

участок характеристики трения, то энергия из батареи или мотора не переходила бы в колебательную систему, а, наоборот, часть энергии колебаний рассеивалась бы во вспомогательном механизме (в лампе — на аноде или в подшипнике — на преодоление трения). Затухание колебаний в системе не только не уменьшилось бы, но, наоборот, возросло, если бы направление обратной связи было выбрано неправильно.

В заключение отметим (хотя эти вопросы и не будут рассматриваться в нашей книге), что в случае действия внешней силы на систему с обратной связью (например, на регенеративный приемник) также можно получить ответ на некоторые вопросы, оставаясь на почве линейной идеализации. Например, в случае $\hbar < 0$, т. е. в случае недовозбужденного регенератора, и слабых сигналов, т. е. в случае воздействия, не выводящего систему из области, в которой ее можно рассматривать как линейную, можно считать, что обратная связь только уменьшает затухание системы (увеличивает ее чувствительность и избирательность), не изменяя «линейных» свойств системы. Однако для достаточно сильных сигналов это утверждение будет уже неправильно.

§ 7. Линейная система с отталкивающей силой

До сих пор мы рассматривали линейные системы, в которых действует квазиупругая сила, т. е. сила, *притягивающая* к положению равновесия и пропорциональная смещению системы. Во всех рассмотренных случаях варьировался характер трения, но сила оставалась притягивающей. Между тем часто приходится сталкиваться с системами (и с точки зрения теории колебаний эти системы представляют значительный интерес), в которых действует сила, не притягивающая к положению равновесия, а, наоборот, *отталкивающая* систему от положения равновесия, причем величина этой отталкивающей силы возрастает с возрастанием смещения системы. При рассмотрении этих систем прежде всего возникает вопрос о том, какова зависимость отталкивающей силы от смещения. Как мы увидим ниже при рассмотрении некоторых частных примеров (и как это вытекает из общих соображений о разложении произвольной функции в ряд), в области достаточно малых отклонений можно считать, что отталкивающая сила пропорциональна смещению. При таком предположении мы приходим к линейным системам, в которых действует не притягивающая, а отталкивающая сила. Поведение этих систем (характер их движений) существенно отличается от поведения линейных систем, рассмотренных выше.

В качестве первого примера, приводящего к линейной системе с отталкивающей силой, рассмотрим поведение математического маятника в непосредственной близости к верхнему (неустойчивому) положению равновесия. При этом мы сначала для простоты будем

считать, что трение в маятнике отсутствует. В этом случае, если угол φ отсчитывать от верхнего положения равновесия (рис. 50), уравнение движения маятника напишется так:

$$m l^2 \ddot{\varphi} = m g l \sin \varphi. \quad (1.66)$$

Ограничиваая рассмотрение областью, достаточно близкой к положению равновесия, можно $\sin \varphi$ заменить через φ . Тогда уравнение принимает вид

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (1.67)$$

Мы получили опять линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Это уравнение, как и уравнение, полученное для области, близкой к нижнему положению равновесия, конечно, не описывает движения маятника при любых углах φ и пригодно только для достаточно малых значений φ .

1. Картина на фазовой плоскости. Уравнение, к которому приводит рассматриваемый нами случай, в общем виде может быть написано так:

$$\dot{x} - nx = 0, \quad (1.68)$$

где $n > 0$ (для маятника $n = \frac{g}{l}$). Для исследования поведения системы, описываемой этим уравнением, можно было бы выбрать любой из путей, использованных в предыдущих задачах, именно либо найти решение уравнения (1.68) и затем рассматривать найденное решение $x = f(t)$ и $\dot{x} = f'(t)$ как параметрическое уравнение интегральных кривых, либо, не интегрируя уравнения (1.68), исключить из него время, затем проинтегрировать и рассматривать полученное уравнение как уравнение интегральных кривых. Используем сейчас этот второй путь. Полагая $\dot{x} = y$, мы можем заменить это уравнение второго порядка двумя уравнениями первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = nx; \quad (1.69)$$

исключая время, получим одно уравнение первого порядка, связывающее x и y :

$$\frac{dy}{dx} = n \frac{x}{y}. \quad (1.70)$$

Состояние равновесия в этой системе (определенное из условия $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$) только одно, именно точка $x = 0, y = 0$. Изоклиной $x = 0$ ($\frac{dy}{dx} = 0$) является ось ординат ($x = 0$), а изоклиной $y = \infty$ ($\frac{dy}{dx} = \infty$) служит ось абсцисс ($y = 0$). Для того чтобы точно



Рис. 50.

