Для того чтобы точнее определить вид интегральных кривых, мы должны так или иначе прецизировать вид функции $C(q)$. В общем случае, если помимо переменного напряжения на обкладках конденсатора существует некоторое постоянное напряжение (по аналогии с подмагничиванием мы будем это постоянное напряжение называть «подэлектризацией»), то емкость конденсатора будет уже изменяться не одинаково в обе стороны от точки $q=0$. Учитывая это обстоя-

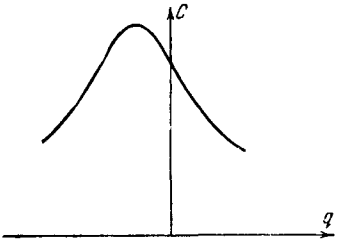

Рис. 99.

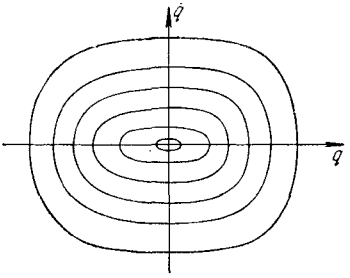

Рис. 100.

тельство, мы можем зависимость между C и q в некоторой ограниченной области значений q аппроксимировать при помощи следующего выражения:

$$C(q)=\frac{C_0}{1+C_1q+C_2q^2}$$

(график этой функции $C(q)$ приведен на рис. 99). Подставляя выражение для $C(q)$ в выражение (2.56), получим:

$$\frac{L_0\dot{q}^2}{2}+\frac{q^2}{2C_0}+\frac{C_1q^3}{2C_0}+\frac{C_2q^4}{2C_0}=\text{const}. \qquad (2.58)$$

Это уравнение определяет семейство замкнутых кривых, вложенных одна в другую (рис. 100). Несимметричность этих кривых относительно оси $\dot{q}$ обусловлена наличием члена $\frac{C_1q^3}{2C_0}$ в уравнении семейства. Но этот член появился в результате подэлектризации. При отсутствии подэлектризации $C(q)=C(-q)$ и несимметричность интегральных кривых исчезает. Мы получим семейство кривых типа эллипсов, причем только те из этих кривых будут заметно отличаться от эллипсов, для которых при больших q член q^4 играет заметную роль.

§ 7. Общие свойства консервативных систем

С точки зрения теории колебаний нас в консервативных системах с одной степенью свободы интересуют в первую очередь стационарные состояния — именно состояния равновесия и периодические движения. Все остальные движения, как мы убедились при рассмотрении про-

стейших консервативных систем, либо уходят в бесконечность, либо стремятся к состояниям равновесия типа седла (лимитационные движения). Мы уже рассмотрели подробно состояния равновесия в простейших консервативных системах. Теперь мы должны выяснить подробнее характер периодических движений, возможных в простейших консервативных системах.

1. Периодические движения и их устойчивость. Прежде всего периодические движения в консервативных системах отличаются той особенностью, что они никогда не встречаются изолированно. Если для $h = h_0$ на фазовой плоскости мы имели замкнутую траекторию, т. е. периодическое движение, то, как мы видели, эта замкнутая траектория непременно окружена соседними замкнутыми траекториями, получающимися при близких h. Периодические траектории встречаются континуумами и заполняют целые области фазовой плоскости, причем одна замкнутая траектория охватывает другую. Физически это значит, что если возможно одно периодическое движение, то возможно бесконечное множество их, причем максимальные размахи и максимальные значения скоростей могут в зависимости от начальных условий непрерывно изменяться в известных конечных или бесконечных пределах.

Помимо самого факта существования периодических движений нас всегда должен интересовать вопрос, устойчивы ли эти движения. Поэтому при рассмотрении периодических движений мы должны строго сформулировать понятие устойчивости движения, подобно тому как мы сформулировали понятие об устойчивости положений равновесия. Мы примем определение устойчивости движения, данное Ляпуновым и вполне соответствующее обычному определению устойчивости состояний равновесия, приведенному в гл. I, § 3.

Периодическому движению соответствует движение представляющей точки по определенной замкнутой фазовой траектории. Окружим эту точку некоторой малой областью ε, которая движется вместе с представляющей точкой. *Если при заданной сколь угодно малой области ε мы можем указать такую область $\delta(\varepsilon)$, что всякая представляющая точка, лежащая в начальный момент в этой области $\delta(\varepsilon)$, никогда не выйдет за пределы области ε, то рассматриваемое движение устойчиво по Ляпунову.* Более наглядно мы можем сформулировать это условие устойчивости следующим образом. Пусть движение подверглось некоторому возмущению — система испытала некоторый мгновенный толчок в произвольном направлении. Тогда представляющая точка сместится и будет продолжать движение уже по некоторой другой траектории. Представим себе, что при этом толчке представляющая точка «почернела» (рис. 101). Тогда исходное невозмущенное движение, устойчивость которого мы исследуем, т. е. движение, которое происходило бы, если бы не было толчка, будет изображаться движением светлой представляющей точки, а движение после толчка — возмущенное, изображается движением черной представляющей точки.

Теперь условие устойчивости движения можно сформулировать следующим образом. Если черная точка, находящаяся в начальный момент (сразу после толчка) достаточно близко к светлой (т. е. если возмущение достаточно мало), всегда остается к ней достаточно близкой, то движение, изображаемое светлой точкой, устойчиво по Ляпунову [1]).

Нетрудно видеть, что, вообще говоря, движение в консервативной системе неустойчиво по Ляпунову, ибо в общем случае период обращения представляющей точки по различным интегральным кривым различный. Вследствие этого светлая и черная точки, несмотря на малое начальное расстояние, будут все больше и больше расходиться,

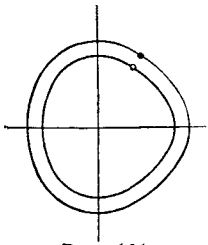

Рис. 101.

