

области $\delta(\varepsilon)$, непременно выйдет за пределы конечной области ε . Движение по усу I к состоянию равновесия не нарушает нашего утверждения о неустойчивости состояний равновесия, так же как и аналогичные движения в случае седла.

Мы рассмотрели три возможных случая экстремальных значений потенциальной энергии системы и связали их с типом особых точек и с вопросом об устойчивости состояний равновесия¹⁾. Мы убедились в том, что в случае минимальной потенциальной энергии состояние равновесия является особой точкой типа центра и устойчиво; если потенциальная энергия имеет максимум, то состояние равновесия является особой точкой типа седла и неустойчиво. Состояние равновесия неустойчиво и в случае, когда потенциальная энергия имеет точку перегиба. На этом основании для рассматриваемого случая простейшей консервативной системы можно сформулировать две основные теории устойчивости: во-первых, теорему Лагранжа²⁾, которая гласит:

Если в состоянии равновесия потенциальная энергия есть минимум, то состояние равновесия устойчиво,
и, во-вторых, обратную теорему Ляпунова:

Если в состоянии равновесия потенциальная энергия не минимум, то состояние равновесия неустойчиво.

§ 4. Исследование характера движений на всей фазовой плоскости

Перейдем теперь от локального исследования движений вблизи особых точек к исследованию кривых на всей плоскости. При этом мы опять будем пользоваться плоскостью баланса энергии и будем исходить из предположения, что $V(x)$ — функция, аналитическая на всей прямой x . Потом, когда мы перейдем к примерам, мы рассмотрим несколько случаев, когда $V(x)$ допускает разрывы.

Итак, предположим, что на плоскости x, z нам даны кривая $z = V(x)$, удовлетворяющая указанным требованиям³⁾, и некоторая

¹⁾ Очевидно, каждая особая точка дифференциального уравнения (2.3) является особой точкой в смысле, употребляемом в дифференциальной геометрии, для интегральной кривой

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h_0.$$

Состоянию равновесия с минимальной потенциальной энергией соответствует изолированная особая точка, с максимальной потенциальной энергией — узловая точка (т. е. точка самопересечения кривой) или точка самоприкосновения, топологически эквивалентная узловой точке; наконец, состоянию равновесия, в котором потенциальная энергия имеет точку перегиба, соответствует точка возврата первого рода.

²⁾ Эта теорема иногда носит название теоремы Лежен-Дирихле, по имени математика, который ее впервые строго доказал. Эта теорема справедлива также и для консервативных систем со многими степенями свободы.

³⁾ Для краткости рассуждений мы предположим, что $V(x)$ не допускает точек перегиба, в которых касательная параллельна оси x .

прямая $z = h$. Построим на фазовой плоскости совокупность всех движений, которые характеризуются заданной константой энергии. Могут встретиться следующие основные случаи:

1) Прямая $z = h$ нигде не пересекает кривой $V(x)$. Если в этом случае точки кривой $z = V(x)$ лежат выше точек прямой $z = h$, то на всей фазовой плоскости не существует движений с такой полной энергией, так как скорости таких движений были бы мнимыми. Если же прямая $z = h$ лежит выше кривой $z = V(x)$, то на фазовой плоскости мы будем иметь две симметрично расположенные ветви фазовой траектории (рис. 63). Изображающая точка, начавшая двигаться с любого места как верхней, так и нижней ветви, будет двигаться в одном направлении, не останавливаясь, и уйдет в бесконечность. Если мы заменим t на $-t$, т. е. заставим время «течь в обратном направлении», то характер движения изображающей точки не нарушится, изменится лишь направление движения. Такие движения, такие фазовые траектории, для которых изображающая точка при всяком начальном положении уходит в бесконечность, мы будем называть убегающими движениями и убегающими траекториями. Рассматриваемые движения являются убегающими как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Легко видеть, что для соседних значений h мы получим ту же самую картину, у нас будут совершенно аналогичные фазовые траектории.

