

## § 5. Зависимость поведения простейшей консервативной системы от параметра

Мы уже говорили, что консервативная система представляет собой исключительную систему в том смысле, что для нее существует интеграл энергии. Иначе говоря, если мы произвольным образом, хотя бы и сколь угодно мало, будем менять вид уравнений движения, то эти уравнения, вообще говоря, перестанут удовлетворять условию консервативности. Мы, однако, сейчас будем рассматривать только такие изменения параметров, характеризующих нашу систему, при которых она остается консервативной. Для простоты предположим, что у нас есть только один переменный параметр и что от этого параметра зависит только потенциальная энергия системы.

Наша задача будет заключаться в исследовании того, как меняется вид фазовой плоскости при изменении параметра. Мы не будем затрагивать важный вопрос о том, как будет вести себя какое-нибудь *определенное* движение, имеющее определенные начальные условия, при *достаточно медленном изменении параметра*<sup>1)</sup>.

Основными элементами, определяющими качественную картину интегральных кривых для консервативных систем, являются особые точки и сепаратрисы. Если мы знаем вид сепаратрис (особые точки типа седла суть точки самопересечения сепаратрис) и относительное расположение сепаратрис и состояний равновесия типа центра, то мы можем воспроизвести в общих чертах всю картину интегральных кривых.

При изменении параметра интегральные кривые будут меняться. Однако, если, как мы предположим, потенциальная энергия является аналитической функцией параметра, то эти изменения будут совершаться непрерывно. Общий вид интегральных кривых будет претерпевать, вообще говоря, только количественные изменения, и лишь при некоторых особых, так называемых «бифуркационных» значениях параметра мы будем иметь качественные изменения характера интегральных кривых. Как мы уже сказали, в случае консервативной системы основными элементами, определяющими качественную картину интегральных кривых на фазовой плоскости, являются особые точки и сепаратрисы. Поэтому бифуркационными значениями параметра в этом случае служат те значения параметра, при которых происходит изменение числа или характера этих основных элементов.

<sup>1)</sup> Ответ на этот последний вопрос особенно труден как раз для консервативных систем; в этом случае этим вопросом занимается так называемая теория адиабатических инвариантов.

Более точно и более общо можно дать такое определение, не связанное с консервативностью системы: значение параметра  $\lambda = \lambda_0$  мы назовем обычным, если существует такое конечное  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), что для всех  $\lambda$ , удовлетворяющих неравенству  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ , мы

имеем одну и ту же топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые. Другие значения параметров, для которых это условие не соблюдается, мы назовем *бифуркационными*.

Мы изложим сравнительно подробно развитую Пуанкаре [182, 183] теорию зависимости состояний равновесия от параметра, так как она нам понадобится при исследовании автоколебательных систем; другие бифуркационные случаи, связанные с зависимостью сепаратрис от параметра, мы лишь иллюстрируем примерами.

Предположим, что потенциальная энергия системы (2.1), а, значит, вместе с тем и сила, является функцией параметра  $\lambda$ , который может принимать различные значения<sup>1)</sup>. Положения равновесия ( $x = \bar{x}$ ) характеризуются тем, что для них сила равна нулю, т. е.

$$f(\bar{x}, \lambda) = 0. \quad (2.22)$$

Решая это уравнение относительно  $\bar{x}$ , можно найти положения равновесия, которые имеет рассматриваемая консервативная система при том или ином значении параметра  $\lambda$ , можно проследить, как меняются положения равновесия при изменении  $\lambda$ .

Зависимость положений равновесия от параметра может быть наглядно проиллюстрирована так называемой *бифуркационной диаграммой* — кривой  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , построенной на плоскости  $\lambda$ ,  $\bar{x}$ . Пусть, например, эта кривая имеет вид, изображенный на рис. 72. Прямая  $\lambda = \lambda_0$ , параллельная оси ординат, пересекает кривую  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  в трех точках; это, очевидно, означает, что при данном значении параметра  $\lambda = \lambda_0$  система имеет три положения равновесия  $\bar{x} = \bar{x}_1$ ,  $\bar{x} = \bar{x}_2$  и  $\bar{x} = \bar{x}_3$ . При уменьшении  $\lambda$  положения равновесия  $\bar{x} = \bar{x}_1$  и  $\bar{x} = \bar{x}_2$  сближаются, при  $\lambda = \lambda_c$  сливаются и затем пропадают (при  $\lambda < \lambda_c$  существует только одно положение равновесия:  $\bar{x} = \bar{x}_3$ ). Значение параметра  $\lambda = \lambda_c$  является, таким образом, бифуркационным значением. Также бифуркационными будут значения  $\lambda = \lambda_A$  и  $\lambda = \lambda_B$ , при которых также происходит изменение числа равновесных состояний системы.

<sup>1)</sup> Мы предполагаем, что  $f(x, \lambda)$  — аналитическая функция  $x$  на всей прямой  $x$  и аналитическая функция  $\lambda$  для рассматриваемой области значений  $\lambda$ .

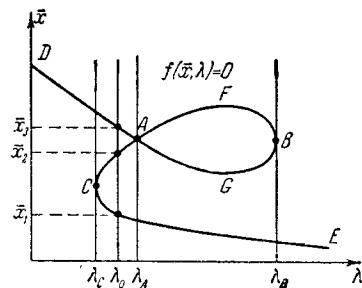


Рис. 72.

