замкнутых кривых, является «особая» линия $x=a$ (рис. 92). Таким образом, в случае $\lambda<0$ все движения провода AB суть колебательные, периодические.

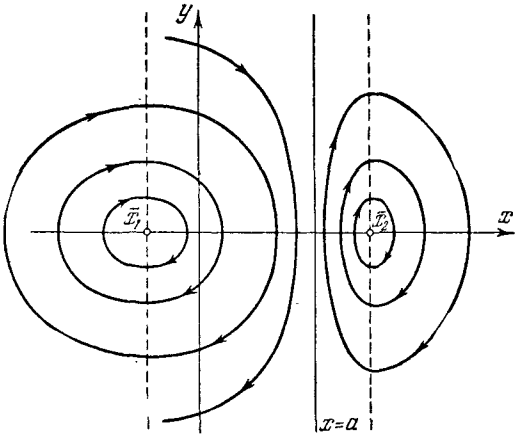

Рис. 92.

Приведенные примеры в достаточной степени поясняют вопрос о зависимости характера движений в консервативной системе от параметра, и теперь мы можем перейти к дальнейшим вопросам, возникающим при рассмотрении консервативных систем.

§ 6. Уравнения движения

До сих пор мы рассматривали только простейшие консервативные системы. Теперь мы перейдем к более сложным.

Для составления уравнений движения более сложных консервативных систем удобно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Обозначая через $L(q, \dot{q})$ некоторую функцию (пусть это будет однозначная функция координаты q и скорости $\dot{q}$), которую назовем лагранжевой функцией, мы получим уравнение Лагранжа в таком виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0. \tag{2.40}$$

Уравнение это инвариантно по отношению к любому преобразованию координаты q; другими словами, это значит, что, полагая $q=f(\varphi)$, мы снова получим уравнения типа (2.40), т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0.$$

Эта инвариантность уравнений Лагранжа представляет большое преимущество, так как она дает возможность сразу написать уравнения

движения для любых выбранных координат, если известна лагранжева функция системы. Для обычных консервативных механических систем (при условии, что система отсчета инерциальна) лагранжева функция представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий; точно так же в простейших электрических системах лагранжева функция представляет собой разность магнитной и электрической энергий, если в качестве обобщенных координат выбраны интегралы от независимых контурных токов $q=\int i\,dt$ (в контурах, содержащих конденсаторы, q, очевидно, являются зарядами на этих конденсаторах). Особенно удобно пользоваться уравнениями Лагранжа для составления уравнений движения электромеханических систем [1]).

Однако следует заметить, что не всегда лагранжева функция может быть представлена как разность двух энергий; в таких случаях не всегда оказывается возможным указать наперед «физический» рецепт составления функции Лагранжа, а можно лишь чисто аналитически, путем специального подбора функции L, привести уравнения движения к требуемой форме. Известно, что для уравнения Лагранжа в случае автономной консервативной системы можно написать так называемый «интеграл энергии», который выражается так:

$$\dot{q}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L=h. \tag{2.41}$$

Простым дифференцированием нетрудно убедиться, что производная по времени левой части этого равенства обращается в нуль в силу уравнения Лагранжа. Однако выражение (2.41) не всегда означает энергию системы в физическом смысле этого слова. Вводя наряду с координатой q вторую переменную $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, так называемый импульс, и составив функцию

$$H=p\dot{q}-L=H(p,\ q), \tag{2.42}$$

так называемую функцию Гамильтона, мы можем уравнение движения (2.40) привести к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p};\ \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{2.43}$$

которые носят название *уравнений Гамильтона*. Гамильтонова форма уравнений движения представляет существенные преимущества при рассмотрении ряда вопросов математики, астрономии и физики. Ряд методов интегрирования уравнений движения связан именно с этой формой.

---

[1]) Уравнения движения электрических и электромеханических систем, записанные в виде уравнений Лагранжа второго рода, часто называют уравнениями Лагранжа — Максвелла.

Уравнения Гамильтона инвариантны не только по отношению к преобразованиям переменных, о которых уже была речь, но и по отношению к так называемым *каноническим* преобразованиям, которые играют важную роль при изучении консервативных систем со многими степенями свободы.

Заметим, что «интеграл энергии» для уравнений Гамильтона может быть написан сразу:

$$H(p,\ q) = h = \text{const}. \tag{2.44}$$

Перейдем теперь к рассмотрению двух примеров, которые поясняют применение уравнений Лагранжа и Гамильтона.