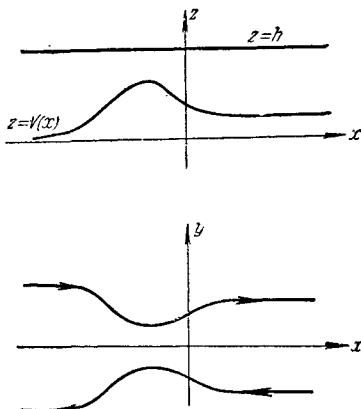


Рис. 63.

2) Прямая $z = h$ пересекает кривую $z = V(x)$, нигде ее не касаясь (рис. 64). Для тех значений x , для которых $V(x) > h$, нет фазовых траекторий, для остальных же значений x существуют фазовые траектории, причем они бывают двух родов: это либо ветви, уходящие в бесконечность (число которых не больше двух), либо это замкнутые ветви (число которых может быть любым). Ветви, уходящие в бесконечность, опять-таки соответствуют движениям, убегающим как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Замкнутые ветви соответствуют периодическим движениям.

Для близких значений h мы будем иметь ту же самую картину, причем около замкнутых кривых мы получим замкнутые же фазовые кривые, а около бесконечных ветвей — бесконечные ветви.

3) Прямая $z = h$ касается кривой $z = V(x)$. Тогда все фазовые кривые можно разбить на следующие классы:

а) *Изолированные точки*, вблизи которых (при данном h) нет ветвей фазовых кривых. Это — устойчивые состояния равновесия,

о которых мы уже говорили. Если мы будем менять h , то при увеличении h получим замкнутую кривую, охватывающую рассматриваемую изолированную точку, при уменьшении h вблизи изолированной точки мы не получим действительных ветвей кривой.

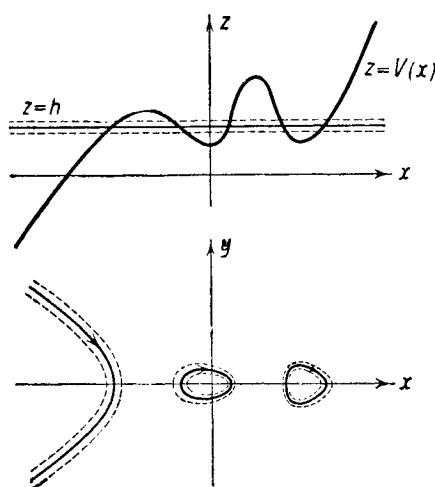


Рис. 64.

(рис. 65). Те сепаратрисы, о которых сейчас идет речь, состоят из одного (в случае вырождения), а вообще говоря, из нескольких «звеньев».

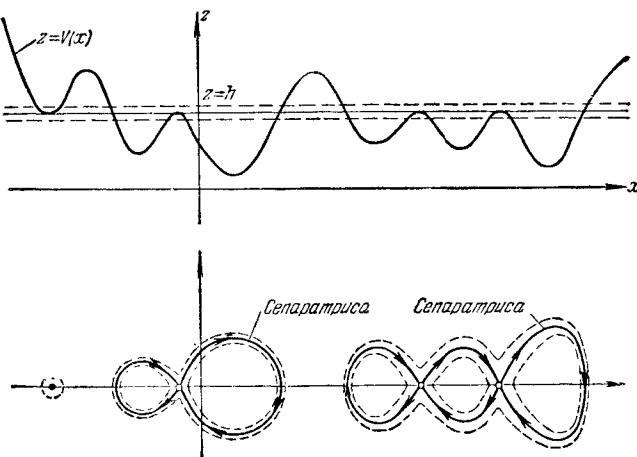


Рис. 65.