Дифференцируя уравнение (2.22) по  $\lambda$ , имеем:

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\lambda} + \frac{df}{d\lambda} = 0$$

или

$$\frac{d\bar{x}}{d\lambda} = -\frac{f'_\lambda(\bar{x}, \lambda)}{f'_x(\bar{x}, \lambda)}. \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что в окрестности точки кривой  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , для которой  $f'_x(\bar{x}, \lambda) \neq 0$ ,  $\bar{x}$  является непрерывно дифференцируемой функцией  $\lambda$ . Поэтому, если для некоторого значения параметра  $\lambda = \lambda_0$  система уравнений

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= 0, \\ f'_x(x, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

не имеет действительных решений для  $x$ , мы можем утверждать, что в достаточно малой окрестности этого значения параметра  $\lambda = \lambda_0$  абсциссы  $\bar{x}$  всех положений равновесия являются непрерывно дифференцируемыми функциями параметра  $\lambda$  и их число не может изменяться. Тем самым такое значение  $\lambda = \lambda_0$  не является бифуркационным (в том смысле, что при переходе  $\lambda$  через  $\lambda = \lambda_0$  не происходит изменения числа состояний равновесия).

Пусть теперь в некоторой точке  $(\lambda, \bar{x})$  кривой  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  также и  $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ . Если  $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda) = 0$ , а  $f''_\lambda(\bar{x}, \lambda) \neq 0$ , то кривая в этой точке имеет вертикальную касательную, и когда  $\lambda$  проходит (в соответствующем направлении) через значение, соответствующее этой точке, два действительных корня для  $\bar{x}$  сливаются, а затем становятся комплексными<sup>1)</sup>. Это — точка бифуркации, в которой происходит изменение числа состояний равновесия (точки  $B$  и  $C$  на рис. 72). Если же в точке  $(\lambda, \bar{x})$  кривой  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$   $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$  и  $f''_\lambda(\bar{x}, \lambda) = 0$ , то мы имеем дело с особой точкой (в смысле дифференциальной геометрии) этой кривой. Эта точка (точка  $A$  на рис. 72) будет также точкой бифуркации, так как при значении  $\lambda$ , соответствующем этой точке, число равновесных состояний всегда иное, чем при соседних значениях этого параметра.

Таким образом, точки кривой  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , для которых  $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ , являются точками бифуркации, а соответствующие значения параметра  $\lambda$  — бифуркационными значениями. Кроме этих значений бифуркационными значениями параметра  $\lambda$  будут те значения, при которых кривая  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  уходит в бесконечность (это будет иметь место, если эта кривая имеет бесконечные ветви с вертикальными асимптотами).

<sup>1)</sup> Мы исключаем из рассмотрения случай, когда кривая  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  в этой точке имеет точку перегиба. Для этого достаточно, например, предположить, что в этой точке  $f''_{xx}(\bar{x}, \lambda) \neq 0$ .

Каждому положению равновесия  $x = \bar{x}$  соответствует определенное состояние равновесия ( $x = \bar{x}$ ,  $\dot{x} = 0$ ) — определенная особая точка на фазовой плоскости. Характер особых точек или, что все равно, устойчивость состояний равновесия определяется, как мы видели, знаком производной  $f'_x(\bar{x}, \lambda) = -V''_{xx}(\bar{x}, \lambda)$ . Именно, при

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0 \quad (2.25)$$

(потенциальная энергия минимальна) состояние равновесия устойчиво (типа центра), а при

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0 \quad (2.26)$$

(потенциальная энергия максимальна) состояние равновесия является седлом и неустойчиво.

Нетрудно дать, следуя Пуанкаре, простой рецепт для быстрого определения устойчивости состояний равновесия при помощи бифуркационной диаграммы. Отметим (заштрихуем) на плоскости  $\lambda$ ,  $\bar{x}$  области  $f(\bar{x}, \lambda) > 0$  (кривая  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , очевидно, будет их границей). Если данная точка  $(\lambda, \bar{x})$  лежит над заштрихованной областью, то она соответствует устойчивому состоянию равновесия<sup>1)</sup>. Действительно, вблизи этой точки функция  $f(x, \lambda)$  убывает с увеличением  $\bar{x}$  ( $\lambda$  фиксировано) от положительных значений внутри заштрихованной области до нуля на кривой  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ . Следовательно,  $f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0$ , что соответствует

особой точке типа центра и *устойчивому* состоянию равновесия. Если же точка кривой  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$  лежит под заштрихованной областью, то она соответствует *неустойчивому* состоянию равновесия, так как для нее в силу аналогичных соображений имеет место неравенство  $f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0$ . Следуя этому рецепту, сразу находим, что, например, на рис. 73 точки участков  $DA$ ,  $AFB$ ,  $CE$  (начертанных жирной линией с точками) соответствуют устойчивым, а точки участков  $AGB$  и  $AC$  (начертанных тонкой линией с кружками) — неустойчивым состояниям равновесия.

Обратим теперь внимание на следующее. Если мы будем двигаться на бифуркационной диаграмме вдоль кривой  $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ , то характер состояния равновесия, т. е. его устойчивость или неустойчивость, будет сохраняться до тех пор, пока мы не дойдем до точки бифуркации. Нетрудно видеть, что если мы будем продолжать двигаться дальше по кривой, следуя направлению касательной (т. е. следя за тем, чтобы касательная вращалась непрерывно), то в точке бифуркации устойчивое состояние равновесия сменится неустойчивым

<sup>1)</sup> Мы предполагаем обычное расположение осей координат: ось  $\bar{x}$  направлена вверх, а ось  $\lambda$  — вправо.

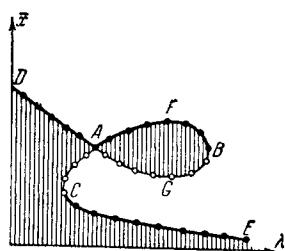


Рис. 73.