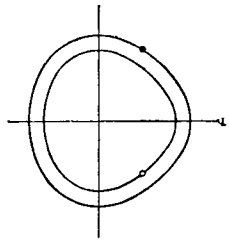

Рис. 102.

и после некоторого числа периодов получится картина, изображенная на рис. 102. Правда, потом они снова начнут сходиться, но все же при сколь угодно малом (но отличном от нуля) начальном расстоянии расстояние между ними не всегда будет меньше заданного. Расстояние между светлой и черной точками не будет возрастать по сравнению с начальным в том специальном случае, когда черная и светлая точки движутся по одной траектории, т. е. когда возмущение таково, что представляющая точка при толчке перескакивает по самой траектории (заметим кстати, что этот специальный тип возмущения может быть осуществлен только при вполне определенном соотношении между изменением координаты и изменением скорости). Но этот случай отнюдь не противоречит нашему утверждению о неустойчивости движения, ибо речь шла об области $\delta(\varepsilon)$, между тем участок траектории не представляет собой такой области.

Периодические движения в консервативной системе будут устойчивы по Ляпунову только в специальном случае, когда имеет место изохронизм, т. е. когда период обращения один и тот же для различных траекторий. Но и в этом случае мы не будем иметь абсолютно устойчивых замкнутых траекторий, т. е. таких траекторий, к которым представляющая точка после достаточно малого возмущения будет снова асимптотически приближаться. Этот тип траекторий в консервативных системах с одной степенью свободы вообще невозможен.

---

[1]) См. также определение устойчивости периодического движения по Ляпунову в гл. V, §§ 6, 7, где изложены аналитические методы исследования устойчивости, правда, пригодные лишь для неконсервативных систем.

С ним мы столкнемся только при рассмотрении неконсервативных систем. Хотя, как мы только что видели, периодические движения в консервативных системах, вообще говоря, неустойчивы по Ляпунову, однако они все же обладают некоторым видом устойчивости. Именно — достаточно близкая траектория всегда лежит целиком в непосредственном соседстве с рассматриваемой. Такой вид устойчивости носит название *орбитной* устойчивости; эта устойчивость играет существенную роль в общей теории поведения интегральных кривых.

2. Однозначный аналитический интеграл и консервативность. До сих пор мы рассматривали такие консервативные системы, для которых справедливы уравнения Гамильтона. Между тем с точки зрения характера фазовой плоскости, или в более общем случае фазовой поверхности, а следовательно, и характера возможных движений в системе было бы естественно к числу консервативных отнести также и некоторые системы, для которых уравнения Гамильтона несправедливы. Мы дадим поэтому более общее определение консервативных систем и установим некоторые свойства консервативных систем, которые из этого определения вытекают.

Каждой динамической системе соответствует топологически вполне однозначно некоторая фазовая поверхность с расположенной на ней сеткой фазовых траекторий, так что каждой точке фазовой поверхности соответствует вполне определенное состояние системы и обратно; соответствие это взаимно непрерывно и взаимно однозначно. *Необходимым признаком консервативности системы* мы будем считать *существование однозначного интеграла* вида

$$F(u, v) = C, \tag{2.59}$$

где u, v — координаты, определяющие положение точки на фазовой плоскости. Во избежание излишних рассуждений мы предположим, что функция $F(u, v)$ — *однозначная аналитическая функция*; по существу задачи она не может тождественно равняться постоянной величине. Рассматривая C как третью координату, откладываемую по нормали к фазовой поверхности, мы можем интерпретировать уравнение (2.59) как уравнение некоторой новой поверхности, построенной над фазовой поверхностью. Построенная таким образом поверхность обладает тем свойством, что линии равного уровня (уровень отсчитывается по оси C) суть интегральные кривые. В том случае, когда фазовая поверхность представляет собой плоскость, линии равного уровня, т. е. интегральные кривые, представляют собой пересечение поверхности $F(u, v) = C$ с плоскостью, параллельной фазовой плоскости и определяемой уравнением $C = C_0$, где C — координата, а C_0 — константа (рис. 103).

Зная одну такую поверхность, можно построить их бесчисленное множество. Действительно, нас интересуют исключительно сами линии равного уровня, их относительная высота нас совершенно не интересует. Следовательно, мы можем по какому угодно закону изменять

«масштаб» оси C, произвольным образом сжимая или растягивая его на отдельных участках. Мы будем получать все новые и новые поверхности, причем все они будут обладать тем свойством, что линии равного уровня суть интегральные кривые. На аналитическом языке

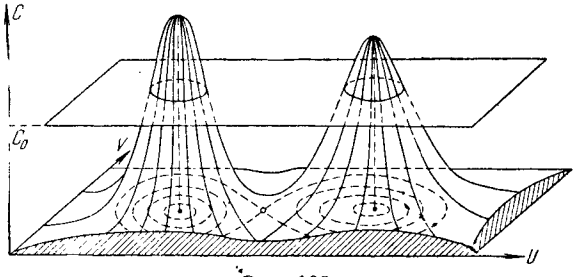

Рис. 103.

это означает тот очевидный факт, что если $F(u, v) = C$ есть интеграл некоторого уравнения, то и $\Phi[F(u, v)] = C$ также будет интегралом этого уравнения.