Каждое звено представляет собой отдельную фазовую траекторию (если оно граничное) или состоит из двух фазовых траекторий (если

б) *Изолированные конечные куски фазовых кривых.* Они могут быть двух родов: или это просто замкнутые кривые, соответствующие периодическим движениям, о которых у нас уже шла речь, или это фазовые кривые с самопересечением, принадлежащие к числу так называемых *сепаратрис*, т. е. к числу кривых, проходящих через особые точки. Эти точки самопересечения или особые точки типа седла, как мы уже знаем, соответствуют тем точкам на диаграмме x, z , где прямая $z = h$ касается максимумов кривой $z = V(x)$

оно не граничное¹⁾). Движение по какой-нибудь из траекторий, о которых шла речь, является асимптотическим к состоянию равновесия. Такие движения называются *лимитационными* движениями. На один пример такого движения мы уже указывали при рассмотрении маятника, находящегося в верхнем положении равновесия. Рассматриваемые сейчас движения являются лимитационными как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Сепаратрисы — это, в известном смысле, исключительные интегральные кривые, так как им соответствуют точки

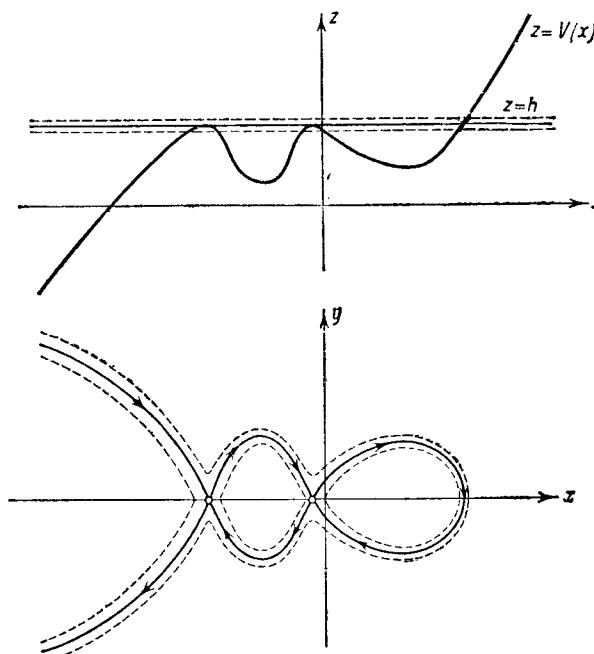


Рис. 66.

касания прямой $z = h$ с кривой $z = V(x)$ на плоскости баланса энергии. Знание их чрезвычайно важно для выяснения общей картины интегральных кривых на фазовой плоскости.

При изменении h характер соседних кривых будет существенно зависеть от того, будем ли мы увеличивать h или уменьшать. При увеличении h мы получим интегральную кривую, охватывающую всю исследуемую сепаратрису, всю «цепочку» лимитационных траекторий. При уменьшении мы получим замкнутые интегральные кривые внутри каждого звена (рис. 6б). Отсюда понятна роль *сепаратрис как*

¹⁾ Особые точки являются также отдельными траекториями — они соответствуют состояниям равновесия.

«отделяющих» кривых, которые разделяют области, заполненные траекториями разных типов.

в) Бесконечные куски фазовых кривых. В этом случае возможно несколько типов кривых. Во-первых, это могут быть убегающие траектории того типа, который мы уже рассматривали в п. 2. Во-вторых, это может быть сепаратриса в виде бесконечной цепочки, простирающейся в одну или в обе стороны. Существенно новыми здесь будут траектории, которые являются убегающими при $t \rightarrow +\infty$ и которые являются лимитационными при $t \rightarrow -\infty$, или наоборот (рис. 66). Такие траектории мы также назовем сепаратрисами, так как на них

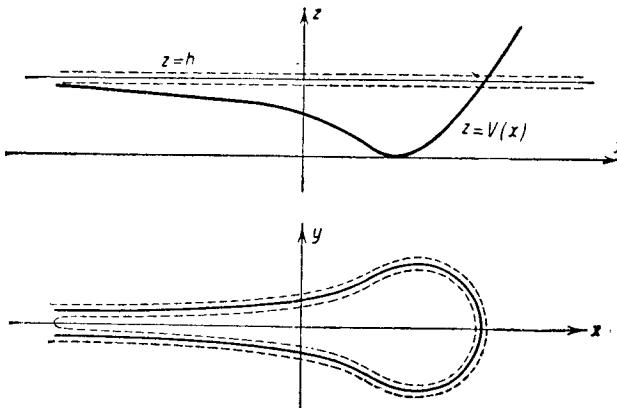


Рис. 67.