и наоборот. На рис. 73 такая смена устойчивости происходит в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Итак, мы видим, что при изменении параметра  $\lambda$  состояния равновесия в конечной части фазовой плоскости могут исчезать и появляться только парами, причем (и это *отличительная особенность консервативных систем*) состояние равновесия может изменить свою устойчивость, например из устойчивого превратиться в неустойчивое, только предварительно слившись с другим состоянием равновесия.

В смысле смены устойчивости состояния равновесия консервативных систем образуют замкнутую систему, поведение которой при изменении параметра можно изучать отдельно от поведения сепаратрис.

Те значения параметра, при которых состояния равновесия сливаются или уходят в бесконечность, конечно, принадлежат к бифуркационным значениям параметра, но, вообще говоря, ими не исчерпываются все бифуркационные значения, так как могут быть существенные изменения в характере сепаратрис при неизменном числе и характере состояний равновесия.

Относительно бифуркационных значений этого второго типа мы не будем высказывать никаких общих соображений, а познакомимся с ними на отдельных конкретных примерах, которые мы сейчас рассмотрим. На этих же примерах мы проиллюстрируем все сказанное выше относительно бифуркационных значений, в которых происходит изменение в характере состояний равновесия.

**I. Движение тяжелой точки по окружности, вращающейся вокруг вертикальной оси.** Рассмотрим движение тяжелой точки массы  $m$  по окружности радиуса  $a$ , когда эта окружность вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 74). Примером такой консервативной системы может служить маятник, колеблющийся на вращающейся платформе.

Положение точки (массы  $m$ ) будем определять углом  $\vartheta$  в системе координат, связанной с вращающейся окружностью. Для написания уравнения движения тяжелой точки в такой вращающейся, неинерциальной системе координат в виде второго закона Ньютона необходимо, как известно, ввести силы инерции, в данном случае центробежную силу. Момент центра окружности равен  $-mga \sin \vartheta$ , а ее момент  $+m\Omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta$ .

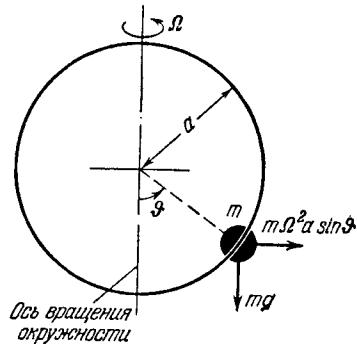


Рис. 74.

силами трения, получим следующее уравнение движения рассматриваемой системы:

$$I \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = m\Omega^2 a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - m g a \sin \vartheta, \quad (2.27)$$

где  $I = m a^2$  — момент инерции тяжелой точки (относительно центра окружности). Если ввести безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{g}{\Omega^2 a}$$

и новое, безразмерное время

$$t_{\text{нов}} = \Omega t$$

(ниже дифференцирование по новому времени обозначается точкой сверху), то уравнение (2.27) приведется к виду, содержащему один параметр:

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad \dot{\omega} = (\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta. \quad (2.28)$$

Для того чтобы на примере консервативной системы (2.28) проиллюстрировать качественное изменение характера сепаратрис при изменении параметра и без изменения числа особых точек, мы будем считать, что параметр  $\lambda$  может принимать любое значение  $-\infty < \lambda < +\infty$ , несмотря на то, что для рассматриваемой физической системы  $\lambda > 0$ , а значения  $\lambda \leq 0$  не имеют физического смысла<sup>1)</sup>.

Поскольку положение тяжелой точки однозначно определяется углом  $\vartheta$ , фазовой поверхностью рассматриваемой системы опять будет цилиндр (мы будем изображать фазовые траектории на развертке этого цилиндра). Уравнение интегральных кривых получим, разделив одно из уравнений (2.28) на другое:

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{(\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta}{\omega}. \quad (2.29)$$

Интеграл энергии запишется так:

$$\omega^2 - (\sin^2 \vartheta + 2\lambda \cos \vartheta) = h \quad (2.30)$$

(из (2.30) сразу видно, что интегральные кривые симметричны относительно осей  $\vartheta$  и  $\omega$ ).

Положения равновесия определяются уравнением

$$f(\vartheta, \lambda) \equiv (\cos \vartheta - \lambda) \sin \vartheta = 0. \quad (2.31)$$

Очевидно, система имеет положения равновесия  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pm \pi$ ,

<sup>1)</sup> Заметим, что значение  $\lambda = 1$  получается при  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ , т. е. при совпадении угловой скорости вращения окружности с круговой частотой малых колебаний массы  $m$  около нижнего положения равновесия (при  $\Omega = 0$ ).

существующие при любом  $\lambda$ . Кроме того, при  $|\lambda| < 1$  существуют еще два положения равновесия  $\theta = +\vartheta_0$  и  $\theta = -\vartheta_0$ , где  $\vartheta_0 = \arccos \lambda$ . На рис. 75 изображена бифуркационная диаграмма для положений равновесия (штриховка и обозначения на ней имеют тот же смысл, что и в предыдущем примере). Таким образом, при  $\lambda > +1$  система имеет две особые точки: центр ( $\theta = 0, \omega = 0$ ) и седло ( $\theta = \pm \pi, \omega = 0$ ); при  $-1 < \lambda < +1$  — четыре особые точки: центры ( $\theta = \pm \vartheta_0, \omega = 0$ ) и седла ( $\theta = 0, \omega = 0$ ) и ( $\theta = \pm \pi, \omega = 0$ ); наконец, при  $\lambda < -1$  снова две особые точки: центр ( $\theta = \pm \pi, \omega = 0$ ) и седло ( $\theta = 0, \omega = 0$ ).