Особые точки кривых равного уровня соответствуют особым точкам системы интегральных кривых: так, изолированные точки кривых равного уровня соответствуют центру; узловые точки — седлу; точки заострения — особым точкам, получаемым от слияния центра и седла. Дифференциальное уравнение интегральных кривых, как это следует из уравнения (2.59), имеет вид

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}. \tag{2.60}$$

Особые точки соответствуют тем значениям u, v, для которых одновременно $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$ обращаются в нуль. Может случиться, что $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$ обращаются одновременно в нули не только в изолированных точках, но и вдоль некоторой аналитической кривой. Покажем, что такая кривая непременно является интегральной, т. е. что точки этой кривой удовлетворяют уравнению $F(u, v) = \text{const}$. Предположим, что кривая, о которой идет речь, дана в параметрической форме:

$$u = u(s), \quad v = v(s).$$

Тогда

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

или, так как $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$, то

$$\frac{dF}{ds} = 0,$$

откуда

$$F = \text{const},$$

т. е. $F(u, v)$ вдоль кривой сохраняет постоянное значение. Нетрудно видеть, что такой случай имеет место, если соответствующая кривая равного наклона состоит из точек, в которых касательная плоскость параллельна фазовой поверхности, как, например, когда поверхность $F(u, v) = C$ имеет вид кратера, края которого лежат на одном уровне (рис. 104). Ни одна из особых точек не может быть такого

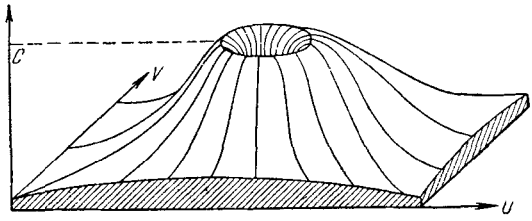

Рис. 104.

типа, чтобы через нее проходило бесконечное множество интегральных кривых, сплошь заполняющих некоторую часть плоскости, ибо в этом случае все кривые должны были бы быть одного уровня; в силу аналитичности $F(u, v)$ в этом случае вообще была бы постоянной, что противоречит поставленному условию. Отсюда мы можем заключить, что особые точки в консервативной системе не могут быть ни узлами, ни фокусами. Совершенно аналогичными рассуждениями можно показать, что в консервативной системе не может быть замкнутой интегральной кривой, на которую бы другие интегральные кривые навивались. Далее можно утверждать, что если существует одна замкнутая траектория, то их обязательно существует целый континуум, сплошь заполняющий часть плоскости; это следует непосредственно из того, что фазовые траектории представляют собой линии уровня непрерывной поверхности $F(u, v) = C$. Поэтому не может существовать одна изолированная замкнутая траектория, ибо если одна линия уровня на непрерывной поверхности замкнута, то и все близкие линии уровня также должны быть замкнуты.

Перейдем теперь к исследованию движения во времени по этим траекториям. Поскольку уравнение (2.60) представляет собой результат исключения времени из уравнений движения, то, для того чтобы вернуться к уравнениям движения в их общем виде, мы должны принять во внимание, что вместе с исключением времени могла исчезнуть некоторая функция $S(u, v) = \frac{1}{Q(u, v)}$, входящая множителем

в оба уравнения. Следовательно, уравнения движения в общем виде могут быть написаны таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial v}\frac{1}{Q(u, v)} = U(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial u}\frac{1}{Q(u, v)} = V(u, v). \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

Эти более общие уравнения консервативной системы носят название уравнений Пфаффа. Относительно $S(u, v)$ мы предположим, что это — однозначная аналитическая функция на всей плоскости u, v, не обращающаяся в нуль ни для каких конечных значений u, v.

Можно было бы сделать более общие предположения о функции $S(u, v) = \frac{1}{Q(u, v)}$, например допустить, что эта функция может обращаться в нуль или терять голоморфность вдоль изолированных кривых. Соответствующие уравнения довольно часто встречаются на практике как идеальные модели реальных систем, и эти модели в ряде случаев (например, в некоторых случаях, когда вышеупомянутые изолированные кривые совпадают с фазовыми траекториями) несомненно заслуживают отнесения к классу консервативных систем. Однако мы не будем проводить здесь исследование и классификацию таких «патологических» случаев, а ограничимся лишь несколькими замечаниями, касающимися терминологии, и рассмотрением примера (пункт 6 настоящего параграфа).

Легко видеть, что в частном случае

$$Q(u, v) = 1$$

мы получаем уравнения типа Гамильтона:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}.$$

Здесь согласно общепринятым обозначениям F обозначено через H. Уравнения Гамильтона, как мы видели, имеют однозначный интеграл $H = \text{const}$, обычно представляющий интеграл энергии (однако, как уже указывалось, это бывает не всегда).

Уравнения (2.61) эквивалентны уравнению

$$V(u, v)\,du - U(u, v)\,dv = 0,$$

которое, как известно, всегда допускает интегрирующий множитель. Поэтому формально всякую динамическую систему, описываемую двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, можно привести к виду (2.61). Однако не все системы, описываемые этими уравнениями, консервативны. Причина этого лежит в том, что в случае, когда консервативная система описывается уравнениями типа (2.61), на функции F и Q налагаются определенные условия (однозначность, аналитичность и т. д.). Когда в классической механике рассматривают

гамильтоновы уравнения, то там H есть энергия, и поэтому эти условия обычно автоматически удовлетворяются.

Заметим, что если динамическая система задана дифференциальными уравнениями общего вида

$$\frac{du}{dt}=U; \quad \frac{dv}{dt}=V,$$

то не существует общих методов, которые позволили бы установить, консервативна ли описываемая этими уравнениями система или нет. Часто неконсервативность системы можно установить сразу, например доказав существование абсолютно устойчивых или неустойчивых состояний равновесия. Вообще же установить консервативный характер интегральных кривых можно, только найдя каким-нибудь способом однозначный интеграл системы.

3. Консервативные системы и вариационный принцип. Характерной чертой консервативных уравнений является их вариационное происхождение.

Как известно, уравнения Гамильтона могут быть получены с помощью вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta \int_0^{t_1} L\,dt=\delta \int_0^{t_1} (p\dot{q}-H)\,dt=0. \tag{2.62}$$

Именно пользуясь тем, что δq обращается в нуль для $t=0$ и $t=t_1$, выражение (2.62) можно преобразовать к виду

$$\int_0^{t_1} \left\{\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p+\left(\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q\right\} dt=0,$$

откуда в силу так называемой «основной леммы» вариационного исчисления получаем уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Рассмотрим теперь более общий вариационный принцип, а именно предположим, что подынтегральная функция в варьируемом интеграле есть линейная комбинация более общего вида:

$$\delta \int_0^{t_1} \{X\dot{x}+Y\dot{y}+F\}\,dt=0,$$

где X, Y и F — однозначные аналитические функции только x и y.

