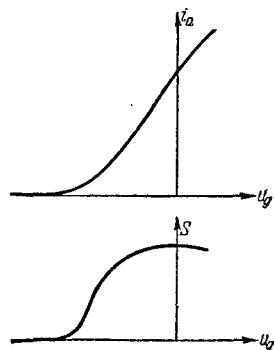


Рис. 45.

Знак коэффициента взаимоиндукции M (при выбранных положительных направлениях токов i и i_a) определяется относительным расположением витков катушек L и L_a . Предположим, что $M > 0$, т. е. катушки L и L_a включены так, что токи i и i_a , текущие в направлениях, указанных на рис. 44 стрелками ($i > 0$, $i_a > 0$), создают в катушке L магнитные потоки, усиливающие друг друга. В таком случае при достаточно большом абсолютном значении M можно достигнуть того, что величина $RC - MS_0$ станет отрицательной. Мы получаем,

таким образом, электрическую систему, описываемую также линейным уравнением:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2h \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0 \quad \left(h = \frac{RC - MS_0}{2LC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \right),$$

причем $h < 0$. Таким образом, надлежащим выбором величины и знака M можно осуществить электрическую систему, которую в известной ограниченной области можно рассматривать как линейную систему с «отрицательным сопротивлением».

Все рассмотренные системы приводят нас к линейному дифференциальному уравнению вида $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, причем в отличие от прежних случаев h в этом уравнении отрицательно (ω_0^2 по-прежнему положительно). Для исследования поведения этих систем мы можем применить те методы, которые развиты выше. Но поскольку эти методы применимы независимо от знака h , мы не будем повторять всех выкладок, а просто используем результаты, полученные в § 4 для случая $h > 0$.

3. Картина на фазовой плоскости.
Для того чтобы выяснить характер интегральных кривых на фазовой плоскости в случае $h < 0$, достаточно в обоих рассмотренных случаях линейного осциллятора (при малом и большом трении) проследить, как изменится установленная нами раньше картина при изменении знака h .

Для случая $h^2 < \omega_0^2$, т. е. для случая не слишком большого «отрицательного трения», мы получим снова семейство спиралей, определяемых уравнением

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C^2 e^{2 \frac{h}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y + hx}{\omega x}}, \quad (1.29)$$

или в полярных координатах на плоскости u , v

$$\rho = C e^{\frac{h}{\omega} \varphi}, \quad (1.28)$$

где, как и раньше,

$$\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - h^2} \quad \text{и} \quad \varphi = -(\omega t + \alpha).$$

Но, так как теперь $h < 0$, то с уменьшением φ (φ уменьшается при возрастании t) ρ будет возрастать (рис. 46), т. е. ход спиралей изменится на обратный по сравнению с тем, который мы получили для систем с положительным h . Следовательно, двигаясь по интегральной кривой, представляющей точка будет удаляться от состоя-

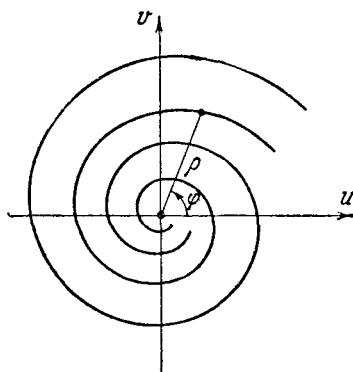


Рис. 46.

ния равновесия (особой точки $x=0, y=0$). Особая точка и в этом случае представляет собой асимптотическую точку семейства вложенных друг в друга спиралей, т. е. является особой точкой типа фокуса (рис. 47).

Скорость движения изображающей точки по фазовой плоскости по-прежнему обращается в нуль только в начале координат и возрастает по мере удаления представляющей точки от начала координат. Так как, кроме того, эта скорость везде направлена по инте-

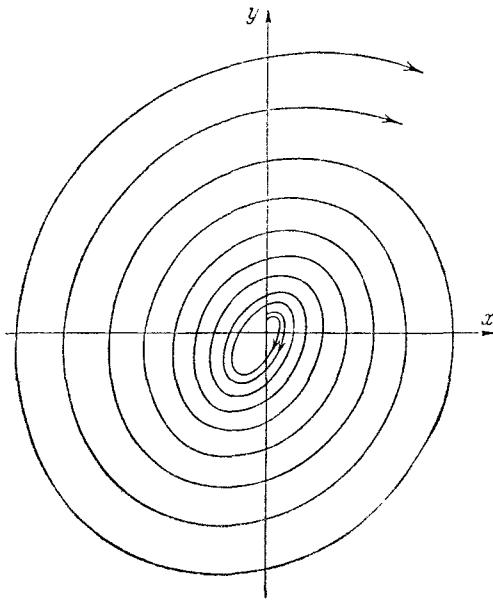


Рис. 47.