определить вид траекторий представляющей точки на фазовой плоскости, нужно проинтегрировать уравнение (1.70). Переменные разделяются, интегрирование дает:

$$y^2 - nx^2 = C. \quad (1.71)$$

Это — уравнение семейства равносторонних гипербол, отнесенное к главным осям. При $C=0$ мы получаем две асимптоты этого семейства: $y = -\sqrt{n}x$ и $y = +\sqrt{n}x$, которые проходят через начало координат.

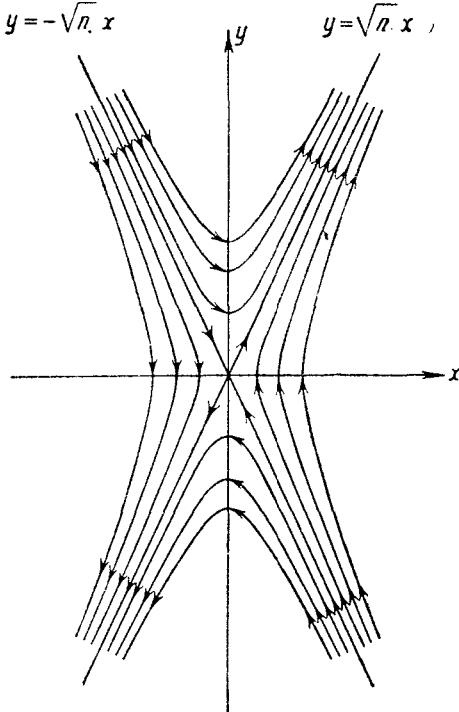


Рис. 51.

Начало координат является единственной особой точкой рассматриваемого семейства интегральных кривых. Все же остальные интегральные кривые суть гиперболы, не проходящие через начало координат (рис. 51). Такая особая точка, через которую проходят только две интегральные кривые, являющиеся асимптотами (все остальные интегральные кривые, имеющие вид гипербол, через особую точку не проходят), называется особой точкой *седла*.

Какие же заключения мы можем вывести из полученной картины на фазовой плоскости? Прежде всего, имея в виду, что при положительной скорости координата системы должна возрастать, а при отрицательной — убывать, мы получим во всех четырех квадрантах такие направления движения представляющей точки по фазовой плоскости, которые указаны на рис. 51 стрелками. Рассматривая направления движения представляющей точки, легко убедиться, что, где бы ни находилась представляющая точка в начальный момент (за исключением особой точки и точек на асимптоте $y = -\sqrt{n}x$, проходящей через второй и четвертый квадранты), она всегда в конечном счете будет удаляться от состояния равновесия, причем движение ее всегда будет не колебательным, а апериодическим.

Скорость движения представляющей точки в этом случае обращается в нуль также только в особой точке, в остальных же точ-

как фазовой плоскости она отлична от нуля. Таким образом, если даже представляющая точка движется по какой-либо из интегральных кривых вначале по направлению к особой точке (движения во втором и четвертом квадрантах), все же в конце концов она уйдет как угодно далеко от состояния равновесия во всех случаях, кроме движения по асимптоте $y = -\sqrt{nx}$. Следовательно, в рассматриваемом случае состояние равновесия неустойчиво, ибо мы не можем выбрать область $\delta(\varepsilon)$ так, чтобы представляющая точка, находившаяся в начальный момент в этой области, не вышла в конце концов за пределы заданной области ε . Очевидно, что особая точка типа седла всегда неустойчива, и эта неустойчивость связана с самим типом особой точки и характером интегральных кривых, а не с направлением движения представляющей точки по интегральной кривой (если бы направления движений изменились на обратные, то особая точка все же была бы неустойчива).