непременно имеются особые точки, которым соответствует касание прямой $z = h$ с кривой $z = V(x)$, и так как, что особенно существенно, характер соседних кривых существенно меняется в зависимости от того, будем ли мы увеличивать или уменьшать h .

Заметим, что к числу сепаратрис могут быть отнесены иногда и движения, которые являются убегающими как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Именно это может быть тогда, когда для рассматриваемого случая прямая $z = h$ является асимптотой кривой $z = V(x)$, так как в этом случае мы можем получить существенное изменение характера фазовой траектории при изменении h .

Подобный пример для наглядности представлен на рис. 67. При уменьшении h убегающая траектория превращается в периодическую.

Итак, резюмируя полученные результаты, дадим перечень возможных движений:

- 1) Состояния равновесия.
- 2) Периодические движения.
- 3) Дважды лимитационные движения (как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$).

4) Дважды убегающие движения (как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$).

5) Движения лимитационно-убегающие (при $t \rightarrow +\infty$ лимитационные, при $t \rightarrow -\infty$ убегающие, или наоборот). Можно показать [163] (об этом мы еще будем говорить), что для консервативных систем почти все движения либо периодические, либо дважды убегающие, т. е. если мы будем считать все начальные значения на фазовой плоскости равновероятными, то вероятность попасть на начальные условия, соответствующие движениям типа 1), 3), 5), равна нулю, — так «редко» они расположены. Однако фазовые траектории, соответствующие этим движениям, играют большую роль на фазовой плоскости: они являются сепараторами — кривыми, которыми отделяют друг от друга на фазовой плоскости траектории разных видов.

Прежде чем закончить этот параграф, нужно исследовать закон распределения особых точек по прямой $y = 0$, на которой они в нашем случае только и могут быть расположены, и законы существования особых точек и замкнутых фазовых траекторий. И первый и второй вопросы были решены Пуанкаре для общего случая неконсервативной системы, и мы дадим это решение в дальнейшем. Для рассматриваемого же частного случая ответ на эти вопросы получается из самых элементарных соображений. Ответим сперва на первый вопрос. Очевидно, что максимумы и минимумы кривой $z = V(x)$ чередуются между собой. Отсюда следует, что особые точки типа седла и типа центра также чередуются между собой на оси абсцисс фазовой плоскости.

Чтобы ответить на второй вопрос о существовании замкнутых фазовых траекторий и особых точек, нужно будет также обратиться к плоскости баланса энергии (рис. 68).

Пусть у нас имеется на фазовой плоскости замкнутая кривая $\alpha\rho$. Тогда на плоскости баланса энергии точкам α, ρ соответствуют точки, в которых прямая $z = h$ пересекает кривую $z = V(x)$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = h - V(x)$. Для нашего случая $\Phi(\alpha) = 0, \Phi(\rho) = 0$ и $\Phi'(x) > 0$ для $\alpha < x < \rho$. Поэтому на основании теоремы Ролля мы можем утверждать, что существует такое значение $x = \xi$ ($\alpha < \xi < \rho$), для которого $\Phi'(\xi) = 0$ или, что все равно, $V'(\xi) = 0$.

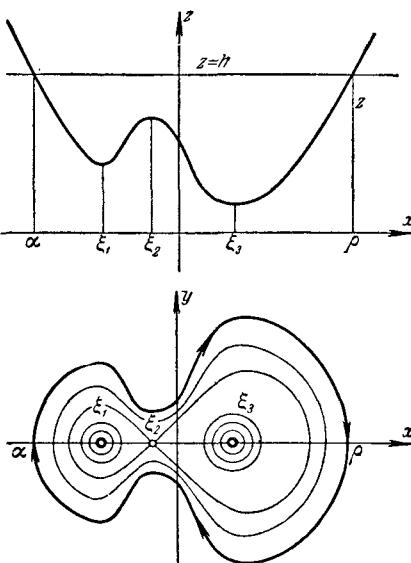


Рис. 68.