гральной кривой в направлении от начала координат, то при любом (но отличном от нуля) начальном отклонении системы от состояния равновесия система через достаточный промежуток времени уйдет как угодно далеко от этого единственного состояния равновесия; в силу этого мы не можем указать такую область $\delta(\varepsilon)$, чтобы находящаяся в ней в начальный момент представляющая точка не ушла никогда за пределы заданной области ε . Следовательно, единственное положение равновесия в этом случае неустойчиво: особая точка представляет собой неустойчивый фокус. Совершенно ясно, что неустойчивость этого фокуса обусловлена именно тем, что $h < 0$. Мы видим, таким образом, что в случае $h < 0$ и $h^2 < \omega_0^2$ движение системы представляет собой также осцилляторный процесс, как и в случае малого положительного h , но процесс уже не затухающий,

а нарастающий. Максимальные отклонения системы со временем нарастают (рис. 48), и зависимость отклонений от времени определяется выражением вида $x = Ke^{-ht} \cos(\omega t + \alpha)$, где $h < 0$. Закон нарастания максимумов — геометрическая прогрессия с знаменателем $e^{-hT} = e^{-d}$, причем, так как $h < 0$, то $d < 0$ и $e^{-d} > 1$. Величина $d_1 = -d > 0$ в этом случае носит название *логарифмического инкремента* нарастания колебаний. Те оговорки, которые сделаны выше относительно декремента, целиком относятся к инкременту: понятие логарифмического инкремента применимо также только к линейным системам.

Итак, поскольку мы ограничиваемся линейной трактовкой системы, мы получаем беспрепятственно нарастающий осцилляторный процесс.

Таким же образом можно проследить характер поведения интегральных кривых для случая большого «отрицательного трения»: $h < 0$, $h^2 > \omega_0^2$, когда семейство интегральных кривых определяется уравнением (1.45):

$$(y + q_1x)^{q_1} = C_1(y + q_2x)^{q_2},$$

где

$$q_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

и

$$q_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}.$$

Так как $h < -\omega_0 < 0$, то $q_1 < q_2 < 0$, что приводит к изменению положения интегральных прямых $y + q_1x = 0$ и $y + q_2x = 0$; обе эти прямые будут в этом случае проходить через первый и третий квадранты, так как x и y — одного знака (рис. 49).

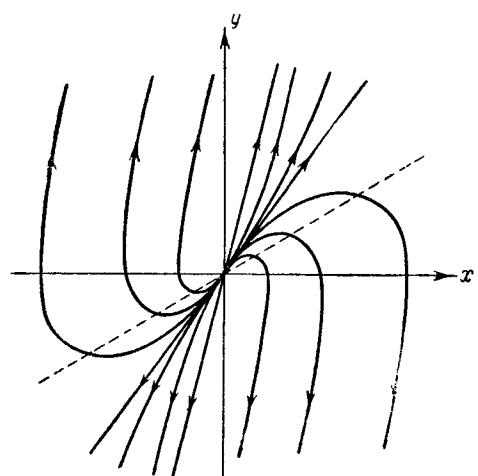


Рис. 49.

Мы снова получаем семейство интегральных кривых «параболического» типа, причем все кривые проходят через единственную особую точку, лежащую в начале координат. Это — особая точка типа узла.

Определяя направление движения представляющей точки по фазовой плоскости, мы легко убедимся в том, что движения эти происходят в направлениях, указанных на рисунках стрелками, и следовательно,

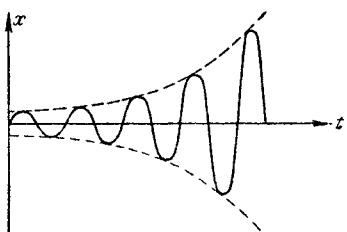


Рис. 48.