1. Колебательный контур с железом. В качестве первого примера нелинейной консервативной системы мы рассмотрим электрический колебательный контур, в который входит катушка самоиндукции, содержащая железный сердечник [197] (рис. 93). Для того чтобы можно было рассматривать систему как консервативную, мы должны пренебречь сопротивлением контура и потерями на гистерезис. Если пренебречь рассеянием в катушке, т. е. считать, что весь магнитный поток Φ проходит сквозь все w витков катушки самоиндукции, то на основании закона Кирхгофа мы получим для силы тока i в контуре следующее уравнение:

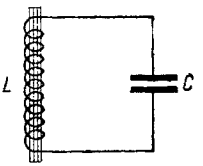

Рис. 93.

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + w\frac{d\Phi}{dt} = 0, \tag{2.45}$$

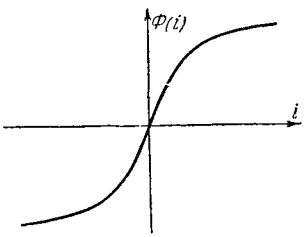

Рис. 94.

причем Φ есть некоторая функция от i, нелинейная вследствие наличия железного сердечника в катушке. Примерный вид функции $\Phi(i)$ для железного сердечника приведен на рис. 94.

Уравнение (2.45) легко может быть приведено к форме Лагранжа. Для этого заменим i через $\dot{q}$, где q — заряд на обкладках конденсатора, и введем обозначение

$$L = L(q,\ \dot{q}) = w\int \Phi(\dot{q})\,d\dot{q} - \frac{q^2}{2C}. \tag{2.46}$$

В таком случае

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = w\ \Phi(\dot{q}) \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C},$$

и уравнение (2.45) принимает форму Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Как мы уже указывали, для уравнения Лагранжа можно написать «интеграл энергии»:

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h.$$

В рассматриваемом случае этот интеграл энергии имеет вид

$$h = w\Phi(\dot{q})\,\dot{q} - w\int \Phi(\dot{q})\,d\dot{q} + \frac{q^2}{2C} = \text{const}. \tag{2.47}$$

Здесь h действительно выражает полную энергию системы. В самом деле, электростатическая энергия в конденсаторе есть $V = \frac{q^2}{2C}$, магнитная же энергия в катушке самоиндукции определится как работа против э.д.с. самоиндукции, т. е. выразится так:

$$T = w\int \frac{d\Phi(i)}{dt}\,\dot{q}\,dt = w\int \dot{q}\,d\Phi(\dot{q}) \tag{2.48}$$

или в результате интегрирования по частям:

$$T = w\Phi(\dot{q})\,\dot{q} - w\int \Phi(\dot{q})\,d\dot{q}. \tag{2.49}$$

Следовательно, $H = T + V$. Но зато в этом случае $L \neq T - V$, и мы имеем пример того, что лагранжева функция не всегда равняется разности между кинетической и потенциальной энергиями.

Введя новую переменную $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = w\Phi(\dot{q})$, можем привести наше уравнение к типу Гамильтона. Функция Гамильтона напишется так:

$$H(p, q) = \int \Psi(p)\,dp + \frac{q^2}{2C}, \tag{2.50}$$

где $\Psi(p)$ есть функция, получающаяся разрешением относительно $\dot{q}$ выражения $p = w\Phi(\dot{q})$. Характер функции $\Phi(\dot{q})$, как видно из кривой рис. 94, таков, что преобразования $p = \Phi(\dot{q})$ взаимно непрерывны и взаимно однозначны. Уравнения Гамильтона напишутся так:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{q}{C}; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \Psi(p).$$

Характер поведения интегральных кривых на фазовой плоскости определится из интеграла энергии, который на основании (2.47)—(2.49) может быть записан в виде

$$w\int \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}\,\dot{q}\,d\dot{q} + \frac{q^2}{2C} = \text{const}. \tag{2.51}$$

Это выражение аналогично тем, которые мы получали при рассмотрении примеров консервативных систем в § 5, с той лишь разницей,