Что касается движений по асимптоте $y = -\sqrt{nx}$, то они представляют собой некоторый особый случай, когда система может только приближаться к состоянию равновесия. При этом движении представляющая точка будет приближаться к началу координат со стремящейся к нулю скоростью, но не достигнет начала координат в конечный промежуток времени. Этот случай так называемого *лимитационного* движения мы рассмотрим подробно в дальнейшем. Однако самая возможность такого движения, направленного к состоянию неустойчивого равновесия, ясна из элементарных соображений. Действительно, при любом начальном отклонении маятника от верхнего состояния равновесия всегда можно выбрать такую, и притом вполне определенную, начальную скорость, чтобы кинетическая энергия маятника в начальный момент была точно равна той работе, которую он должен совершить, чтобы как раз достигнуть состояния равновесия. Если эта начальная скорость направлена в сторону положения равновесия, то маятник будет двигаться к этому положению и должен в него прийти. Но, как мы увидим в дальнейшем, если бы удалось совершенно точно задать так подобранныю начальную скорость, то маятник достиг бы состояния равновесия только через бесконечно большой промежуток времени.

Однако этот специальный случай движения к положению равновесия, конечно, не нарушает утверждения о том, что состояние равновесия в данном случае неустойчиво. Действительно, при любых начальных условиях, отличающихся от тех специально выбранных, которые точно соответствуют асимптоте $y = -\sqrt{nx}$, система будет всегда удаляться от состояния равновесия. Это движение по асимптоте не может быть никогда точно реализовано, так как оно соответствует одному начальному состоянию, а не конечной области начальных состояний. Такое начальное состояние (вернее, одна «линия начальных состояний») не образует конечной области начальных

состояний и не может быть совершенно точно задано в системе. Другими словами, если считать, что все начальные состояния равновероятны, то вероятность такого начального состояния, которое соответствует движению по направлению к особой точке, равна нулю. Поэтому всякое реальное движение в системе будет удалять систему от состояния равновесия.

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда, помимо отталкивающей силы, в системе существует и трение, причем это трение может быть и положительным и отрицательным. К первому из этих случаев приводит рассмотрение маятника вблизи верхнего положения

равновесия при наличии силы трения, пропорциональной ско-

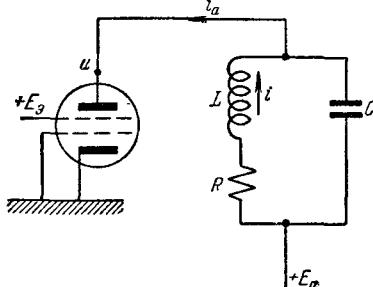


Рис. 52.

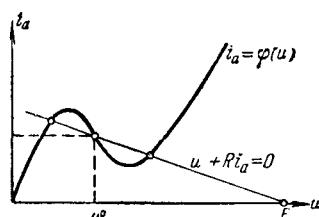


Рис. 53.

рости. В этом случае уравнение, описывающее движение системы, будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} - n\varphi = 0, \quad (1.72)$$

где $n = \frac{g}{l}$ и $h > 0$. Ко второму случаю, т. е. к случаю $h < 0$ в уравнении (1.72), нас привело бы рассмотрение маятника Фrouда также в области, близкой к верхнему состоянию равновесия (конечно, при линейной идеализации).

2. Электрическая система. К тому же уравнению (1.72) мы придем, рассматривая при соответствующих предположениях так называемый динатронный генератор (рис. 52) — схему, которая может совершать автоколебания из-за наличия у анодной характеристики тетрода $i_a = \varphi(u)$ (рис. 53) падающего участка (участка, на котором $\frac{di_a}{du} < 0$)¹⁾. Законы Кирхгофа для рассматриваемой схемы дают:

$$i = i_a + C \frac{du}{dt}, \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E_a - u,$$

1) Анодной характеристикой электронной лампы, как известно, называют зависимость анодного тока i_a от анодного напряжения u при постоянных (фиксированных) напряжениях на других электродах (сетках). Анодная характеристика тетрода имеет (при достаточно больших напряжениях на экранной сетке E_s) падающий участок благодаря так называемому *динатронному эффекту*, имеющему место в тетроде в определенном интервале анодных напряжений.

или после исключения тока i :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + \left[RC + L \frac{di_a}{du} \right] \frac{du}{dt} + u + Ri_a = E_a. \quad (1.73)$$

Для состояний равновесия $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$ и, следовательно,

$$u + Ri_a = E_a. \quad (1.74)$$

Решая полученное уравнение совместно с уравнением характеристики тетрода $i_a = \varphi(u)$ (графическое решение дано на рис. 53), мы найдем состояния равновесия рассматриваемой электрической схемы; очевидно, при заданной характеристике тетрода в зависимости от R и E_a имеется или одно или три состояния равновесия.