В этом более общем случае вариационные уравнения или, иначе, уравнения движения получают вид

$$Q(x, y)\frac{dy}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x} \text{ и } Q(x, y)\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial y},$$

где $Q(x, y)=X'_y-Y'_x$.

Это — уже известные нам уравнения Пфаффа, являющиеся наиболее общей формой уравнений, описывающих консервативные системы.

4. Интегральный инвариант. Введем теперь понятие об интегральном инварианте. Рассмотрим сначала соответствующую задачу в общем виде, не связывая ее с консервативностью, чтобы затем использовать полученные результаты для консервативных систем.

Пусть некоторая динамическая система определяется уравнениями общего вида

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \tag{2.63}$$

Будем интерпретировать изображающие точки на фазовой плоскости как частицы некоторой двумерной «жидкости», а фазовые траектории — как линии тока стационарного течения этой «жидкости» по фазовой плоскости, предполагая, что нигде нет ни источников, ни стоков «жидкостей». Пусть $\rho(x, y)$ будет «плотность» этой воображаемой жидкости. Рассмотрим множество изображающих точек — совокупность «частиц жидкости», которые заполняли в момент времени $t=0$ некоторую область («двумерный объем») $G(0)$ на фазовой плоскости. «Масса» рассматриваемого «объема жидкости», очевидно, выразится интегралом

$$I(0) = \iint\limits_{G(0)} \rho(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0$$

(x_0, y_0 — координаты изображающих точек при $t=0$). Наша «жидкость» течет по фазовой плоскости, следуя линиям тока, определяемым уравнениями движения (2.63) или их решением:

$$x = x(t;\ x_0,\ y_0),\ y = y(t;\ x_0,\ y_0) \tag{2.64}$$

(так как x_0, y_0 — начальные значения координат изображающих точек, то, очевидно, $x(0;\ x_0,\ y_0) = x_0$ и $y(0;\ x_0,\ y_0) = y_0$). По этим траекториям будут перемещаться и рассматриваемые «частицы» жидкости, заполнявшие в момент $t=0$ «объем» $G(0)$. Обозначим через $G(t)$ область, которую будет заполнять эта совокупность «частиц» в момент времени t. «Масса жидкости» в этом новом «объеме»

$$I(t) = \iint\limits_{G(t)} \rho(x, y)\, dx\, dy \tag{2.65}$$

и должна быть равна $I(0)$, если наша интерпретация движения изображающих точек на фазовой плоскости как стационарного течения некоторой «жидкости» с плотностью $\rho(x, y)$ и без источников и стоков является правильной, так как для «жидкости» должен выполняться закон сохранения «массы». Точнее говоря, такая интерпретация движения изображающих точек возможна только лишь в том случае, когда можно подобрать такую функцию $\rho(x, y)$ — «плотность» жидкости, чтобы «масса жидкости», «масса» любой совокупности ее

«частиц», оставалась неизменной во время движения. Мы будем говорить, что в этом случае уравнения движения (2.63) допускают двумерный положительный *интегральный инвариант*. Таким образом, выражение (2.65) является интегральным инвариантом (функция $\rho(x, y)$ называется фазовой плотностью интегрального инварианта [1]), если при любой начальной области $G(0)$ $I(t) \equiv I(0)$ или, что то же самое,

$$\frac{d}{dt} \iint\limits_{G(t)} \rho(x, y)\, dx\, dy \equiv 0 \tag{2.66}$$

при любой области интегрирования $G(t)$.

Найдем условие, которому должна удовлетворять функция $\rho(x, y)$ для того, чтобы выражение (2.65) было интегральным инвариантом уравнений (2.63). При дифференцировании интеграла (2.65) по времени основное затруднение состоит в том, что область $G(t)$, по которой совершается интегрирование, меняется с течением времени. Чтобы обойти эту трудность, перейдем под интегралом от переменных x, y к переменным x_0, y_0 с помощью якобиана [2])

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y_0} & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix} = D(t;\ x_0,\ y_0) \neq 0. \tag{2.67}$$

---

[1]) Ниже мы будем считать функцию $\rho(x, y)$ положительно определенной и ограниченной:

$$0 \leqslant \rho(x, y) < M,$$

где M — некоторое постоянное число; кроме того, эта функция не должна равняться тождественно нулю ни в какой конечной области.

[2]) Докажем, что якобиан D не равняется нулю (только в этом случае примененное преобразование переменных будет взаимно однозначным). Дифференцируя $D(t;\ x_0,\ y_0)$ по времени, получим:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial y_0} & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y_0} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} \end{vmatrix} = D\{P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)\},$$

так как, рассматривая $\dot{x}$, $\dot{y}$ как функции x, y согласно уравнениям движения (2.63), а x, y как функции t; x_0, y_0 согласно решению этих уравнений (2.64), имеем:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x_0} = P'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial x_0} + P'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial x_0}$$

и аналогичные выражения для $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial y_0}$, $\dfrac{\partial \dot{y}}{\partial x_0}$ и $\dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y_0}$. Интегрируя по времени (при заданных x_0, y_0), получим:

$$D(t;\ x_0,\ y_0) = D(0;\ x_0,\ y_0)\, e^{\int\limits_0^t \{P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)\}\, dt},$$

После перехода к новым переменным x_0, y_0 получим:

$$I(t) = \iint\limits_{G(0)} \rho(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)} dx_0\, dy_0, \tag{2.68}$$

причем здесь под x и y следует понимать функции $x(t;\ x_0,\ y_0)$ и $y(t;\ x_0,\ y_0)$ — решение дифференциальных уравнений (2.63), и

$$\frac{dI(t)}{dt} = \iint\limits_{G(0)} \frac{\partial}{\partial t}[\rho D]\, dx_0\, dy_0,$$