Для определения сепаратрис воспользуемся тем обстоятельством, что каждая сепаратрица проходит через соответствующую особую

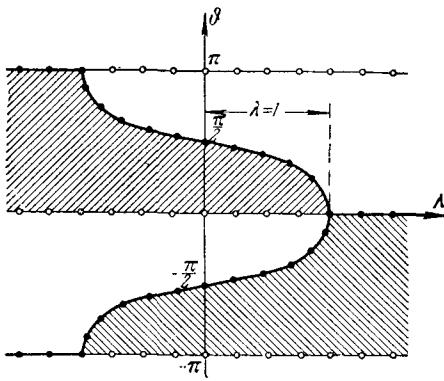


Рис. 75.

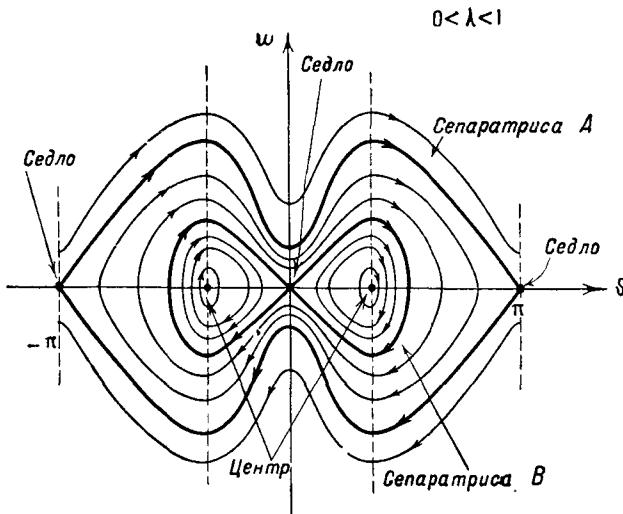


Рис. 76.

точку типа седла, в которой константа интеграла энергии  $h$  легко может быть вычислена. Уравнение одной из них, проходящей через седло

$(\theta = \pm \pi, \omega = 0)$  (эта точка является седлом при  $\lambda > -1$ ), имеет вид  $\omega^2 = \sin^2 \theta + 2\lambda (\cos \theta + 1)$ . (A)

Уравнением второй, проходящей через точку  $(0, 0)$ , которая является седлом при  $\lambda < 1$ , будет:

$$\omega^2 = \sin^2 \theta + 2\lambda (\cos \theta - 1). \quad (B)$$

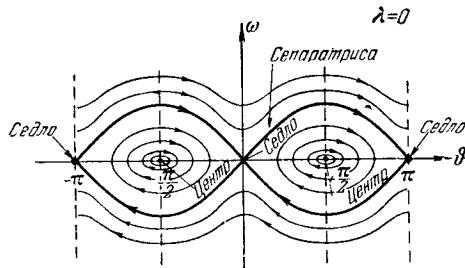


Рис. 77.

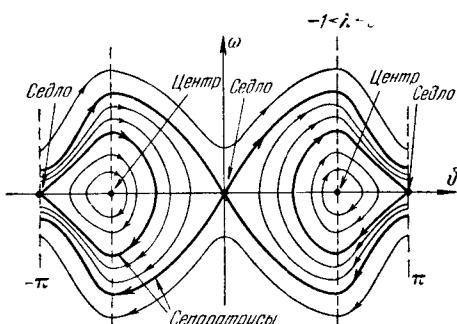


Рис. 78.

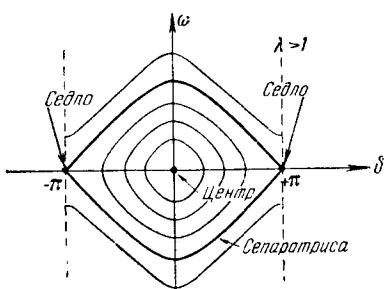


Рис. 79.

Обе эти сепаратрисы, имеющие вид «восьмерок», изображены на рис. 76 для случая  $0 < \lambda < 1$ . При  $\lambda = 0$  обе сепаратрисы сливаются, и получается картина, изображенная на рис. 77. При  $-1 < \lambda < 0$  получается та же картина, что и при  $0 < \lambda < +1$ , но сдвинутая на  $\pi$  вдоль оси  $\theta$  (рис. 78). В случае  $0 < \lambda < 1$  (рис. 76) внутри наружной сепаратрисы (сепаратрисы A) имеются три области периодических движений, две односвязные (замкнутые фазовые траектории охватывают один из центров) и одна двухсвязная (замкнутые фазовые траектории охватывают оба центра и седло  $\theta = 0, \omega = 0$  с сепаратрисой B). Фазовые траектории, расположенные вне наружной сепаратрисы, всегда замкнутые и охватывают цилиндр (это имеет место при любых  $\lambda$ ); они соответствуют, очевидно, периодическим движениям тяжелой точки с обеганием всей окружности. Так как при  $\lambda = 0$  сепаратрисы сливаются, то при этом значении  $\lambda$  двухсвязной области, о которой только что шла речь, не существует. Качественная топологическая картина интегральных кривых меняется, и следовательно,  $\lambda = 0$  является бифуркационным значением. Точно

связной области, о которой только что шла речь, не существует. Качественная топологическая картина интегральных кривых меняется, и следовательно,  $\lambda = 0$  является бифуркационным значением. Точно

так же при  $|\lambda| > 1$  получается новая картина интегральных кривых (рис. 79 и 80), следовательно, значения  $\lambda = +1$  и  $\lambda = -1$  являются также бифуркационными значениями параметра  $\lambda$ .