представляющая точка в своем движении по любой из интегральных кривых стремится уйти от состояния равновесия. О скорости движения представляющей точки мы можем повторить все то, что сказано выше. Следовательно, как бы мало ни было начальное отклонение системы от состояния равновесия ($x = 0$, $y = 0$), она по прошествии достаточно длинного промежутка времени уйдет достаточно далеко от состояния равновесия, и значит, это состояние равновесия неустойчиво. Мы снова не можем указать такой конечной области начальных значений $\delta(\epsilon)$, чтобы представляющая точка не вышла из заданной области ϵ .

Рассматриваемая особая точка есть неустойчивый узел, причем опять-таки неустойчивость обусловлена тем, что $h < 0$. Мы получили апериодический процесс, нарастающий по закону: $x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, где λ_1 и λ_2 положительны. И поскольку мы рассматриваем систему как линейную, это нарастание в ней будет продолжаться беспрепятственно.

Рассматривая систему как линейную, мы не находим в ней устойчивых стационарных состояний; она не может осться в области, близкой к состоянию равновесия, — отклонения в линейной системе должны беспрерывно возрастать. Между тем при описании механической и электрической систем, которые привели нас к этим случаям, для того чтобы прийти к линейным уравнениям, мы должны были ограничиться рассмотрением областей, достаточно близких к состоянию равновесия (малое x и малое y). Значит, с одной стороны, мы должны ограничиться рассмотрением областей, достаточно близких к состоянию равновесия, а с другой стороны, рассматривая движение системы в этих областях, мы убедились в том, что система не останется в этой области, но неизбежно выйдет за ее пределы. Другими словами, линейная трактовка позволяет правильно изобразить поведение фазовых траекторий только в некоторой ограниченной области фазовой плоскости, вблизи положения равновесия. Но, с другой стороны, все фазовые траектории уходят за пределы этой ограниченной области. Чтобы исследовать дальнейшее поведение системы, мы должны, очевидно, учесть какие-то обстоятельства, которые до сих пор нами не учитывались, и рассматривать систему уже как нелинейную.

Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом случае *линейная трактовка принципиально не может дать ответа на ряд вопросов о поведении системы*, например на вопрос о том, какие движения будет совершать система по прошествии достаточно длинного промежутка времени.

4. Поведение системы при изменении обратной связи. Итак, мы пришли к следующим результатам (мы ограничимся только формулировкой результатов для лампового генератора; для груза на движущейся ленте и для маятника Фроуда выводы, конечно, будут совершенно аналогичны).

Пока обратная связь достаточно мала¹⁾ (считаем, что выбрано такое направление витков катушек, что $M > 0$), мы имеем в контуре либо апериодическое затухание, либо затухающие колебания, в зависимости от того, будет ли h^2 больше или меньше, чем ω_0^2 . Если сам по себе контур обладает таким большим сопротивлением, что в нем происходит апериодическое затухание, то, выбрав достаточноенную обратную связь, мы можем достичнуть того, что эта обратная связь будет «компенсировать» большую часть сопротивления контура, т. е. $h = \frac{RC - MS_0}{2L}$ будет малой положительной величиной.

Тогда в случае не слишком больших начальных отклонений (таких, что система не выходит за пределы линейной области) будет происходить колебательное, а не апериодическое затухание. Увеличивая обратную связь, мы должны пройти через положение, когда $RC - MS_0 = 0$, и затем перейти в область, где $RC - MS_0 < 0$, т. е. достичнуть такого положения, при котором состояние равновесия станет неустойчивым (так как $h < 0$) и будет происходить уже не затухание, а нарастание колебаний. Чем больше будет абсолютная величина h , тем больше будет шаг спирали на фазовой плоскости, тем быстрее будут раскручиваться эти спирали и тем больше будет возрастать величина максимального отклонения в системе за время одного колебания. Наконец, при дальнейшем увеличении обратной связи система пройдет через положение, в котором $h^2 = \omega_0^2$, и перейдет в область, где $h^2 > \omega_0^2$ (причем h у нас теперь отрицательно). В этой области мы снова получим апериодический процесс, но уже не затухающий (как при большом *положительном* h), а нарастающий. Скорость нарастания процесса, характеризуемая корнями характеристического уравнения λ_1, λ_2 , будет тем больше, чем больше $|h|$, следовательно, чем больше обратная связь.

