

зависит от  $t$ , то, задавая начальные значения  $t = t_0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , мы при любом  $t_0$  получим решение в виде  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ .

Рассмотрим изображающую точку, двигающуюся по интегральной кривой, проходящей через особую точку, по направлению к особой точке. Скорость ее движения, как мы уже говорили, уменьшается и стремится к нулю при неограниченном приближении к состоянию равновесия. Спрашивается, может ли изображающая точка в конечное время достигнуть состояния равновесия или же она, как мы указали, может лишь асимптотически к нему приближаться, никогда его не достигая? Предположим, что имеет место первый случай, т. е. что изображающая точка, двигаясь по закону  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , находится вне состояния равновесия в момент времени  $t = t_0$  и достигает состояния равновесия с координатами  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  в некоторый определенный момент времени  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ), т. е. что  $x_0 = x(t_1)$ ,  $y_0 = y(t_1)$ . Но тогда мы получили бы два решения, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям: при  $t = t_1$   $x = x_0$ ,  $y = y_0$  — одно  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , другое  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Последнее невозможно, так как в точке  $x_0$ ,  $y_0$ , как это только что отмечалось для системы уравнений (2.2), выполняются условия теоремы Коши.

Заметим, что в дальнейшем нам придется встретиться с системами уравнений (подобных (2.2) или более общего вида), для которых условия теоремы Коши в некоторых точках фазовой плоскости нарушаются, например с такими динамическими моделями реальных физических систем, для которых правые части уравнений движения разрывны (таковы, например, колебательные системы с сухим, кулоновским трением). Для таких моделей наше утверждение об определении прошлого настоящим, вообще говоря, несправедливо. Точно так же мы уже не можем в таких случаях, вообще говоря, утверждать, что система не достигает состояния равновесия в конечное время. Заметим еще, что в таких случаях особые точки одного уравнения (подобного (2.3)) не всегда соответствуют состояниям равновесия.

### § 3. Исследование фазовой плоскости вблизи состояний равновесия

Если мы знаем совокупность интегральных кривых на фазовой плоскости для какой-нибудь динамической системы, то мы получаем возможность сразу охватить всю картину возможных движений при различных начальных условиях. Для консервативной системы исследование этих интегральных кривых чрезвычайно облегчается тем, что уравнение (2.7) легко может быть проинтегрировано, так как переменные разделяются. Полученный интеграл имеет вид

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h, \quad (2.7)$$

где  $V(x)$  таково, что  $V'(x) = -f(x)$ , а  $h$  — константа интегриации. Это уравнение выражает для нашего случая закон сохранения энер-

гии. Действительно,  $\frac{y^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$  есть кинетическая энергия,  $V(x) = -\int_0^x f(x) dx$  есть взятая с обратным знаком работа действующих

в системе сил или потенциальная энергия системы,  $h$  — так называемая константа энергии, зависящая от начальных условий. Определенным начальным условиям (при  $t=0$   $x=x_0$ ,  $y=y_0$ ) соответствует определенное  $h$ .

Если же мы зададим  $h$ , то одному и тому же значению  $h$  соответствует бесконечное множество состояний системы  $(x, y)$  — цепная кривая  $y=\Phi(x)$  на плоскости  $x, y$  (которая может иметь ряд изолированных ветвей), называемая *кривой равной энергии*. По одной из ветвей этой кривой и будет двигаться изображающая точка, если полная энергия рассматриваемого движения равняется  $h$ . Может случиться, что, задав  $h$ , мы не найдем действительных значений  $x$  и  $y$ , которые удовлетворяли бы уравнению (2.7). Это означает, что ни при каком действительном движении нашей системы энергия ее не может иметь этой величины.

В дальнейшем исследовании мы будем предполагать, что  $f(x)$ , а значит, и  $V(x)$  — аналитические функции на всей прямой  $x$ . (Впоследствии мы рассмотрим несколько примеров, где это не будет иметь места.)

Нам будет удобнее вести исследование, предполагая, что функция  $V(x)$  задана. Заметим, что те значения  $x=\bar{x}_1, \dots, x=\bar{x}_i$  (абсциссы особых точек), которые обращают  $f(x)$  в нуль, обращают в нуль и  $V(x)$ . Следовательно, эти значения соответствуют экстремальным значениям потенциальной энергии  $V(x)$ , т. е. либо минимуму, либо максимуму, либо точке перегиба с горизонтальной касательной. Можно провести классификацию характера особых точек уравнения (2.3), исходя из экстремальных свойств потенциальной энергии в особых точках.