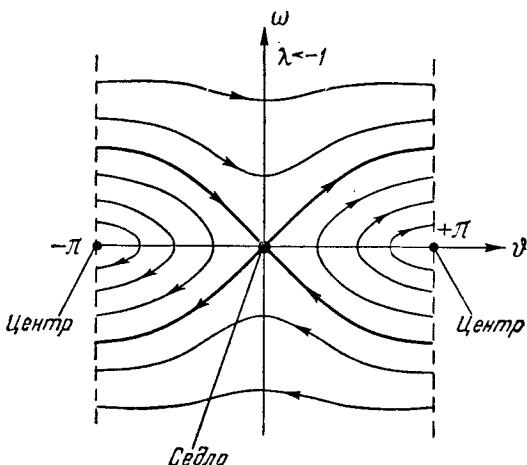


Рис. 80.

**2. Движение тяжелой точки по параболе, вращающейся вокруг вертикальной оси.** В качестве второго примера рассмотрим следующую задачу. Положим, что тяжелая точка массы  $m$  может свободно двигаться по параболе, определяемой уравнением  $x^2 = 2pz$  и вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $z$  (рис. 81). Моделью для этой задачи может служить известная демонстрационная модель — тяжелый шарик в чашке, имеющей форму параболоида вращения. Для составления уравнений движения точки мы могли бы поступить так же, как в предыдущей задаче, именно ввести силы инерции (т. е. снова центробежную силу) и написать уравнения, выражющие второй закон Ньютона для движений в плоскости  $x, z$ . Мы поступим, однако, несколько иначе, чтобы на частном примере напомнить читателям уравнения Лагранжа второго рода, которые нам понадобятся в скором времени.

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.32)$$

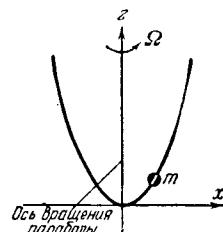


Рис. 81.

где  $L$  — лагранжева функция, которая для обычных случаев механики представляет собой разность между кинетической и потенци-

альной энергией, т. е.

$$L = T - V. \quad (2.33)$$

Потенциальная энергия системы — это энергия точки  $m$  в поле силы тяжести, т. е.

$$V = mgz. \quad (2.34)$$

Кинетическая энергия составляется из энергии вращения тела вокруг вертикальной оси и энергии движения в плоскости  $x, z$  (так как направления этих движений перпендикулярны друг к другу). Следовательно,

$$T = \frac{m\Omega^2 x^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2). \quad (2.35)$$

Заменяя  $\dot{z}$  через  $\frac{x\dot{x}}{p}$  (из уравнения параболы) и составляя лагранжеву функцию (2.33), получим:

$$L = \frac{m}{2} \left( 1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \lambda x^2, \quad (2.36)$$

где  $\lambda = \frac{g}{p} - \Omega^2$ , и уравнение Лагранжа напишется так:

$$m \left( 1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \ddot{x} + m \frac{\dot{x}^2}{p^2} x + m\lambda x = 0$$

или

$$\ddot{x} = - \frac{\left( \lambda + \frac{\dot{x}^2}{p^2} \right) x}{\left( 1 + \frac{x^2}{p^2} \right)}.$$

Полагая  $\dot{x} = y$ , имеем:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = - \frac{\left( \lambda + \frac{y^2}{p^2} \right) x}{\left( 1 + \frac{x^2}{p^2} \right)},$$

и, деля одно на другое:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\left( \lambda + \frac{y^2}{p^2} \right) x}{\left( 1 + \frac{x^2}{p^2} \right) y}.$$

Первый интеграл уравнения (2.32), так называемый интеграл энергии, имеет вид:  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \text{const.}$  (В справедливости этого легко убедиться непосредственной подстановкой.) Как видно из выражений для  $T$  и  $V$ , интеграл энергии имеет следующий вид:

$$\frac{m}{2} \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{p^2} \right) y^2 + \lambda x^2 \right] = \text{const.}$$

Уравнение  $f(x, \lambda) = 0$  для рассматриваемого случая напишется так:  $m\lambda x = 0$ ; следовательно,  $\frac{\partial f}{\partial x} = m\lambda$  и, значит,  $\lambda = 0$  есть бифуркационное

значение параметра. Для разных значений  $\lambda$  получаются следующие типы движений и состояний равновесия:

1)  $\lambda > 0$  ( $\Omega^2 < \frac{g}{p}$ ) — одно устойчивое состояние равновесия типа центра  $x = y = 0$ . Вид интегральных кривых на фазовой плоскости (вложенные одна в другую замкнутые кривые) изображен на рис. 82. В этом случае точка будет совершать колебания вокруг состояния равновесия  $x = 0, y = 0$ .

2)  $\lambda = 0$  ( $\Omega^2 = \frac{g}{p}$ ) — бесконечное множество состояний равновесия, соответствующих прямой  $y = 0$ . Вид интегральных кривых на фазовой плоскости изображен на рис. 83. Точка либо будет по-

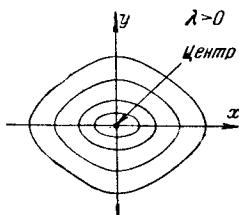


Рис. 82.

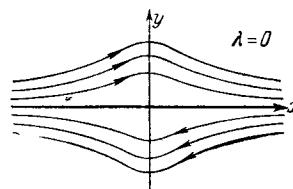


Рис. 83.