так как теперь область интегрирования от времени не зависит. Поскольку эта производная должна равняться тождественно нулю при *любой* области интегрирования $G(0)$, подынтегральное выражение должно также тождественно равняться нулю (при любых x_0, y_0), т. е. [1])

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(x, y) \cdot D(t;\ x_0,\ y_0)\} \equiv 0. \tag{2.69}$$

Так как

$$\frac{\partial D}{\partial t} = D\{P'_x + Q'_y\},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho D] = D\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial D}{\partial t} = D\left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}P + \frac{\partial \rho}{\partial y}Q + \rho\frac{\partial P}{\partial x} + \rho\frac{\partial Q}{\partial y}\right\} =$$
$$= D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\rho P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Q)\right\},$$

и условие (2.69), поскольку $D \neq 0$, сводится к условию

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Q) \equiv 0 \tag{2.70}$$

при любых x, y.

где $x = x(t;\ x_0,\ y_0)$, $y = y(t;\ x_0,\ y_0)$. Но

$$D(0;\ x_0,\ y_0) = \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x_0, y_0)} = 1,$$

поэтому

$$D(t;\ x_0,\ y_0) = e^{\int\limits_0^t \{P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)\}\, dt} \neq 0.$$

[1]) Мы пишем производную по времени как частную, так как x, y и $D(t;\ x_0,\ y_0)$ зависят не только от времени, но и от x_0, y_0.

Нетрудно показать, что уравнения Гамильтона всегда допускают интегральный инвариант с постоянной фазовой плотностью (которую, не нарушая общности, можно положить равной единице). Действительно, в случае уравнений Гамильтона, полагая $x = q$, $y = p$ и $\rho = 1$, условие (2.70) можно свести к условию

$$\frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{\partial H}{\partial p}\right\} + \frac{\partial}{\partial p}\left\{-\frac{\partial H}{\partial q}\right\} = 0, \tag{2.71}$$

которое выполняется тождественно в силу перестановочности дифференцирования.

Таким образом, фазовая площадь («двумерный фазовый объем») является интегральным инвариантом для уравнений Гамильтона. Это утверждение, впервые доказанное Лиувиллем, носит название *теоремы Лиувилля*.

Для уяснения несколько абстрактной теоремы Лиувилля рассмотрим примеры, в которых инвариантность фазовой площади нетрудно непосредственно установить.

Пример I. Гармоническое движение:

$$\frac{dp}{dt} = -q, \quad \frac{dq}{dt} = p,$$

$$p = a\cos(t + \varphi), \quad q = a\sin(t + \varphi).$$

Нетрудно сообразить, что с течением времени каждый радиус-вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\, a\sin(t + \varphi) + \mathbf{j}\, a\cos(t + \varphi),$$

характеризующий состояние системы, повернется на один и тот же угол. Любая фигура просто повернется, не изменяя своей формы и, следовательно, площади (рис. 105).

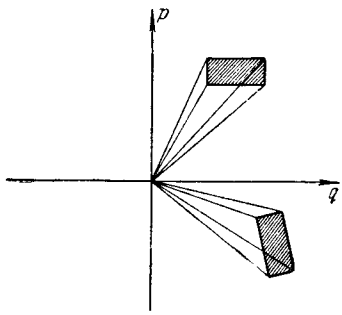

Рис. 105.

Пример II. Движение под действием постоянной силы:

$$\frac{dp}{dt} = -q, \quad \frac{dq}{dt} = p,$$

$$p = p_0 - gt, \quad q = q_0 + p_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Если мы в момент $t = 0$ выделим на фазовой плоскости квадрат между точками: 1) q_0, p_0; 2) $(q_0 + a)$, p_0; 3) q_0, $(p_0 + a)$; 4) $(q_0 + a)$, $(p_0 + a)$, то с течением времени квадрат будет все больше и больше перекашиваться (рис. 106), но площадь фигуры будет оставаться постоянной,

так как стороны, параллельные оси q, т. е. соединяющие точки с равной начальной скоростью p_0, будут перемещаться параллельно самим себе, и вместе с тем расстояние между ними и их длина будут оставаться неизменными и равными a. Вместо квадрата со стороной a мы получим параллелограмм с основанием a и высотой a, т. е. равновеликий квадрату.

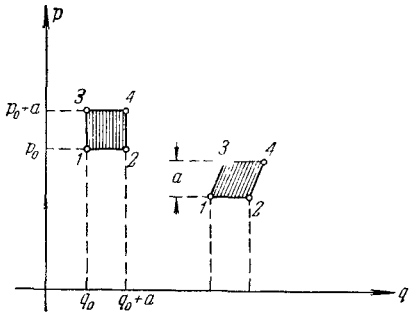

Рис. 106.

Если мы будем пользоваться фазовой плоскостью не с переменными q и p, а с переменными q и $\dot{q}$, т. е. если мы будем исходить не из уравнений Гамильтона, а из уравнений Лагранжа, то теорема Лиувилля уже не будет иметь места. Однако, вообще говоря, у нас будет существовать интегральный инвариант. Действительно,

$$\iint\limits_{G} dp\,dq = \iint\limits_{G^*} \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial p}{\partial q} \\ \frac{\partial q}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial q}{\partial q} \end{vmatrix} dq\,d\dot{q} = \iint\limits_{G^*} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\,dq\,d\dot{q}\,.$$

Таким образом, в переменных $q, \dot{q}$ фазовая плотность уже не постоянна, а равна $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$. Поэтому, для того чтобы уравнения Лагранжа допускали интегральный инвариант, достаточно, чтобы $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$ было конечно и постоянно по знаку, например положительно. В реальных случаях это условие обычно выполняется.