Итак, одним только изменением величины h , характеризующей «сопротивление» системы (от больших положительных до больших отрицательных h), можно перевести систему последовательно через пять различных областей, соответствующих различным типам движений и состояний равновесия, а именно: устойчивый узел, устойчивый фокус, центр, неустойчивый фокус и неустойчивый узел. В следующем параграфе мы познакомимся еще с одним типом состояний

¹⁾ В рассмотренных нами механических системах нет элемента, аналогичного переменной обратной связи. Поэтому для изменения режима нужно изменять какой-то другой параметр, например крутизну характеристики трения. В ламповом генераторе также можно было бы вместо изменения величины обратной связи изменять крутизну характеристики лампы в рабочей точке, т. е. изменять величину S_0 . Из-за отсутствия обратной связи в рассмотренных механических системах нет полной аналогии между этими системами и обычным ламповым генератором. Аналогом маятника Фrouда является так называемый динатронный генератор, в котором нет обратной связи и самоизбуждение наступает вследствие работы на падающем участке характеристики лампы (см. § 7 настоящей главы).

равновесия, который не может быть изменен путем изменения затухания в системе. Рассмотренные же пять типов состояний равновесия отличаются один от другого только величиной и знаком трения в системе.

Однако не все эти пять типов равновесия представляют одинаковый физический интерес. Всем состояниям равновесия, кроме центра ($h = 0$), соответствуют конечные области значений параметров системы, в частности параметра M . Другими словами, значениям M , заключенным между заданными конечными пределами, может соответствовать всякое состояние равновесия, кроме центра, а этому последнему состоянию равновесия соответствует только одно-единственное значение M_{kp} , получающееся из условия $MS_0 - RC = 0$. Если это условие хоть немного нарушается, т. е. если хотя бы немного изменяется какой-либо из параметров системы, то система переходит в область $h > 0$ или $h < 0$. Это значит, что состояние равновесия типа центра неустойчиво по отношению к малым изменениям параметров системы. Другие же состояния равновесия сохраняют свой тип при небольших изменениях параметров системы, т. е. обладают устойчивостью по отношению к малым изменениям параметров системы. Так как небольшие изменения параметров системы всегда неизбежны, то неустойчивые по отношению к ним состояния не отражают поведения реальной физической системы. Поэтому состояние равновесия типа центра физически имеет значение лишь как граница между двумя другими состояниями — устойчивым и неустойчивым фокусом, точно так же как случай $h^2 = \omega_0^2$ имеет смысл лишь как граница между узлом и фокусом. Однако этим границам, как уже указывалось, не следует придавать слишком большого физического смысла. В реальных системах переход от одного типа движений к другому происходит постепенно и физическая граница между колебательным и апериодическим затуханием не слишком резка, так как при увеличении затухания система теряет свои колебательные свойства не сразу, а постепенно. Другими словами, в реальных системах мы не в состоянии отличить «сильный» фокус, т. е. фокус с очень большим h (когда h^2 только немного меньше ω_0^2), от «слабого» узла, т. е. узла, для которого h^2 только немного больше ω_0^2 . Точно так же мы не можем отличить очень слабое затухание от очень слабого нарастания, ибо, чтобы обнаружить разницу между этими двумя процессами, нам бы пришлось ждать чрезвычайно долго.

Мы убедились выше, что соответствующим выбором направления и величины обратной связи можно не только добиться уменьшения затухания собственных колебаний в системе, но и достигнуть того, что эти колебания станут нарастающими. Физический смысл этого явления совершенно ясен. Уменьшение затухания системы обусловлено, очевидно, тем, что вместо части энергии, рассеиваемой в контуре, поступает некоторое количество энергии из внешнего источника (в нашем случае из анодной батареи), которое частично компенси-

рует потери энергии в контуре и тем самым замедляет затухание в системе. Чем сильнее обратная связь, тем больше энергии поступает из батареи в контур за период, тем большая часть потерь компенсируется и тем слабее затухают колебания. При дальнейшем увеличении обратной связи энергия, поступающая в контур, может оказаться больше, чем потери энергии в нем, и тогда энергия в контуре будет возрастать, в контуре будут происходить нарастающие колебания, а при дальнейшем увеличении поступающей в контур энергии — даже апериодическое нарастание. О том, как долго будет продолжаться нарастание колебаний, прекратится ли оно и когда именно, мы, как уже указывалось, ничего не можем сказать, оставаясь на линейной точке зрения.

