в системе, будет заметно меньше той, которую имела система в начальный момент. Точно так же движение планет, например Земли, мы можем рассматривать как движение консервативное, опять-таки если интересующие нас промежутки времени не слишком велики. При очень больших промежутках времени, охватывающих геологические эпохи, мы для рассмотрения движения Земли должны учитывать так называемое приливное трение, при учете которого мы уже не можем считать систему консервативной.

Допустимость консервативной идеализации, как уже указывалось, зависит как от характера вопроса, так и от свойств системы. На тот же вопрос о движении маятника в течение промежутка времени, равного сотне периодов, мы при консервативной идеализации ничего не сможем ответить, если маятник движется в среде с большим сопротивлением. В этом случае он уже в течение одного размаха расходует значительную долю сообщенной ему вначале энергии, и для промежутка времени, равного 100 периодам, сумму кинетической и потенциальной энергии маятника даже приблизительно нельзя считать постоянной.

Рассмотрение консервативных систем помимо того, что оно может дать непосредственный ответ на ряд вопросов, представляет для нас особый интерес в силу следующих причин. Во-первых, мы здесь получим возможность уже довольно глубоко подойти к выяснению тех понятий (фазовой плоскости, особых точек, периодических движений, устойчивости, зависимости динамической системы от параметра), которые понадобятся для рассмотрения нашей основной задачи — теории автоколебательных систем. Во-вторых, консервативные системы интересны еще и потому, что мы в некоторых случаях сможем изучать автоколебательные системы только постольку, поскольку они близки к консервативным системам.

Заметим, что для физики в целом теория консервативных систем имеет весьма большую самостоятельную ценность [1]).

§ 2. Простейшая консервативная система

Рассмотрим простейшую автономную консервативную систему с одной степенью свободы: движение материальной точки по прямой под действием силы, зависящей только от расстояния. Положение материальной точки вполне определяется заданием одного числа — абсциссы x. Механическое *состояние* системы определяется заданием положения

---

[1]) Прежде всего для теории строения материи. Еще со времен Лапласа и в особенности после того, как был открыт закон сохранения энергии, с тех пор как стали рассматривать теплоту как вид кинетической энергии, физики принимали, что в микромире действуют консервативные силы. На этом пути были достигнуты большие успехи кинетической теорией газов, теорией кристаллической решетки и др. Так называемая старая квантовая механика для определения стационарных состояний атома пользовалась консервативной моделью,

точки x и скорости точки $\dot{x}=y$. Массу точки для простоты выкладок примем равной единице; совершенно очевидно, что это предположение не уменьшит общности нашего исследования. Уравнение движения такой системы может быть написано по второму закону Ньютона в виде одного уравнения второго порядка:

$$\ddot{x}=f(x), \tag{2.1}$$

где $f(x)$ — сила, или в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt}=y \text{ и } \frac{dy}{dt}=f(x). \tag{2.2}$$

Во всем дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, мы будем предполагать, что $f(x)$ — аналитическая функция на всей прямой x $(-\infty<x<+\infty)$ или, иначе говоря, что $f(x)$ голоморфна в каждой точке прямой x [1]).

Дифференциальное уравнение, определяющее интегральные кривые на фазовой плоскости, как мы уже знаем, получается в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{y} \text{ или } \frac{dy}{dx}=\varphi(x, y), \tag{2.3}$$

где $\varphi(x, y)=\frac{f(x)}{y}$. Как будет двигаться изображающая точка по интегральным кривым на фазовой плоскости? Мы уже указывали, что так как y есть скорость, то при $y>0$, т. е. в верхней фазовой полуплоскости, изображающая точка двигается так, что x возрастает, а при $y<0$, т. е. в нижней полуплоскости, так, что x убывает. Таким путем определится *направление* движения по фазовым траекториям. *Скорость* движения изображающей точки v можно выразить так:

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{y^2+[f(x)]^2}.$$

Напомним еще раз, что следует различать скорость изменения положения — скорость материальной точки и скорость изменения состояния — скорость движения изображающей точки на фазовой плоскости. Первая скорость $\frac{dx}{dt}=y$ равняется ординате, вторая

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{y^2+[f(x)]^2}=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{2.4}$$

лишь постулируя определенный рецепт для определения произвольных постоянных. Даже в квантовой механике, отказавшейся от пространственно-временного описания движения отдельных частиц, нужно знать гамильтонову функцию «идеальной модели атома», прежде чем написать уравнение Шредингера. С некоторой точки зрения можно рассматривать все развитие механики атома как развитие консервативной гамильтоновой механики.