Интегральный инвариант имеют и более общие уравнения консервативных систем — уравнения Пфаффа (2.61), а именно: интегральный инвариант с фазовой плотностью $Q(u, v)$:

$$I = \iint\limits_{G(t)} Q(u, v)\,du\,dv,$$

так как условие того, чтобы это выражение было интегральным инвариантом уравнений (2.61),

$$\frac{\partial}{\partial u}(QU) + \frac{\partial}{\partial v}(QV) = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial F}{\partial v}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{-\frac{\partial F}{\partial u}\right\} \equiv 0$$

выполняется тождественно в силу перестановочности дифференцирования. Нетрудно видеть, что выражение $Q \cdot \Phi(F)$, где Φ — любая функция, а F — левая часть интеграла консервативной системы (2.59), может быть использовано для образования интегрального инварианта в качестве фазовой плотности. Действительно, $\Phi(F)$ является кон-

стантой движения; поэтому совершенно очевидно, что если $\iint Q\,du\,dv$ — интегральный инвариант, то и $\iint Q\,\Phi(F)\,du\,dv$ будет также интегральным инвариантом. Можно показать, что это общий вид интегрального инварианта. Другими словами, отношение двух различных выражений для фазовых плотностей интегральных инвариантов, приравненное постоянной величине, всегда является интегралом системы.

Возвратимся снова к наглядной интерпретации изображающих точек как «частиц двумерной жидкости», а их движения — как стационарного течения такой «жидкости» (без источников и стоков). Как уже указывалось в начале настоящего пункта, такая интерпретация возможна только при существовании интегрального инварианта; его фазовая плотность $\rho(x, y)$ может быть взята в качестве «плотности жидкости», а сам интегральный инвариант будет выражать закон сохранения «массы жидкости».

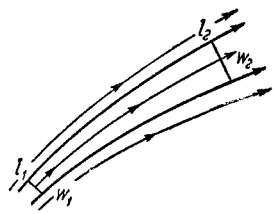

Рис. 107.

Рассмотрим поток «жидкости», заключенный между двумя достаточно близкими фазовыми траекториями, — «полоску» тока (рис. 107), которая аналогична трубке тока в гидродинамике. В силу закона сохранения «массы жидкости» поток «жидкости» через одно сечение этой полоски (например, через отрезок l_1) должен равняться потоку через любое другое сечение той же полоски тока (например, через отрезок l_2). Если обозначить через w_1 и w_2 фазовые скорости на этих отрезках [1]), т. е. скорости течения «жидкости» в этих сечениях полоски тока, то, очевидно [2]),

$$\rho_1 w_1 l_1 = \rho_2 w_2 l_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности «жидкости» в первом и втором сечениях полоски тока.

Таким образом, если мы знаем фазовые траектории и фазовую плотность, мы можем определить относительное распределение фазовых

---

[1]) Сечения рассматриваемой «полоски тока» должны быть настолько малыми, чтобы в каждом сечении фазовые скорости можно было считать одинаковыми.

[2]) Нетрудно видеть, что поток жидкости через любой замкнутый контур равен нулю. Действительно, поток жидкости внутрь замкнутого контура Г, как известно, определяется интегралом

$$\oint_{\Gamma} \rho(\dot{y}\,dx - \dot{x}\,dy) = \oint_{\Gamma} \rho\,Q\,dx - \rho\,P\,dy = \iint_{S} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Q)\right] dx\,dy$$

и равен нулю в силу условия (2.70) (последний интеграл получается из предыдущего применением формулы Грина; S обозначает двумерную область, лежащую внутри контура Г).

скоростей вдоль траекторий, т. е., иначе говоря, можем определить фазовую скорость в любой точке данной фазовой траектории, если она известна для какой-либо одной точки этой траектории.

Из существования интегрального инварианта со знакоопределенной и ограниченной фазовой плотностью еще раз следует невозможность существования в консервативных системах состояний равновесия типа узла или фокуса и замкнутых фазовых траекторий, к которым асимптотически приближались бы соседние фазовые траектории (т. е. предельных циклов). Действительно, допустив противоположное, мы будем иметь на фазовой плоскости такие «полоски тока», сечения которых будут неограниченно уменьшаться (точнее говоря, стремиться к нулю) при приближении этих «полосок тока» к состояниям равновесия типа узла или фокуса или к предельному циклу. Но фазовые скорости там остаются конечными (а при приближении к состояниям равновесия даже стремятся к нулю), следовательно по мере приближения к состояниям равновесия или к предельным циклам фазовая плотность должна неограниченно возрастать, что невозможно.

5. Основные свойства консервативных систем. Рассмотрим теперь несколько подробнее движения, допускаемые в консервативной системе. Начнем с положений равновесия. Положения равновесия определяются обращением в нуль правых частей уравнений (2.61):

$$\frac{\partial F}{\partial u}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial v}=0.$$

Эти положения равновесия либо соответствуют особым точкам системы, либо образуют линии равновесия (в случае существования общих множителей у $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$), которые тогда, как мы видели, непременно совпадают с интегральными кривыми.

Мы видели, что особыми точками не могут быть точки, к которым сходится бесконечное множество траекторий, сплошь заполняющих часть плоскости, т. е., другими словами, положения равновесия не могут быть абсолютно устойчивыми.

Замкнутые траектории соответствуют периодическим решениям: мы уже видели, что если есть хоть одно такое периодическое решение, то другие движения не могут на него накручиваться (а также с него скручиваться).