Таким образом, мы доказали, что внутри замкнутой фазовой траектории непременно имеется по крайней мере одна особая точка или, иначе говоря, что периодическое движение непременно совершаются вокруг положения равновесия. Из геометрических соображений видно, что если эта особая точка единственная, то она соответствует минимуму потенциальной энергии и является особой точкой типа центра;

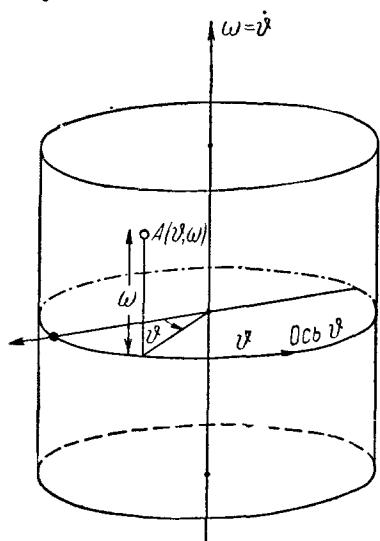


Рис. 69.

в самом деле, положение маятника определяется углом (обозначим его через ϑ) и значения $\dot{\vartheta}$, отличающиеся на 2π , определяют одно и то же его положение. Поэтому, если бы мы взяли в качестве фазовой поверхности маятника обычную плоскость с декартовыми координатами ϑ , $\dot{\vartheta}$, то точки этой плоскости $(\vartheta + 2k\pi, \dot{\vartheta})$, где k — любое целое число, соответствовали бы тому же состоянию, что и точка $(\vartheta, \dot{\vartheta})$, т. е. было бы нарушено требование взаимно-однозначного и непрерывного соответствия между состояниями системы и точками ее фазовой поверхности. Это требование будет выполнено, если в качестве фазовой поверхности маятника мы возьмем не плоскость, а цилиндр (рис. 69).¹⁾ Цилиндричность фазовой поверхности маятника,

если же таких особых точек несколько, то центры и седла всегда будут чередоваться, причем число центров будет всегда на единицу больше числа седел. Мы можем сформулировать такую теорему: в случае консервативной системы *внутри замкнутой фазовой кривой непременно имеется нечетное число особых точек, причем число центров на единицу больше числа седел.*

В заключение параграфа рассмотрим обычный маятник (с одной степенью свободы), пренебрегая силами трения и не ограничиваясь малыми углами отклонения от вертикали. Эта консервативная система несколько выходит за пределы только что изложенного, поскольку в качестве фазовой поверхности не может быть взята плоскость. В

¹⁾ Весьма удобно изображать фазовые траектории маятника и ему подобных систем не на цилиндре, а на развертке цилиндра на плоскость в виде полосы шириной 2π . В этом случае следует, однако, иметь в виду, что одна и та же линия разреза цилиндра изображается на развертке двумя (пограничными) прямыми; поэтому, пользуясь разверткой цилиндра как фазовой поверхностью, мы должны отождествлять точки этих прямых (точки с одинаковыми $\dot{\vartheta}$), т. е. считать их соответствующими одним и тем же состояниям системы.

очевидно, связана с наличием двух различных типов движений маятника: движений без проворота вокруг оси и движений с проворотами.

Уравнение маятника, как известно, может быть записано в виде

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg l \sin \theta = 0, \quad (2.17)$$

где I — момент инерции, l — расстояние от центра тяжести до точки подвеса, $P = mg$ — вес маятника (угол θ отсчитывается от вертикали, направленной вниз). Уравнение (2.17) можно привести к системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{mg l}{I} \sin \theta. \quad (2.18)$$

Для получения дифференциального уравнения интегральных кривых на фазовом цилиндре (или на его развертке) разделим второе из уравнений (2.18) на первое:

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{mg l}{I} \cdot \frac{\sin \theta}{\omega}. \quad (2.19)$$