Предположим, что R и E_a таковы, что имеется состояние равновесия ($u = u^0$, $i_a = i_a^0$), лежащее на падающем участке характеристики ($\varphi'(u^0) < 0$). Ограничивааясь областью малых колебаний около этого состояния равновесия:

$$u = u^0 + v,$$

где v достаточно мало, мы можем характеристику тетрода считать линейной:

$$i_a = i_a^0 - S_0 v, \quad (1.75)$$

где $S_0 = -\varphi'(u^0)$ — абсолютная величина крутизны анодной характеристики тетрода в рабочей точке, лежащей на падающем участке. Для этой области малых колебаний мы получим, очевидно, следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + \left[RC - LS_0 \right] \frac{dv}{dt} + (1 - RS_0)v = 0. \quad (1.76)$$

Как и в предыдущих случаях, наше линейное уравнение пригодно для описания колебаний только в некоторой ограниченной области, в которой анодное напряжение u достаточно близко к значению u^0 (т. е. v достаточно мало).

Если $RS_0 < 1$, то мы получаем «обычное» дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее систему с «притягивающей» силой и положительным или отрицательным «трением» в зависимости от знака выражения $RC - LS_0$. Если же $RS_0 > 1$ (сопротивление контура R достаточно велико), то мы получаем уравнение, аналогичное уравнению (1.72), описывающему систему с «отталкивающей» силой¹⁾.

3. Особая точка типа седла. Итак, обе рассмотренные нами системы — маятник (обычный маятник или маятник Фрууда) вблизи верхнего состояния равновесия и динатронный генератор вблизи состояния равновесия на падающем участке характеристики

¹⁾ Заметим, что в этом случае динатронный генератор имеет кроме рассматриваемого состояния равновесия еще два, которые являются устойчивыми узлами или фокусами.

(при $RS_0 > 1$) привели нас при соответствующих упрощениях к линейным дифференциальным уравнениям вида

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} - nx = 0, \quad (1.77)$$

где $n > 0$ (для маятника $n = \frac{g}{l}$, для динатронного генератора $n = \frac{RS_0 - 1}{LC}$), а h может иметь любой знак.

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1.77) имеет вид

$$\lambda^2 + 2h\lambda - n = 0$$

и имеет, независимо от знака коэффициента h , корни действительные, но разных знаков:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 + n}$$

(ниже мы будем обозначать положительный корень через q_1 и отрицательный — через $-q_2$; q_1 и $q_2 > 0$). Поэтому общее решение для уравнения (1.77) может быть записано в виде

$$x = Ae^{q_1 t} + Be^{-q_2 t}. \quad (1.78)$$

Для нахождения интегральных кривых на плоскости x, y ($y = \dot{x}$, как и раньше) исключим время из уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = nx - 2hy, \quad (1.79)$$

эквивалентных уравнению (1.77), путем деления второго уравнения на первое:

$$\frac{dy}{dx} = -2h + n \frac{x}{y}. \quad (1.80)$$

По-прежнему единственной особой точкой (единственным состоянием равновесия) является начало координат ($x = 0, y = 0$). Для изоклины с наклоном интегральных кривых $\frac{dy}{dx} = x$ получаем уравнение $-2h + n \frac{x}{y} = x$ или

$$y = \frac{n}{x + 2h} x. \quad (1.81)$$

В частности, изоклиной $x = 0$ (т. е. $\frac{dy}{dx} = 0$) является прямая

$$y = \frac{n}{2h} x,$$

а изоклиной $x = \infty$ ($\frac{dy}{dx} = \infty$) — ось абсцисс ($y = 0$). В рассматриваемом случае, так же как и в случае особой точки типа узла, имеются две интегральные прямые, проходящие через особую точку, — пря-

мые $y = q_1x$ и $y = -q_2x$. Для определения вида других интегральных кривых мы можем, как и прежде, подстановкой проинтегрировать уравнение (1.80) и получить:

$$(y - q_1x)^{-q_1} = C(y + q_2x)^{q_2} \quad (1.82)$$

— уравнение, определяющее семейство кривых гиперболического типа с асимптотами $y = q_1x$ и $y = -q_2x$, которые, очевидно, проходят через разные квадранты. Семейства интегральных кривых для рассматриваемого случая изображены на рис. 54 (для $h < 0$) и рис. 55 (для $h > 0$).