Иначе говоря (как мы уже упоминали), в консервативной системе не может быть также абсолютно орбитно-устойчивых траекторий. Если в консервативной системе есть одна замкнутая траектория, то их обязательно существует бесконечное множество, сплошь заполняющее некоторую область фазовой плоскости, причем эти замкнутые траектории вложены одна в другую. Физически это значит, что если возможно одно периодическое движение, то возможно бесконечное множество их, причем максимальные размахи и максимальные значения скоростей могут иметь любые значения, заключенные между

определенными пределами в зависимости от начальных условий. Нетрудно видеть, что периоды колебаний, вообще говоря, различны для различных максимальных размахов, т. е. также зависят от начальных условий. Системы, допускающие изохронные колебания, т. е. колебания, период которых не зависит от максимального размаха, представляют исключительный случай; в качестве примера можно указать на уже рассмотренный в гл. I случай гармонического осциллятора. В случае, если фазовая поверхность топологически эквивалентна плоскости, внутри замкнутых траекторий обязательно должна быть одна или несколько особых точек (если такая особая точка одна, то это обязательно центр). Колебания в системе совершаются только около одного или нескольких положений равновесия, из которых обязательно некоторые устойчивы. Если же, например, фазовая поверхность — цилиндр, то могут существовать замкнутые траектории, не охватывающие особых точек, а именно траектории, охватывающие цилиндр; в таких системах могут происходить периодические движения по замкнутым траекториям, не охватывающим положений равновесия. В качестве примера можно указать на вращение маятника без затухания при большой начальной скорости. Далее возможны замкнутые интегральные кривые с одной или несколькими особыми точками; первые соответствуют дважды лимитационным движениям, т. е. движениям, которые для t, стремящегося к $+\infty$, и t, стремящегося к $-\infty$, стремятся к одному и тому же положению равновесия. Вторые соответствуют лимитационным движениям, которые для $t \to +\infty$ стремятся к одному положению равновесия, а для $t \to -\infty$ к другому. Возможны также лимитационно-убегающие движения, которые для t, стремящегося в одну сторону в бесконечность, стремятся к положению равновесия, а для t, стремящегося в другую сторону в бесконечность, тоже уходят в бесконечность, и, наконец, дважды убегающие движения, которые в обе стороны уходят в бесконечность.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующей терминологией. Если уравнения движения системы (определяемой двумя автономными уравнениями первого порядка) допускают однозначный аналитический интеграл, то мы будем говорить, что структура интегральных кривых на фазовой плоскости для этой системы имеет *консервативный характер*. Такую систему, имеющую однозначный аналитический интеграл, мы будем называть *консервативной* системой, если она имеет интегральный инвариант, удовлетворяющий следующим требованиям: 1) область интегрирования $G(t_0)$ может быть выбрана любой, лишь бы ее не пересекали некоторые изолированные кривые; 2) при дальнейшем изменении t $G(t)$ не стремится к нулю, оставаясь в конечной части фазовой плоскости.

В заключение укажем еще на одно свойство, о котором мы уже кратко упоминали, а именно неустойчивость консервативных систем в отношении изменения вида дифференциальных уравнений. Можно

показать, что малейшее изменение вида дифференциального уравнения, вообще говоря, существенно изменяет всю картину на фазовой плоскости и нарушает консервативность системы. Для иллюстрации этого положения, которое будет точно сформулировано и разъяснено для общего случая в дальнейшем, можно привести следующий пример. Уравнение гармонического осциллятора $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ мы можем рассматривать как частный случай уравнения линейного осциллятора:

$$\ddot{x}+h\dot{x}+\omega_0^2 x=0.$$

При $h=0$ мы получаем консервативную систему — особую точку центр и интегральные кривые в виде семейства вложенных друг в друга эллипсов. При $h\neq 0$, но как угодно малом, т. е., по существу, при сколь угодно малом изменении вида дифференциального уравнения, система перестает быть консервативной, особая точка превращается в фокус, замкнутые траектории исчезают и появляются спирали. Можно сказать иначе, что консервативная система представляет собой весьма частный случай динамической системы, случай, который осуществляется только при вполне определенных значениях некоторых параметров системы (и поэтому практически этот случай неосуществим). Изменение этих параметров, вообще говоря, связано с изменением вида дифференциальных уравнений и нарушением консервативности системы[1]).

6. Пример. Совместное существование двух видов. Мы рассматривали до сих пор в виде примеров либо механические, либо электрические системы, для которых вопрос о консервативности решался непосредственно из физических соображений: поскольку трение или сопротивление в системе отсутствует, мы сразу можем сделать заключение, что система консервативна. Однако возможны случаи, когда такие простые соображения для решения вопроса о том, консервативна ли система, уже не могут быть применены. Необходимым критерием консервативности служит приведенный в предыдущем параграфе признак наличия однозначного аналитического интеграла вида $F(u, v)=C$. В качестве примера такой системы, для которой вопрос о консервативности не может быть решен заранее, мы приведем пример из области биологии, принадлежащий Вольтерра [175, 199, 45], именно мы рассмотрим совместное существование двух видов животных (например, двух видов рыб). Первый вид питается продуктами среды, которые, мы предположим, имеются всегда в достаточном количестве. Рыбы второго вида питаются только рыбами первого вида. Число особей каждого вида есть, конечно, целое число и, следовательно, может изменяться только скачками, но чтобы иметь возможность применить методы дифференциального исчисления, мы будем рассматривать их как

---

[1]) Напомним, что в § 5 мы рассматривали специально выбранные изменения параметров системы, не нарушающие консервативности системы.