Интегрируя это уравнение, получим интеграл энергии (или, иначе, уравнение семейства интегральных кривых уравнения (2.19)):

$$\frac{1}{2} I \omega^2 - mg l \cos \theta = h (= \text{const}). \quad (2.20)$$

Для построения интегральных кривых воспользуемся приемом, указанным в § 3. Построив на вспомогательной плоскости θ, z кривую

$$z = V(\theta) = -mg l \cos \theta \quad (2.21)$$

и расположив под ней развертку фазового цилиндра, не трудно на последней построить семейство интегральных кривых, пользуясь тем, что согласно (2.20)

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{2}{I} V h - V(\theta)}.$$

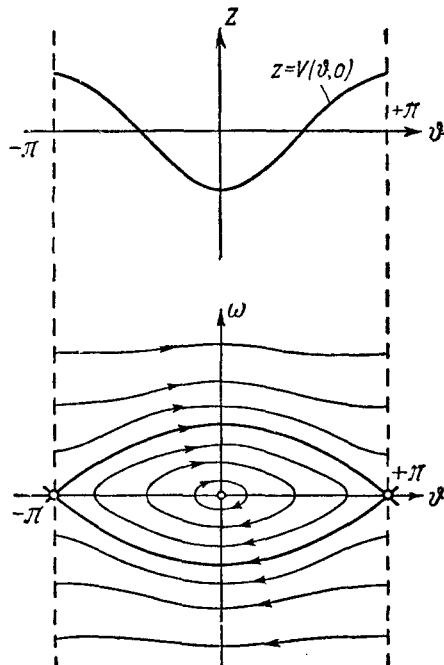


Рис. 70.

Такое построение дано на рис. 70. Особая точка $(0, 0)$ — центр (ей соответствует константа интегрирования $h = -mg l$). Она охватывается континуумом замкнутых фазовых траекторий, для которых

$-mgl < h < +mgl$. Эти фазовые траектории, очевидно, соответствуют периодическим колебаниям маятника около нижнего положения равновесия *без проворота* вокруг оси. При константе интегрирования $h = +mgl$ получается интегральная кривая, проходящая через седло $(\pm \pi, 0)$, т. е. состоящая из седла и его сепаратрис (первому соответствует верхнее, неустойчивое положение равновесия, а последним — лимитационные движения маятника, при которых маятник

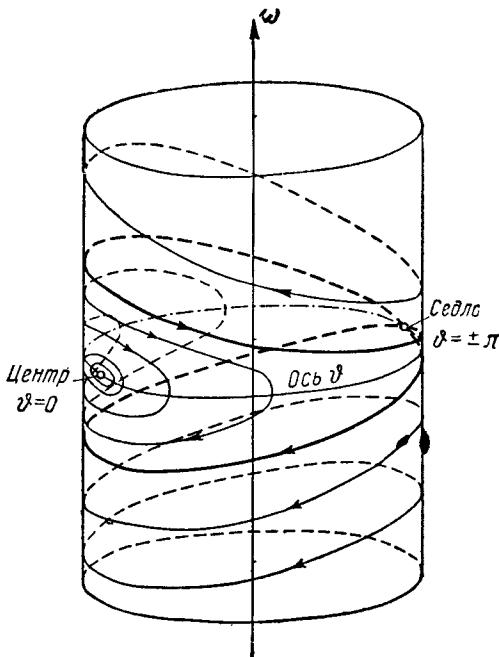


Рис. 71.

ник асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ приближается к верхнему положению равновесия). Для $h > +mgl$ получаем траектории, лежащие вне сепаратрис и охватывающие цилиндр. Так как для каждой такой траектории значения ω при $\vartheta \rightarrow +\pi$ и при $\vartheta \rightarrow -\pi$ совпадают, то мы можем утверждать, что эти траектории также замкнуты (они соответствуют периодическим вращательным движениям маятника). «Склейв» развертку цилиндра по линии разреза $\vartheta = \pm \pi$, мы получим фазовый портрет маятника — фазовый цилиндр, разбитый на фазовые траектории (рис. 71). Таким образом, все фазовые траектории консервативного маятника, кроме особых точек — центра и седла и сепаратрис седла, замкнутые, причем имеются два качественно различных типа фазовых траекторий: охватывающих и не охватывающих фазовый цилиндр.