Прежде чем перейти к этой задаче, сделаем несколько общих замечаний, касающихся вида интегральных кривых на фазовой плоскости:

1) Уравнение (2.7) не меняется от замены  $y$  на  $-y$ . Следовательно, все кривые этого семейства симметричны относительно оси  $x$ .

2) Геометрическое место точек, где касательные к интегральным кривым вертикальны, — это, как легко видеть из (2.2), ось  $x$ , за исключением, может быть, особых точек.

3) Геометрическое место точек, где касательные к интегральным кривым горизонтальны, — это прямые, параллельные оси  $y$ , уравнение которых  $x=\bar{x}_i$ , где  $\bar{x}_i$  — корни уравнения  $f(x)=0$ , за исключением, может быть, точек пересечения этих прямых с осью  $x$ , которые являются особыми точками.

Можно указать простой способ построения интегральных кривых на фазовой плоскости, если нам задана, как мы будем предполагать

в дальнейшем, потенциальная энергия  $V(x)$ . С этой целью воспользуемся вспомогательной «плоскостью баланса энергии» с прямоугольными осями  $x$ ,  $z$ , на которой отложим потенциальную энергию  $z = V(x)$ . Так как

$$\frac{y^2}{2} = h - V(x),$$

то если задана  $h$  — полная энергия, то кинетическая энергия представится в виде разности  $h$  и  $V(x)$ .

Как мы уже говорили, если кинетическая энергия отрицательна, то соответствующее движение невозможно.

На рис. 57 изображен участок диаграммы баланса энергии для частного вида кривой  $z = V(x)$ . Чтобы получить интегральную кривую на фазовой плоскости<sup>1)</sup>, которая для удобства изображена непосредственно под диаграммой баланса энергии, нужно последовательно извлекать из разностей  $h - V(x)$  квадратные корни и откладывать их на фазовой плоскости вниз и вверх от оси  $x$ . При построении не следует забывать, как это только что было указано, что все интегральные кривые на фазовой плоскости пересекают ось  $x$ , имея вертикальную касательную, если только они ее не пересекают в особой точке<sup>2)</sup>.

Движение по полученному таким образом участку кривой легко найдется при помощи уже неоднократно применявшимся соображений. Изменив несколько  $h$ , получим соседнюю близкую кривую на фазовой плоскости.

Воспользуемся этим способом для решения нашей задачи — дать картину интегральных кривых на фазовой плоскости вблизи состояний равновесия. Начнем с того случая, когда состояние равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии.

Пусть минимум потенциальной энергии имеет место для  $x = \bar{x}$  и пусть  $V(x) = h_0$ . Диаграмма баланса энергии вблизи  $x = \bar{x}$  будет иметь вид, изображенный на рис. 58. Интегральная кривая для  $h = h_0$  вырождается в изолированную точку с координатами  $x = \bar{x}$ ,  $y = 0$ . Для близкого значения  $h = h_1$  ( $h_1 > h_0$ ) будем иметь замкнутую инте-

<sup>1)</sup> Для простоты построения мы примем для фазовой плоскости несколько иной масштаб вдоль оси ординат, откладывая по ординатам не  $y$ , а  $\frac{y}{\sqrt{2}}$ .

<sup>2)</sup> Абсцисса  $a$  точки пересечения интегральных кривых с осью  $x$ , очевидно, определяется уравнением  $V(x) = h$ . В рассматриваемом случае точка  $x = a$  не является особой, так как  $f(a) \neq 0$ .

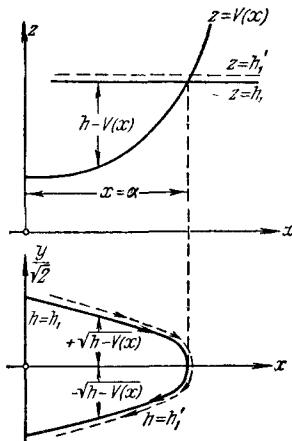


Рис. 57.