непрерывные функции времени. Обозначим число особей первого вида через N_1, второго — через N_2. Мы предположим, что если бы первый вид жил один, то число особей его непрерывно увеличивалось бы, причем скорость увеличения мы предположим пропорциональной числу имеющихся налицо особей; тогда мы можем написать:

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1,$$

причем $\varepsilon_1 > 0$. Этот коэффициент увеличения ε_1 зависит от смертности и рождаемости. Если бы второй вид жил один, то он бы постепенно вымирал, так как ему нечем было бы питаться, поэтому для второго вида мы можем написать:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2.$$

Теперь предположим, что оба вида живут совместно, тогда коэффициент увеличения первого вида будет тем меньше, чем больше N_2, так как рыб первого вида поедают рыбы второго вида. Мы сделаем простейшее предположение, а именно, что коэффициент увеличения ε_1 уменьшается на величину, пропорциональную N_2: аналогичным образом предположим, что коэффициент уменьшения второго вида ε_2 в силу наличия первого вида (наличия пищи) изменяется на величину, пропорциональную N_1. При этих предположениях мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2); \quad \frac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1), \tag{2.72}$$

причем ε_1, ε_2, γ_1 и γ_2 все больше нуля[1]). Умножая первое уравнение на γ_2, второе — на γ_1 и складывая, получим:

$$\gamma_2 \frac{dN_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 N_1 - \varepsilon_2 \gamma_1 N_2;$$

умножая же первое на $\frac{\varepsilon_2}{N_1}$ и второе на $\frac{\varepsilon_1}{N_2}$ и складывая, имеем:

$$\varepsilon_2 \frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} + \varepsilon_1 \frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 \gamma_1 N_2 + \varepsilon_1 \gamma_2 N_1.$$

Следовательно,

$$\gamma_2 \frac{dN_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dN_2}{dt} - \varepsilon_2 \frac{d \ln N_1}{dt} - \varepsilon_1 \frac{d \ln N_2}{dt} = 0.$$

Последнее уравнение непосредственно интегрируется, и мы найдем однозначный интеграл:

$$\gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 - \varepsilon_2 \ln N_1 - \varepsilon_1 \ln N_2 = \text{const}.$$

---

[1]) Заметим, что к уравнениям вида (2.72) приводят (при соответствующих упрощающих предположениях) также и некоторые задачи кинетики химических процессов; см., например, [123].

Этот интеграл мы можем записать в таком виде:

$$F(N_1, N_2) = e^{-\gamma_2 N_1} e^{-\gamma_1 N_2} N_1^{\varepsilon_2} N_2^{\varepsilon_1} = \text{const}. \qquad (2.73)$$

Нетрудно убедиться, что выражение

$$\int\int \frac{dN_1\, dN_2}{N_1 N_2}$$

будет интегральным инвариантом. На основании этого мы заключаем, что рассматриваемая система является консервативной. Перейдем

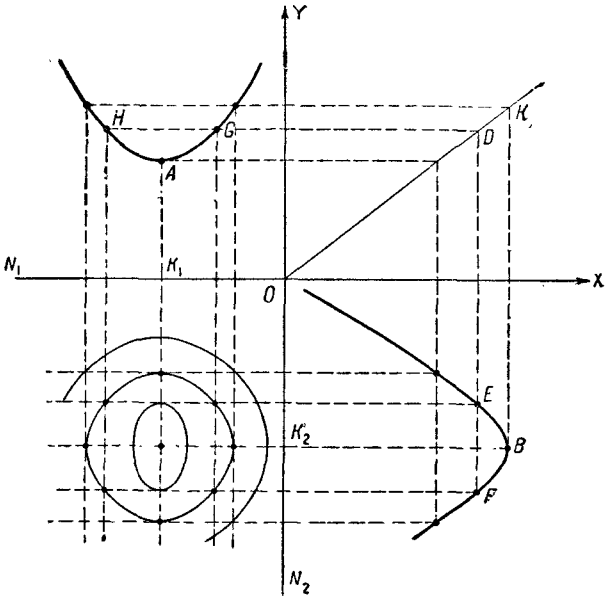

Рис. 108.

теперь к исследованию вида интегральных кривых. Для этого перепишем уравнение (2.73) в следующем виде:

$$N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} = C N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}$$

и построим кривые

$$Y = N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1}; \quad X = N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2},$$

откуда искомая траектория определяется соотношением

$$Y = CX.$$

Возьмем две взаимноперпендикулярные прямые и отложим на них оси OX, ON_1, OY, ON_2, как это показано на рис. 108. Во втором

и четвертом квадранте нанесем соответственно кривые X и Y. Форму этих кривых легко определить из следующей таблицы:

N_1	0	$k_1=\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$	$+\infty$
$\frac{dY}{dN_1}$	$-$	0	$+$
Y	$+\infty\searrow$	min	$\swarrow+\infty$

N_2	0	$k_2=\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$	$+\infty$
$\frac{dX}{dN_2}$	$+$	0	$-$
X	$0\ \swarrow$	max	$\searrow\ 0$

так как

$$\frac{dY}{dN_1}=Y\left(-\frac{\varepsilon_2}{N_1}+\gamma_2\right) \quad \text{и} \quad \frac{dX}{dN_2}=X\left(\frac{\varepsilon_1}{N_2}-\gamma_1\right).$$

В первом квадранте проведем прямую $Y=OX$. Возьмем какую-нибудь точку на прямой OK, например D. Проведем через нее две прямые — одну параллельную оси OY, другую параллельную оси OX. Пусть

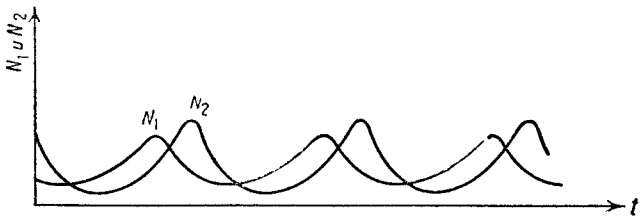

Рис. 109.

E, F, G, H будут точки пересечения этих прямых с кривыми X и Y; из точек E и F проведем две прямые, параллельные оси OX, и через точки H и G — две прямые, параллельные оси OY. Точки пересечения этих прямых и принадлежат интегральной кривой $Y=CX$. Геометрическое место таких точек, когда точка D скользит по прямой OK, и есть искомая интегральная кривая. Нетрудно видеть, что интегральные кривые все замкнуты, кроме одной, соответствующей координатным осям. Состояние равновесия — особая точка типа центра с координатами

$$N_1=\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad \text{и} \quad N_2=\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}.$$

Итак, мы видим, что в исследуемом случае изменение численности обоих видов происходит по периодическому закону. На рис. 109 приведены зависимости N_1 и N_2 от времени.