что q и $\dot{q}$ как бы поменялись местами. Мы можем поэтому относительно характера интегральных кривых высказать те же утверждения, какие были высказаны для простейших консервативных систем. Подынтегральное выражение всегда больше нуля, и потому $\int \frac{\partial \Phi(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q}\, d\dot{q}$ есть положительная функция, производная которой обращается в нуль только в точке $\dot{q}=0$. Следовательно, $\dot{q}=0$ соответствует минимуму энергии, и особая точка $q=0$, $\dot{q}=0$ есть центр; она соответствует устойчивому положению равновесия. Все интегральные кривые суть замкнутые кривые, вложенные одна в другую и охватывающие особую точку. Более точно мы сможем определить характер интегральных кривых, задавшись определенным аналитическим выражением функции $\Phi(i)$. Эта функция при отсутствии подмагничивания достаточно хорошо аппроксимируется выражением

$$\Phi(i)=A \operatorname{arctg} \frac{wi}{S}+B \frac{wi}{S}, \tag{2.52}$$

где A, B и S — положительные константы. Взяв это выражение, мы получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}=\frac{Aw}{S} \frac{1}{1+\frac{w^2 \dot{q}^2}{S^2}}+B \frac{w}{S}$$

и далее:

$$w \int \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q}\, d\dot{q}=\frac{Aw^2}{S} \int \frac{\dot{q}\, d\dot{q}}{1+\frac{w^2 \dot{q}^2}{S^2}}+B \frac{w^2}{S} \int \dot{q}\, d\dot{q}.$$

Первый интеграл вычисляется при помощи подстановки $\dot{q}^2=z$. Окончательно получим:

$$\frac{AS}{2} \ln \left(\frac{\dot{q}^2}{2}+\frac{S^2}{2w^2}\right)+\frac{Bw^2}{2S} \dot{q}^2+\frac{q^2}{2C}=\text{const}. \tag{2.53}$$

Это уравнение определяет семейство кривых типа эллипса. На рис. 95 изображено семейство этих кривых, построенное для некоторого частного значения параметров.

2. Колебательный контур с сегнетовой солью в конденсаторе. В качестве второго примера нелинейной консервативной системы мы рассмотрим колебательный контур с конденсатором, в котором диэлектриком является сегнетова соль (рис. 96), обладающая электрическими свойствами, аналогичными магнитным свойствам железа. Для сегнетовой соли характерна нелинейная зависимость между электрической индукцией D и напряженностью поля E

(рис. 97), вследствие чего емкость конденсатора с сегнетодиэлектриком оказывается зависящей от заряда или от напряжения. Мы назо-

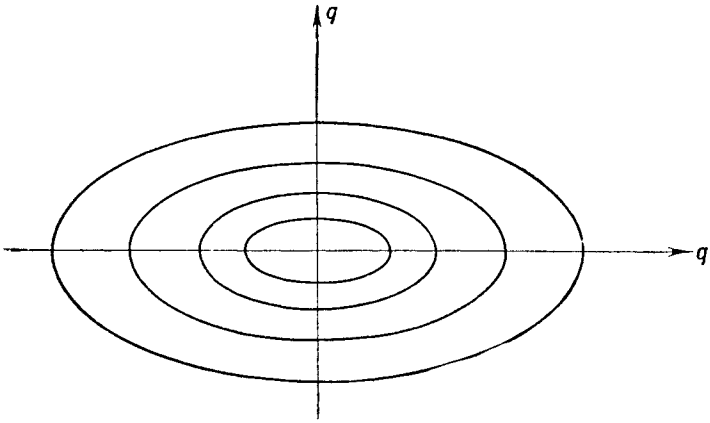

Рис. 95.

вем емкостью $C(q)$ такого конденсатора отношение заряда на обкладках конденсатора к разности потенциалов, вызванной этим зарядом. Зависимость таким образом определенной емкости конденсатора $C(q)$ от величины заряда на его обкладках примерно изображена на рис. 98.

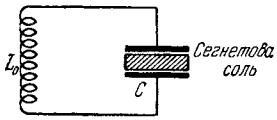

Рис. 96.

Пренебрегая омическим сопротивлением и потерями на гистерезис, мы получим, вследствие того, что C есть функция q, нелинейную консервативную систему. Для рассматриваемого контура мы можем по закону Кирхгофа написать [1]):

$$L_0 \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C(q)} = 0. \tag{2.54}$$

---

[1]) Заметим, что емкость можно было бы определить и иначе, например как $C_1(q) = \frac{dq}{du}$, где u — разность потенциалов. В этом случае дифференциальное уравнение контура, содержащего конденсатор с сегнетодиэлектриком, приняло бы другой вид:

$$L_0\ddot{q} + \int \frac{dq}{C_1 q} = 0. \tag{2.54a}$$

Безразлично, каким из уравнений, (2.54) или (2.54а), пользоваться, так как оба они дают одну и ту же зависимость $\ddot{q}$ от $\dot{q}$. По-видимому, для неавтономной системы второе определение $C_1 = \frac{dq}{du}$ является более целесообразным.