гральной кривую. Направление движения по этой замкнутой кривой легко найдется обычным методом.

При этом движении по замкнутой интегральной кривой действительная скорость, т. е. скорость материальной точки, два раза обращается в нуль: при  $x = \alpha$  и  $x = \beta$  (рис. 58); скорость же изображающей точки на фазовой плоскости нигде не равняется нулю, так как наша кривая не проходит через особую точку. Представляющая точка, двигаясь по замкнутой кривой, будет возвращаться на прежнее место через конечный промежуток времени. Отсюда следует, что мы имеем дело с периодическим движением. Не трудно видеть, что промежуточные значения  $h$  ( $h_0 < h < h_1$ ) дают опять замкнутые интегральные кривые, которые также соответствуют периодическим движениям.

На фазовой плоскости мы получаем целый континuum замкнутых кривых, вложенных одна в другую и охватывающих выродившуюся в точку интегральную кривую  $x = \bar{x}$ ,  $y = 0$ . Особую точку дифференциального уравнения с таким характером поведения окрестных интегральных кривых мы уже встречали при рассмотрении линейной консервативной системы. Такая точка, как указывалось, носит название *центра*.

Особая точка типа центра, как мы уже убедились при рассмотрении частного примера, соответствует устойчивому состоянию равновесия. Найдем теперь аналитические условия наличия такой особой точки и приближенные уравнения замкнутых кривых вблизи нее.

Вблизи особой точки с координатой  $\bar{x}$  разложения  $f(x)$  и  $V(x)$  в ряды имеют вид

$$f(x) = a_1(x - \bar{x}) + \frac{a_2}{1 \cdot 2}(x - \bar{x})^2 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - \bar{x})^3 + \dots, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} V(x) = h_0 - \left\{ \frac{a_1}{1 \cdot 2}(x - \bar{x})^2 + \frac{a_2}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - \bar{x})^3 + \right. \\ \left. + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(x - \bar{x})^4 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $a_1 = f'(\bar{x}) = -V''(\bar{x})$ ,  $a_2 = f''(\bar{x}) = -V'''(\bar{x})$ , и т. д. Перенесем начало координат в эту особую точку, положив  $x = \bar{x} + \xi$ ;  $y = 0 + \eta$ , и подставим в уравнение исследуемого семейства (2.7) выражение  $V(\bar{x} + \xi)$  в виде ряда. Тогда уравнение исследуемого семейства кривых может быть записано так:

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{ \frac{a_1 \xi^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \dots \right\} = h. \quad (2.10)$$

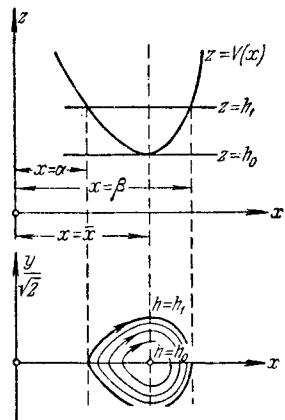


Рис. 58.

Рассмотрим сначала случай  $a_1 \neq 0$ . В этом случае на нашей диаграмме баланса энергии прямая  $z = h_0$  имеет соприкосновение первого порядка с кривой  $V(x)$  в точке  $x = \bar{x}$ . Так как  $V(x)$  для  $x = \bar{x}$  имеет минимум, то  $V''(\bar{x}) > 0$  и  $a_1 < 0$ . Кривая (2.10) для  $h = h_0$  имеет в точке  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  изолированную особую точку.

Для достаточно малого  $\alpha = h - h_0$  ( $\alpha > 0$ ) получаются замкнутые кривые, близкие к эллипсам, так как приближенно они могут быть описаны уравнением

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad (2.11)$$

где  $b^2 = 2a$ ,  $a^2 = \frac{2\alpha}{|a_1|}$ .

Движение, изображаемое на фазовой плоскости эллипсом, является гармоническим движением. Таким образом, для достаточно малых начальных отклонений движение будет близко к гармоническому. При увеличении начальных отклонений движение, вообще говоря, будет все сильнее и сильнее отличаться от гармонического, причем период также будет меняться в зависимости от величины начальных отклонений, так как время обращения представляющей точки по разным интегральным кривым, вообще говоря, различно.