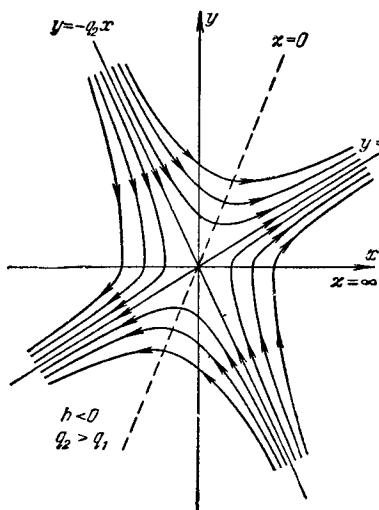


Рис. 54.

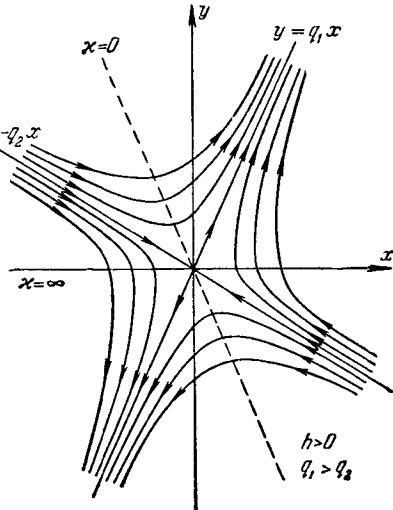


Рис. 55.

Для выяснения вида интегральных кривых можно, так же как и в ранее рассмотренном случае особой точки типа узла, ввести новые переменные

$$u = y - q_1x, \quad v = y + q_2x$$

и преобразовать уравнение (1.82) к виду

$$v = \frac{C}{u^\alpha},$$

где $\alpha = \frac{q_1}{q_2} > 0$. На плоскости u, v это уравнение определяет семейство кривых гиперболического типа, асимптотами которых являются оси координат (рис. 56). Поэтому на плоскости x, y уравнение (1.82) определяет также семейство кривых гиперболического типа с асимптотами $y = q_1x$ и $y = -q_2x$ — прямыми, в которые преобразуются при обратном преобразовании оси u и v .

Мы видим, таким образом, что наличие сопротивления, как положительного, так и отрицательного, не изменяет принципиально картины в системе с отталкивающей силой. Особая точка — по-прежнему седло, она всегда неустойчива, и все движения в системе в конечном счете удаляют систему от состояния равновесия. По прошествии достаточно длинного промежутка времени система уйдет как угодно далеко и, следовательно, наверно выйдет за пределы

той области, которой мы ограничили наше рассмотрение и в которой систему можно было рассматривать как линейную. Значит, и в этом случае, так же как и в случае отрицательного трения, т. е. вообще во всех случаях неустойчивости состояния равновесия, мы можем при помощи линейной идеализации описать поведение системы только в течение определенного промежутка времени и то при небольших начальных отклонениях, пока система не успела уйти за пределы «линейной области».

Рассмотрение линейных систем мы закончим весьма важным для

дальнейшего замечанием. Ни одна из рассмотренных нами картин на фазовой плоскости для различных линейных систем, кроме гармонического осциллятора без трения (т. е. кроме консервативной линейной системы), не дала на фазовой плоскости замкнутых интегральных кривых, и все интегральные кривые имели ветви, уходящие в бесконечность. Между тем периодическим процессам на фазовой плоскости должны соответствовать замкнутые интегральные кривые. Мы можем поэтому вывести из нашего рассмотрения линейных систем следующее важное заключение: *в линейных неконсервативных системах периодические процессы вообще невозможны.*

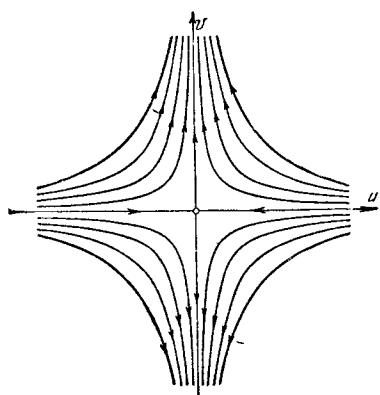


Рис. 56.