Исследуя линейные уравнения, мы не можем также ничего сказать о том, какой процесс установится в системе по прошествии достаточно длинного промежутка времени и, в частности, возможен ли в данной системе периодический процесс. Мы можем лишь утверждать, что в рассматриваемой нами линейной системе периодический процесс невозможен. Для ответа на вопрос о дальнейшей судьбе реальной системы, после того как она выйдет за пределы области, которой мы ограничили наше рассмотрение, нужно, очевидно, рассматривать эту систему уже как нелинейную. Такое нелинейное рассмотрение и составляет нашу дальнейшую задачу. Пока мы лишь укажем, что отсутствие колебательных движений вблизи положения равновесия отнюдь не доказывает вообще невозможности колебательных движений в данной системе. В частности, если вблизи положения равновесия происходит апериодическое нарастание (неустойчивый узел), то это вовсе не значит, что в дальнейшем в системе не может установиться колебательный процесс. Как мы увидим, и в случае особой точки типа узла вполне возможно существование периодического процесса (незатухающих колебаний).

Вернемся, однако, к вопросу об энергии, компенсирующей потери в системе. Как для электрических, так и для механических систем картина с этой точки зрения получается одна и та же. В случае генератора энергия поступает в контур из анодной батареи, а электронная лампа является лишь тем механизмом, который регулирует нужным образом поступление энергии в контур. В механических же системах, к которым могут быть применены все наши выводы, источником энергии является мотор, приводящий в действие ленту или вал, а передача этой энергии в колебательную систему обусловливается соответствующим видом характеристики трения. Именно, вид характеристик трения таков, что лента или вал больше «помогают» телу при движении в ту же сторону, чем «мешают» при движении навстречу. Если бы в генераторе мы выбрали такое включение катушек, которое соответствует отрицательной обратной связи ($M < 0$), или в механических моделях установили бы рабочую точку не на падающий, а на поднимающийся

участок характеристики трения, то энергия из батареи или мотора не переходила бы в колебательную систему, а, наоборот, часть энергии колебаний рассеивалась бы во вспомогательном механизме (в лампе — на аноде или в подшипнике — на преодоление трения). Затухание колебаний в системе не только не уменьшилось бы, но, наоборот, возросло, если бы направление обратной связи было выбрано неправильно.

В заключение отметим (хотя эти вопросы и не будут рассматриваться в нашей книге), что в случае действия внешней силы на систему с обратной связью (например, на регенеративный приемник) также можно получить ответ на некоторые вопросы, оставаясь на почве линейной идеализации. Например, в случае $\hbar < 0$, т. е. в случае недовозбужденного регенератора, и слабых сигналов, т. е. в случае воздействия, не выводящего систему из области, в которой ее можно рассматривать как линейную, можно считать, что обратная связь только уменьшает затухание системы (увеличивает ее чувствительность и избирательность), не изменяя «линейных» свойств системы. Однако для достаточно сильных сигналов это утверждение будет уже неправильно.

§ 7. Линейная система с отталкивающей силой

До сих пор мы рассматривали линейные системы, в которых действует квазиупругая сила, т. е. сила, *притягивающая* к положению равновесия и пропорциональная смещению системы. Во всех рассмотренных случаях варьировался характер трения, но сила оставалась притягивающей. Между тем часто приходится сталкиваться с системами (и с точки зрения теории колебаний эти системы представляют значительный интерес), в которых действует сила, не притягивающая к положению равновесия, а, наоборот, *отталкивающая* систему от положения равновесия, причем величина этой отталкивающей силы возрастает с возрастанием смещения системы. При рассмотрении этих систем прежде всего возникает вопрос о том, какова зависимость отталкивающей силы от смещения. Как мы увидим ниже при рассмотрении некоторых частных примеров (и как это вытекает из общих соображений о разложении произвольной функции в ряд), в области достаточно малых отклонений можно считать, что отталкивающая сила пропорциональна смещению. При таком предположении мы приходим к линейным системам, в которых действует не притягивающая, а отталкивающая сила. Поведение этих систем (характер их движений) существенно отличается от поведения линейных систем, рассмотренных выше.

В качестве первого примера, приводящего к линейной системе с отталкивающей силой, рассмотрим поведение математического маятника в непосредственной близости к верхнему (неустойчивому) положению равновесия. При этом мы сначала для простоты будем