Если лишь какое-нибудь  $a_k \neq 0$ , тогда как  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0, \dots$ ,  $a_{k-1} = 0$ , то на диаграмме баланса энергии прямая  $z = h_0$  имеет соприкосновение  $k$ -го порядка с кривой потенциальной энергии в точке  $x = \bar{x}$ . Так как  $V(x)$  для  $x = \bar{x}$  имеет минимум, то  $k$  непременно нечетное и  $a_k < 0$ . Кривая (2.10) для  $h = h_0$  опять имеет изолированную точку; для достаточно малого  $\alpha = h - h_0$  ( $h > h_0$ ) мы получим замкнутые интегральные кривые вида:

$$\frac{\eta^2}{2} + \frac{|a_k| \cdot \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots k(k+1)} = \alpha. \quad (2.12)$$

Замкнутые кривые вокруг особой точки даже в непосредственной близости к ней уже не будут походить на эллипсы, и соответствующие движения уже не будут близки к гармоническим даже при весьма малых отклонениях.

Однако общая топологическая картина движений на фазовой плоскости от этого не изменится: всякую особую точку, соответствующую минимуму потенциальной энергии, окружает континuum замкнутых кривых, вложенных друг в друга и соответствующих периодическим движениям.

Рассмотрим теперь случай, когда состояние равновесия соответствует максимуму потенциальной энергии. Диаграмма баланса энергии изображена на рис. 59 вверху, а внизу изображена фазовая плоскость. На фазовой плоскости для значения  $h = h_0$  мы получим четыре ветви кривой с общей точкой. Эти ветви мы перенумеруем I, II, III, IV и будем для краткости называть «усами» рассматриваемой особой точки. Характер «усов» вблизи особой точки легко

исследовать аналитически, как это будет сделано ниже. Для значений  $h$ , близких к  $h_0$  ( $h_1 > h_0$  и  $h_2 < h_0$ ), мы будем иметь участки интегральных кривых, похожие на ветви гипербол (рис. 60). Варьируя  $h$  между  $h_1$  и  $h_2$ , получим континуум промежуточных кривых.

Легко найти движение по этим интегральным кривым, пользуясь уже неоднократно применявшимся методом.

Во-первых, рассмотрим движение по усам (рис. 59). Изображающая точка, попав на усы  $\Pi$  и  $IV$  вблизи состояния равновесия, асимптотически к нему приближается, попав на усы  $I$  и  $III$  — удаляется от состояния равновесия. (Заметим, что при изменении  $t$  на  $-t$  усы меняются ролями.) Движения, характеризуемые остальными интегральными кривыми, обладают тем свойством, что если изображающая точка попадет на любую из таких кривых вблизи состояния равновесия, она в конечное время уйдет достаточно далеко от этого состояния равновесия.

Особую точку дифференциального уравнения с таким

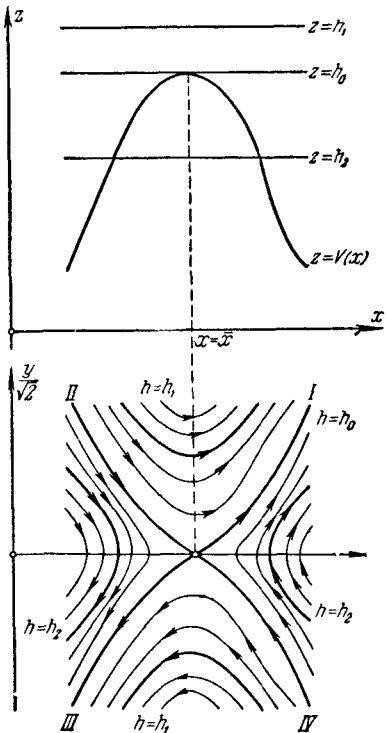


Рис. 59.

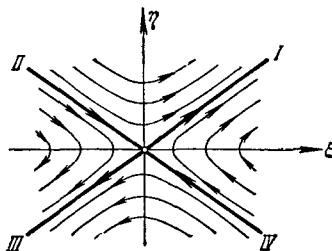


Рис. 60.

характером поведения окрестных интегральных кривых мы также уже встречали при рассмотрении систем с отталкивающей силой, это — особая точка типа *седла*.