коиться в любом месте параболы, либо будет монотонно двигаться в ту сторону, в которую ей будет сообщена начальная скорость; при  $t$ , стремящемся к бесконечности, скорость стремится к нулю; скорость получается максимальная на вершине параболы.

3)  $\lambda < 0$  ( $\Omega^2 > \frac{g}{p}$ ) — одно неустойчивое состояние равновесия  $x = 0, y = 0$  типа седла; из интеграла энергии сразу видно, что прямые  $y = \pm \sqrt{-\lambda p}$  удовлетворяют уравнению движения и являются поэтому интегральными кривыми. Эти интегральные «кривые» соответствуют

таким движениям точки по врачающейся параболе, при которых проекция скорости точки на ось  $x$  остается постоянной. Общий вид интегральных кривых для этого случая изображен на рис. 84. Если начальная скорость достаточно велика (больше чем  $\sqrt{-\lambda p}$ ),

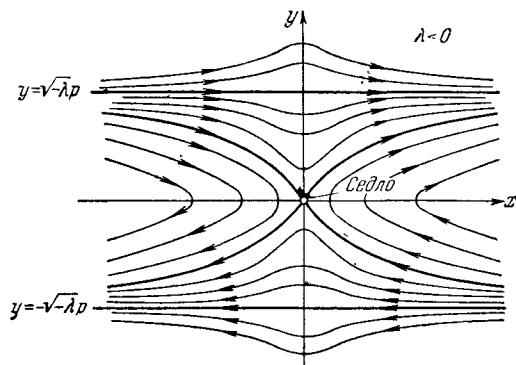


Рис. 84.

то характер движения такой же, как в случае  $\lambda = 0$ ; при меньших начальных скоростях точка либо монотонно движется в одну сторону, имея минимальное значение скорости на вершине, либо, не достигая вершины, поворачивает обратно; эти два последних типа движения разделяются двумя интегральными кривыми, проходящими через особую точку, причем по одной из них представляющая точка может двигаться к состоянию равновесия, асимптотически приближаясь к нему.

**3. Движение проводника, обтекаемого током.** Рассмотрим, на конец, последний пример: бесконечный прямолинейный проводник, по которому течет электрический ток силой  $I$ , притягивает провод  $AB$  длины  $l$  и массы  $m$ , по которому течет ток  $i$ ; провод  $AB$ , кроме того, притягивается пружиной  $C$  (рис. 85). Возьмем за начало отсчета на оси  $x$  то положение  $A_0B_0$  провода  $AB$ , при котором пружина не деформирована, и обозначим через  $a$  координату провода с током  $I$ . Будем предполагать, что проводники всегда параллельны друг другу и что ток с концов провода  $AB$  отводится подводящими проводниками, перпендикулярными к току  $I$ . Тогда силу взаимодействия проводов можно принять равной

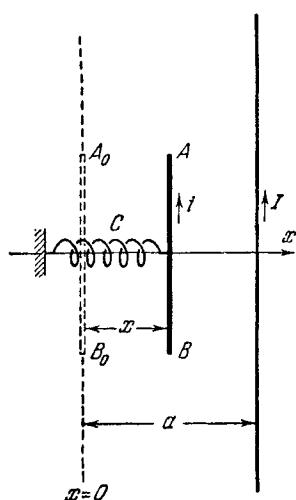


Рис. 85.

где  $d = a - x$  (здесь все величины выражены в единицах системы CGSM). Принимая силу действия пружины равной  $kx$ ,

где  $k$  — коэффициент упругости пружины, получим, что вся сила, действующая на провод  $AB$ , напишется так:

$$f(x, \lambda) = -kx + \frac{2Il}{a-x} = k\left(\frac{\lambda}{a-x} - x\right), \quad (2.37)$$

где  $\lambda = \frac{2Il}{k}$ . Уравнение, связывающее параметр  $\lambda$  и координату положения равновесия  $\bar{x}$ , имеет вид

$$f(x, \lambda) \equiv k\left(\frac{\lambda}{a-x} - x\right) = 0$$

или

$$x^2 - ax + \lambda = 0.$$

Бифуркационная диаграмма изображена на рис. 86. Уравнение  $f(x, \lambda) = 0$

имеет кратный корень при  $\lambda = \frac{a^2}{4}$ . Это значит, что при  $x = \frac{a}{2}$  и  $\lambda = \frac{a^2}{4}$  обращается в нуль не только сама функция  $f(x, \lambda)$ , но и ее производная  $f'_x(x, \lambda)$ . Следовательно,  $\lambda = \frac{a^2}{4}$  есть бифуркационное значение параметра. Уравнения движения имеют вид

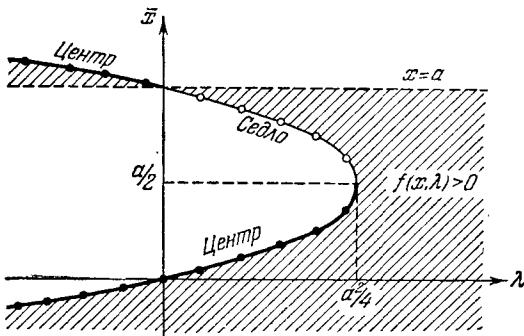


Рис. 86.