Это уравнение также легко может быть приведено к виду Лагранжа. Введем функцию состояния системы

$$L = L(q, \dot{q}) = \frac{L_0 \dot{q}^2}{2} - \int \frac{q\,dq}{C(q)}. \tag{2.55}$$

В таком случае

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_0 \dot{q}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C}$$

и уравнение (2.55) может быть записано в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Интеграл энергии напишется так:

$$\frac{L_0 \dot{q}^2}{2} + \int \frac{q}{C(q)}\,dq = h = \text{const}. \tag{2.56}$$

Легко видеть, что и в этом случае h есть полная энергия системы,

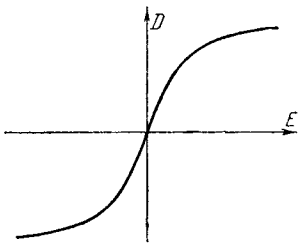

Рис. 97.

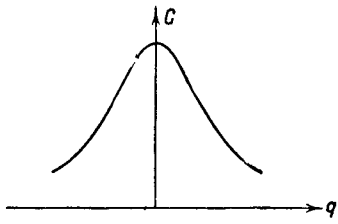

Рис. 98.

так как энергия заряда конденсатора равна работе тока, заряжающего конденсатор:

$$V = \int \frac{q}{C(q)}\,\dot{q}\,dt = \int \frac{q\,dq}{C(q)}. \tag{2.57}$$

Но, кроме того, в этом случае, в отличие от предыдущего, лагранжева функция $L = T - V$, т. е. равняется разности между магнитной и электростатической энергиями системы. Уравнение (2.55) подстановкой $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_0 \dot{q}$ легко может быть приведено к форме Гамильтона подобно тому, как это было сделано в предыдущем примере.

Уравнение (2.56) есть уравнение семейства интегральных кривых на фазовой плоскости q, $\dot{q}$. Так как функция $\int \frac{q}{C(q)}\,dq$ имеет минимум при $q = 0$, то $q = 0$, $\dot{q} = 0$ есть особая точка типа центра, соответствующая устойчивому состоянию равновесия.

Для того чтобы точнее определить вид интегральных кривых, мы должны так или иначе прецизировать вид функции $C(q)$. В общем случае, если помимо переменного напряжения на обкладках конденсатора существует некоторое постоянное напряжение (по аналогии с подмагничиванием мы будем это постоянное напряжение называть «подэлектризацией»), то емкость конденсатора будет уже изменяться не одинаково в обе стороны от точки $q=0$. Учитывая это обстоя-

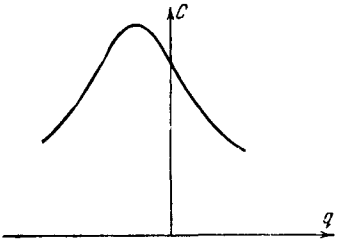

Рис. 99.

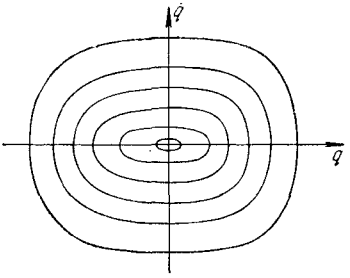

Рис. 100.

тельство, мы можем зависимость между C и q в некоторой ограниченной области значений q аппроксимировать при помощи следующего выражения:

$$C(q)=\frac{C_0}{1+C_1q+C_2q^2}$$

(график этой функции $C(q)$ приведен на рис. 99). Подставляя выражение для $C(q)$ в выражение (2.56), получим:

$$\frac{L_0\dot{q}^2}{2}+\frac{q^2}{2C_0}+\frac{C_1q^3}{2C_0}+\frac{C_2q^4}{2C_0}=\text{const}. \qquad (2.58)$$

Это уравнение определяет семейство замкнутых кривых, вложенных одна в другую (рис. 100). Несимметричность этих кривых относительно оси $\dot{q}$ обусловлена наличием члена $\frac{C_1q^3}{2C_0}$ в уравнении семейства. Но этот член появился в результате подэлектризации. При отсутствии подэлектризации $C(q)=C(-q)$ и несимметричность интегральных кривых исчезает. Мы получим семейство кривых типа эллипсов, причем только те из этих кривых будут заметно отличаться от эллипсов, для которых при больших q член q^4 играет заметную роль.

§ 7. Общие свойства консервативных систем

С точки зрения теории колебаний нас в консервативных системах с одной степенью свободы интересуют в первую очередь стационарные состояния — именно состояния равновесия и периодические движения. Все остальные движения, как мы убедились при рассмотрении про-