Как мы видели при рассмотрении линейной системы с отталкивающей силой, особая точка типа седла соответствует всегда *неустойчивому* состоянию равновесия. Найдем теперь аналитические условия существования такой особой точки и приближенные уравнения интегральных кривых в непосредственной близости к состоянию равновесия. Поступая совершенно так же, как и в случае центра, мы

опять придем к уравнению (2.10):

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{ \frac{a_1 \xi^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \dots \right\} = h.$$

Опять начнем со случая простого соприкосновения прямой  $z = h_0$  и кривой  $V(x)$  в точке  $x = \bar{x}$ , т. е. со случая, когда  $a_1 \neq 0$ . Так как  $V(x)$  для  $x = \bar{x}$  имеет максимум, то  $V''(\bar{x}) < 0$  и  $a_1 > 0$ . Полагая  $h = h_0$ , мы получим уравнение усов. Нетрудно видеть, что начало координат ( $\xi = 0, \eta = 0$ ) является узловой точкой усов, причем уравнения касательных к усам в этом узле имеют вид

$$\eta = +V\bar{a}_1\xi \text{ и } \eta = -V\bar{a}_1\xi. \quad (2.13)$$

Для малых значений  $h - h_0 = \alpha$  мы получим семейство кривых, которые вблизи особой точки ведут себя подобно гиперболам, определяемым уравнением

$$\frac{\eta^2}{2\alpha} - \frac{a_1 \xi^2}{2\alpha} = 1. \quad (2.14)$$

Вид усов и характер интегральных кривых в непосредственной близости к особой точке изображен на рис. 60. Мы уже исследовали в предшествующей главе характер движения представляющей точки по этому семейству гипербол. Ясно, что эти результаты приближенно справедливы для движения по интегральным кривым вблизи особой точки и в рассматриваемом случае. При удалении от особой точки эти результаты, полученные нами для линейной системы, вообще говоря, все менее и менее точно описывают исследуемые движения.

В том случае, когда прямая  $z = h_0$  и кривая  $V(x)$  имеют соприкосновение  $k$ -го порядка,  $a_1 = 0, a_2 = 0$  и т. д. и лишь какое-нибудь  $a_k \neq 0$ . Так как для  $x = \bar{x}$   $V(x)$  имеет максимум, то  $k$  обязательно нечетное и  $a_k > 0$ . Полагая  $h = h_0$ , мы опять получим уравнение усов. Нетрудно видеть, что начало координат ( $\xi = 0, \eta = 0$ ) является точкой самоприкосновения усов (рис. 61), которые вблизи особой точки близки к кривой  $\eta^2 = \frac{a_k}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} \xi^{k+1}$  и имеют общей касательной ось  $\xi$ . Для малых значений  $\alpha$  ( $\alpha = h - h_0$ ) мы получим соседние интегральные кривые, которые вблизи особой точки ведут себя подобно кривым

$$\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} = \alpha. \quad (2.15)$$

Интегральные кривые вокруг особой точки уже отличаются от гипербол, и исследуемые движения уже даже приближенно не могут быть описаны при помощи той картины, которая была получена для линейной системы с отталкивающей силой. Однако общая топологическая картина движений на фазовой плоскости тождественна с предыдущим случаем и, следовательно, вполне определяется тем, что мы имеем дело с максимумом потенциальной энергии.

Рассмотрим теперь третий и последний случай, когда состоянию равновесия на кривой потенциальной энергии соответствует точка перегиба с горизонтальной касательной.

Диаграмма баланса энергии и вид фазовой плоскости изображены на рис. 62. Построение интегральных кривых на фазовой плоскости не вызывает никаких затруднений для всех значений  $h$ , за исключением значения  $h = h_0$ , которое дает две ветви кривой с общей точкой  $x = \bar{x}$ ,  $y = 0$ . Выяснение характера этих двух усов вблизи особой точки представляет некоторые затруднения, и для этого требуется аналитическое рассмотрение. Прежде чем перейти к такому исследованию, которое проводится совершен-

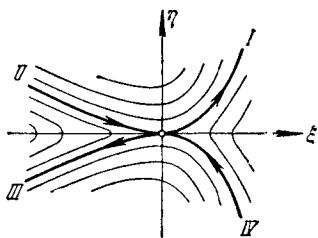


Рис. 61.