производная  $f'_x(x, \lambda)$ . Следовательно,  $\lambda = \frac{a^2}{4}$  есть бифуркационное значение параметра. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m} \left( x - \frac{\lambda}{a-x} \right) = \frac{k}{m} \left\{ \frac{x^2 - ax + \lambda}{a-x} \right\},$$

откуда получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{m} \frac{x^2 - ax + \lambda}{(a-x)y}. \quad (2.38)$$

Для рассматриваемой системы помимо особых точек существует «особая» прямая  $x = a$ , на которой сила  $f(x, \lambda)$  обращается в бесконечность<sup>1)</sup>. Интеграл энергии имеет вид

$$\frac{my^2}{2} + \frac{1}{2} kx^2 + k\lambda \ln |a-x| = C. \quad (2.39)$$

1) Прежде всего рассмотрим случай  $\lambda < \frac{a^2}{4}$  (рис. 87). Особых точек в этом случае две, причем одна из особых точек есть центр, именно та, для которой  $x = \frac{a}{2} - b$ , где  $b = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda}$ ; другая особая точка — седло; для нее  $x = \frac{a}{2} + b$ ; конечно, и для той и для другой

<sup>1)</sup> Из рассмотрения, очевидно, следует исключить как прямую  $x = a$ , так и небольшую ее окрестность, так как они соответствуют состояниям системы, в которых провод  $AB$  находится в месте, занимаемом проводником с током  $I$ , и которые, следовательно, не реализуемы в физической системе.

$y=0$ . Касательные к интегральным кривым вертикальны на оси  $y=0$  (и на прямой  $x=a$ , однако этот случай мы исключили из рассмотрения) и горизонтальны на вертикальных прямых, проходящих через обе особые точки. Особая прямая  $x=a$  есть интегральная

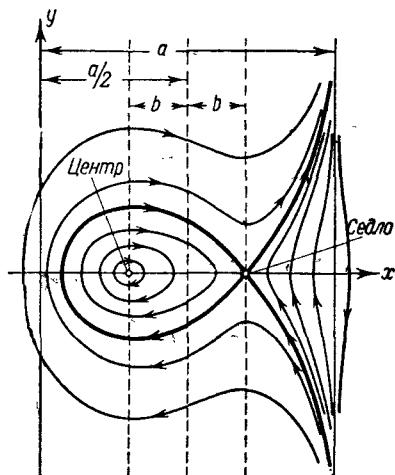


Рис. 87.

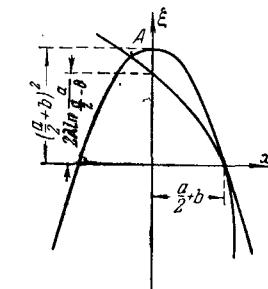


Рис. 88.

кривая и вместе с тем асимптота остальных интегральных кривых. Уравнение сепаратрисы получим, подставив в интеграл энергии  $y=0$  и  $x=\frac{a}{2}+b$  (т. е. условие, что сепаратриса проходит через седло) и определяя отсюда константу энергии  $C$ ; имеем:

$$C_0 = \frac{k}{2} \left( \frac{a}{2} + b \right)^2 + k\lambda \ln \left( \frac{a}{2} - b \right),$$

и следовательно, уравнение сепаратрисы имеет вид

$$\frac{my^2}{2} + \frac{k}{2} \left[ x^2 - \left( \frac{a}{2} - b \right)^2 \right] + k\lambda \ln \frac{a-x}{\frac{a}{2}-b} = 0.$$

Второй корень  $x$  этого уравнения при  $y=0$ ; т. е. координату точки пересечения сепаратрисы с осью  $x$ , можно найти при помощи графического построения, приведенного на рис. 88. Для этого строим две

$$\xi = \left( \frac{a}{2} + b \right)^2 - x^2 \text{ и } \xi = 2\lambda \ln \frac{a-x}{\frac{a}{2}-b}$$

или  $x = a - \left( \frac{a}{2} - b \right) e^{\frac{\xi}{2\lambda}}$ , и находим вторую точку пересечения  $A$  этих кривых, кроме точки  $x = \frac{a}{2} + b, y = 0$ . Глядя на фазовый

портрет рассматриваемой системы (рис. 87), сразу можно вывести следующие заключения: отрезок провода  $AB$  будет совершать колебания, если начальные условия таковы, что представляющая точка в начальный момент находится внутри петли сепаратрисы. В частности, при начальной скорости, равной нулю, отрезок провода  $AB$  будет колебаться, если его отклонение от положения равновесия будет не слишком велико.

2) Рассмотрим теперь второй случай,  $\lambda > \frac{a^2}{4}$ . В таком случае уравнение  $f(x, \lambda) = 0$  не имеет действительных корней, и система не имеет особых точек (стояний равновесия). Ход интегральных кривых для этого случая изображен на рис. 89. При любых начальных условиях в

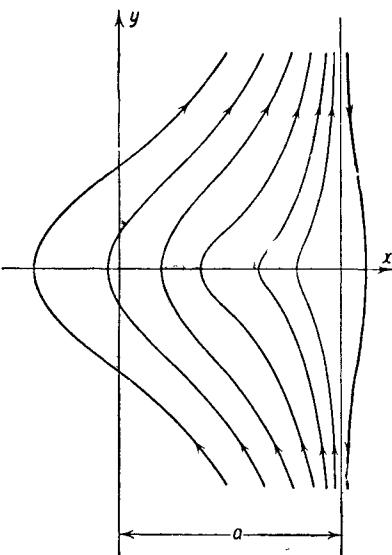


Рис. 89.