[1]) Мы будем пользоваться такой терминологией: будем называть функцию $f(x)$ аналитической в данной области значений x, если она голоморфна в каждой точке этой области, т. е. если в окрестности каждой точки она может быть разложена в степенной ряд с радиусом сходимости, отличным от нуля.

равняется длине нормали к рассматриваемой интегральной кривой в выбранной точке. Из выражения (2.4) непосредственно вытекает уже отмеченное нами обстоятельство, что во всякой точке фазовой плоскости изображающая точка имеет конечную и отличную от нуля скорость, за исключением состояний равновесия (особых точек), в которых одновременно

$$y=0 \text{ и } f(x)=0. \tag{2.5}$$

В силу этих условий все состояния равновесия расположены на фазовой плоскости на оси x, причем их абсциссы удовлетворяют уравнению $f(x)=0$.

Пусть нам задана на фазовой плоскости точка (x_0, y_0). Спрашивается, можно ли всегда найти интегральную кривую, которая проходила бы через заданную точку, и будет ли такая кривая единственной? Уравнение (2.3) определяет в каждой точке фазовой плоскости единственное направление касательной, за исключением особых точек, где $y=0$ и $f(x)=0$.

Докажем, что в нашем случае через каждую неособую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая. Мы знаем, что такая кривая существует и будет единственной, если соблюдены условия теоремы Коши[1]). Мы рассматривали y как функцию x и имели дело с уравнением $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{y}=\varphi(x, y)$; в этом случае $\frac{d\varphi}{dy}=-\frac{f(x)}{y^2}$, и следовательно, $y=0$ есть геометрическое место точек на фазовой плоскости, где условия Коши нарушены. Будем рассматривать теперь x как функцию y. Тогда дифференциальное уравнение (2.3) следует записать в виде: $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{f(x)}=\psi(x, y)$. В этом случае $\frac{d\psi}{dx}=-\frac{yf'(x)}{[f(x)]^2}$. Условие $f(x)=0$ дает нарушение условий непрерывности, и следовательно, для этого уравнения условия теоремы Коши нарушены на прямых $f(x)=0$. Мы рассматриваем одно и то же дифференциальное уравнение (2.3), только с различных точек зрения. Полученные нами при этом различные результаты отнюдь не противоречивы, так как условия Коши только достаточны, но не необходимы для единственности. Следовательно, мы можем утверждать, что через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна интегральная кривая, за исключением, может быть, точек, где одновременно $y=0$ и $f(x)=0$, т. е. за исключением особых точек. Как мы увидим дальше, для рассматриваемого случая консервативной системы в особых точках интегральные кривые либо пересекаются и имеют, вообще говоря, различные касательные, либо

---

[1]) Формулировку теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) см. в Дополнении I.

вырождаются в изолированные точки и совсем не имеют касательных. Скорость изображающей точки

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}f(x) \tag{2.6}$$

всюду определена однозначно и, как мы уже видели, обращается в нуль только в особой точке. Отсюда в силу непрерывности следует, что вблизи особой точки изображающая точка замедляет свое движение.

Пусть для системы уравнений (2.2) в некоторой области (при нашем предположении об аналитичности $f(x)$ на всей прямой x этой областью является вся плоскость) выполнены условия теоремы Коши. Отсюда вытекает, что для рассматриваемой динамической системы прошедшее и будущее однозначно определяется настоящим, так как значение начальных условий однозначно определяет движение, или, иначе говоря, решение системы (2.2).

Останется ли это справедливым при движении по интегральным кривым, *пересекающимся* в особых точках? Или — что то же самое — может ли изображающая точка, помещенная в начальный момент на интегральную кривую, проходящую через особую точку (но не в особую точку), достигнуть этой особой точки в конечное время? Мы покажем, что это невозможно: изображающая точка, находившаяся в начальный момент в точке фазовой плоскости, не являющейся особой точкой для уравнения (2.3), может лишь асимптотически приближаться к особой точке при неограниченно возрастающем t.