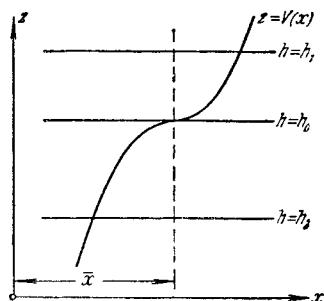


Рис. 62.

но так же, как в предыдущих двух случаях, заметим, что так как мы имеем дело с точкой перегиба, то непременно  $a_1 = 0$  (так как  $a_1 = -V''(x)$ , то первый коэффициент  $a_k$ , не равный нулю, имеет  $k$  четным). Уравнение (2.15) в этом случае получает вид

$$\frac{\eta^2}{2} - \left[ \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots (k+1)} + \frac{a_{k+1} \xi^{k+2}}{1 \cdot 2 \dots (k+2)} + \dots \right] = h - h_0. \quad (2.16)$$

Кривую, проходящую через особую точку, мы получим, полагая  $h = h_0$ . Нетрудно видеть, что эта кривая имеет в точке  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  точку возврата первого рода. Изображающая точка, попав на ус I, асимптотически стремится к состоянию равновесия, попав на ус II — удаляется от состояния равновесия. Состояние равновесия, как и в случае седла, очевидно, является неустойчивым, так как по прошествии достаточно большого промежутка времени представляющая точка, находившаяся в начальный момент в конечной

области  $\delta(\varepsilon)$ , непременно выйдет за пределы конечной области  $\varepsilon$ . Движение по усу  $I$  к состоянию равновесия не нарушает нашего утверждения о неустойчивости состояний равновесия, так же как и аналогичные движения в случае седла.

Мы рассмотрели три возможных случая экстремальных значений потенциальной энергии системы и связали их с типом особых точек и с вопросом об устойчивости состояний равновесия<sup>1)</sup>. Мы убедились в том, что в случае минимальной потенциальной энергии состояние равновесия является особой точкой типа центра и устойчиво; если потенциальная энергия имеет максимум, то состояние равновесия является особой точкой типа седла и неустойчиво. Состояние равновесия неустойчиво и в случае, когда потенциальная энергия имеет точку перегиба. На этом основании для рассматриваемого случая простейшей консервативной системы можно сформулировать две основные теории устойчивости: во-первых, теорему Лагранжа<sup>2)</sup>, которая гласит:

*Если в состоянии равновесия потенциальная энергия есть минимум, то состояние равновесия устойчиво,*  
и, во-вторых, обратную теорему Ляпунова:

*Если в состоянии равновесия потенциальная энергия не минимум, то состояние равновесия неустойчиво.*

#### § 4. Исследование характера движений на всей фазовой плоскости

Перейдем теперь от локального исследования движений вблизи особых точек к исследованию кривых на всей плоскости. При этом мы опять будем пользоваться плоскостью баланса энергии и будем исходить из предположения, что  $V(x)$  — функция, аналитическая на всей прямой  $x$ . Потом, когда мы перейдем к примерам, мы рассмотрим несколько случаев, когда  $V(x)$  допускает разрывы.

Итак, предположим, что на плоскости  $x, z$  нам даны кривая  $z = V(x)$ , удовлетворяющая указанным требованиям<sup>3)</sup>, и некоторая

<sup>1)</sup> Очевидно, каждая особая точка дифференциального уравнения (2.3) является особой точкой в смысле, употребляемом в дифференциальной геометрии, для интегральной кривой

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h_0.$$

Состоянию равновесия с минимальной потенциальной энергией соответствует изолированная особая точка, с максимальной потенциальной энергией — узловая точка (т. е. точка самопересечения кривой) или точка самоприкосновения, топологически эквивалентная узловой точке; наконец, состоянию равновесия, в котором потенциальная энергия имеет точку перегиба, соответствует точка возврата первого рода.

<sup>2)</sup> Эта теорема иногда носит название теоремы Лежен-Дирихле, по имени математика, который ее впервые строго доказал. Эта теорема справедлива также и для консервативных систем со многими степенями свободы.

<sup>3)</sup> Для краткости рассуждений мы предположим, что  $V(x)$  не допускает точек перегиба, в которых касательная параллельна оси  $x$ .