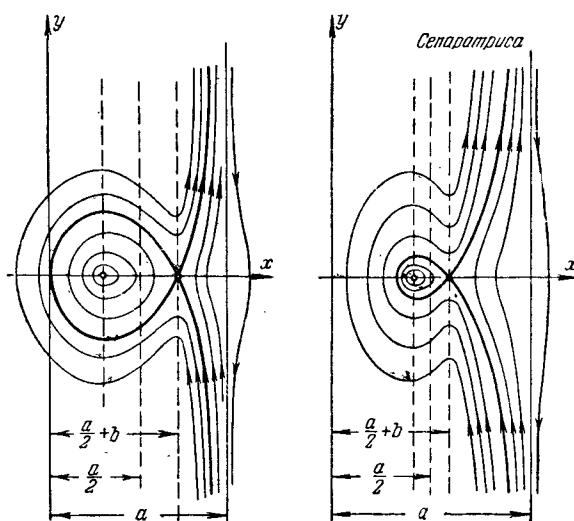


Рис. 90.

конце концов провод  $AB$  приближается с беспредельно возрастающей скоростью по направлению к прямой  $x = a$ , т. е. к бесконечному

проводу (при  $x \geq a$  задача, как мы уже указывали, не имеет смысла). Колебательные движения в этом случае, очевидно, невозможны.

3) Третий, переходный (между первым и вторым) случай соответствует значению  $\lambda = \frac{a^2}{4}$ . Легко видеть, что в первом случае при возрастании  $\lambda$  обе особые точки сближаются и при  $\lambda = \frac{a^2}{4}$  сливаются. Этот процесс сближения особых точек изображен на рис. 90. Очевидно,

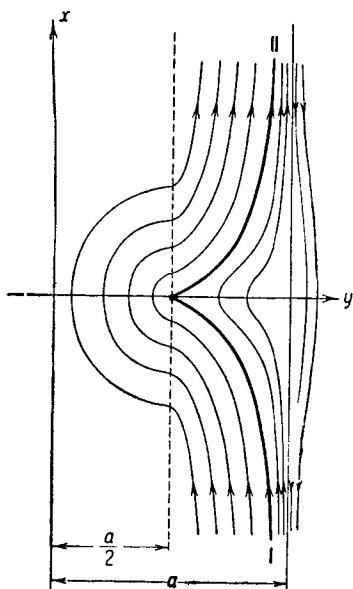


Рис. 91.

для  $\lambda = \frac{a^2}{4}$  получается только одна особая точка (рис. 91) типа, соответствующего случаю, когда потенциальная энергия системы имеет точку перегиба. Таким образом, этот тип особой точки можно рассматривать как результат слияния центра с седлом. Такая особая точка соответствует неустойчивому состоянию равновесия. В этом (третьем) случае периодические движения также невозможны. При всех начальных условиях провод движется с беспредельно возрастающей скоростью по направлению к бесконечному проводнику. Усы I и II, проходящие через особую точку, разграничают два типа движений, отличающихся друг от друга тем, что при движении первого типа (в начальный момент система находится в области, ограниченной прямой  $x=a$  и усами I и II) провод

вод  $AB$  (рис. 85) движется к прямой  $x=a$ , не проходя через положение равновесия; при втором типе движений (в начальный момент система находится вне области, ограниченной усами I и II и прямой  $x=a$ ) провод  $AB$  всегда проходит через положение равновесия.

4) Рассмотрим, наконец, последний случай,  $\lambda < 0$  (изменение знака может быть достигнуто переменой направления одного из токов  $i$  или  $I$ ). В этом случае всегда существуют два действительных корня уравнения  $f(x, \lambda) = 0$ . Из этих двух корней  $\bar{x}_{1,2} = \frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \lambda}$  один всегда отрицателен, а другой больше  $a$ . Оба состояния равновесия ( $\bar{x}_1 < 0, \bar{x}_2 > a$ ) являются центрами и устойчивы; остальные интегральные кривые замкнутые и охватывают или первое или второе состояние равновесия, причем линией, разделяющей эти два типа

замкнутых кривых, является «особая» линия  $x = a$  (рис. 92). Таким образом, в случае  $\lambda < 0$  все движения провода  $AB$  суть колебательные, периодические.

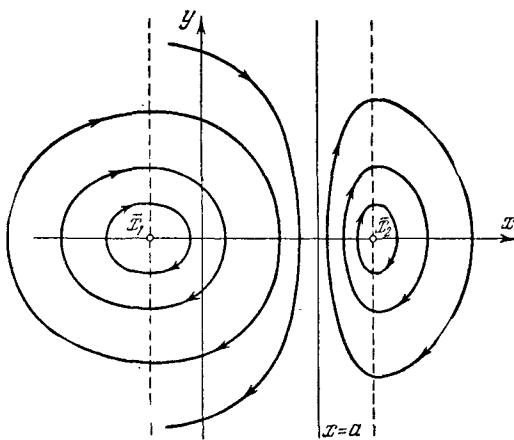


Рис. 92.

Приведенные примеры в достаточной степени поясняют вопрос о зависимости характера движений в консервативной системе от параметра, и теперь мы можем перейти к дальнейшим вопросам, возникающим при рассмотрении консервативных систем.

## § 6. Уравнения движения

До сих пор мы рассматривали только простейшие консервативные системы. Теперь мы перейдем к более сложным.

Для составления уравнений движения более сложных консервативных систем удобно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Обозначая через  $L(q, \dot{q})$  некоторую функцию (пусть это будет однозначная функция координаты  $q$  и скорости  $\dot{q}$ ), которую назовем лагранжевой функцией, мы получим уравнение Лагранжа в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (2.40)$$

Уравнение это инвариантно по отношению к любому преобразованию координаты  $q$ ; другими словами, это значит, что, полагая  $q = f(\phi)$ , мы снова получим уравнения типа (2.40), т. е.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

Эта инвариантность уравнений Лагранжа представляет большое преимущество, так как она дает возможность сразу написать уравнения