Сделаем прежде всего следующее замечание. Картину кривых на фазовой плоскости мы можем, как мы уже видели, описывать либо одним уравнением (2.3) и изучать с его помощью интегральные кривые, либо описывать системой уравнений (2.2) и изучать фазовые траектории. В сущности можно сказать, что во втором случае мы после решения получаем уравнения тех же интегральных кривых, но в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, иначе, получаем закон движения изображающей точки по интегральной кривой на фазовой плоскости. Различие этих двух способов изображения одного и того же семейства кривых особенно ярко проявляется в следующем. Пусть $x = x_0$, $y = y_0$ — координаты[1]) особой точки уравнения (2.3), т. е. координаты точки, в которой нарушаются условия теоремы Коши для одного уравнения (2.3); тогда $x = x_0$, $y = y_0$ в нашем случае будет точкой, в которой выполняются условия теоремы Коши для системы уравнений (2.2).

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что система функций $x = x_0$, $y = y_0$ есть решение системы уравнений (2.2), т. е., как об этом мы уже говорили, что точка x_0, y_0 является для системы (2.2) состоянием равновесия. Заметим, что так как в этом случае решение системы (2.2) (соответствующее состоянию равновесия) не

---

[1]) Согласно уравнению (2.3) x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$, а $y_0 = 0$.

зависит от t, то, задавая начальные значения $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, мы при любом t_0 получим решение в виде $x=x_0$, $y=y_0$.

Рассмотрим изображающую точку, двигающуюся по интегральной кривой, проходящей через особую точку, по направлению к особой точке. Скорость ее движения, как мы уже говорили, уменьшается и стремится к нулю при неограниченном приближении к состоянию равновесия. Спрашивается, может ли изображающая точка в конечное время достигнуть состояния равновесия или же она, как мы указали, может лишь асимптотически к нему приближаться, никогда его не достигая? Предположим, что имеет место первый случай, т. е. что изображающая точка, двигаясь по закону $x=x(t)$, $y=y(t)$, находится вне состояния равновесия в момент времени $t=t_0$ и достигает состояния равновесия с координатами $x=x_0$, $y=y_0$ в некоторый определенный момент времени t_1 $(t_1>t_0)$, т. е. что $x_0=x(t_1)$, $y_0=y(t_1)$. Но тогда мы получили бы два решения, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям: при $t=t_1$ $x=x_0$, $y=y_0$ — одно $x=x_0$, $y=y_0$, другое $x=x(t)$, $y=y(t)$. Последнее невозможно, так как в точке x_0, y_0, как это только что отмечалось для системы уравнений (2.2), выполняются условия теоремы Коши.

Заметим, что в дальнейшем нам придется встретиться с системами уравнений (подобных (2.2) или более общего вида), для которых условия теоремы Коши в некоторых точках фазовой плоскости нарушаются, например с такими динамическими моделями реальных физических систем, для которых правые части уравнений движения разрывны (таковы, например, колебательные системы с сухим, кулоновским трением). Для таких моделей наше утверждение об определении прошлого настоящим, вообще говоря, несправедливо. Точно так же мы уже не можем в таких случаях, вообще говоря, утверждать, что система не достигает состояния равновесия в конечное время. Заметим еще, что в таких случаях особые точки одного уравнения (подобного (2.3)) не всегда соответствуют состояниям равновесия.

§ 3. Исследование фазовой плоскости вблизи состояний равновесия

Если мы знаем совокупность интегральных кривых на фазовой плоскости для какой-нибудь динамической системы, то мы получаем возможность сразу охватить всю картину возможных движений при различных начальных условиях. Для консервативной системы исследование этих интегральных кривых чрезвычайно облегчается тем, что уравнение (2.7) легко может быть проинтегрировано, так как переменные разделяются. Полученный интеграл имеет вид

$$\frac{y^2}{2}+V(x)=h, \tag{2.7}$$

где $V(x)$ таково, что $V'(x)=-f(x)$, а h — константа интеграции. Это уравнение выражает для нашего случая закон сохранения энер-