

ГЛАВА III

НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Мы рассмотрели два класса систем: во-первых, системы неконсервативные, но линейные, и убедились в том, что для этого класса систем периодические движения вообще невозможны; во-вторых, мы рассмотрели системы консервативные (линейные и нелинейные) и убедились, что в этих системах возможны периодические движения, но что таких движений всегда возможно бесчисленное множество и амплитуда их целиком определяется начальными условиями. Между тем, как уже неоднократно указывалось, нас интересуют главным образом такие периодические движения, амплитуда которых определяется свойствами самой системы. Затем, нас в первую очередь интересуют такие системы, характер движений в которых не изменяется существенно при малых, достаточно общих изменениях самих систем; консервативные системы, как только что было указано, не удовлетворяют и этому требованию. Мы увидим дальше, что лишь неконсервативные нелинейные системы являются адекватными математическими моделями интересующих нас реальных физических систем, т. е. такими моделями, которые позволяют получать ответы на вопросы, интересующие физику колебаний. В настоящей главе мы познакомимся на примерах с двумя основными типами таких нелинейных и неконсервативных систем — с системами *диссипативными* и с системами *автоколебательными*.

§ 1. Диссипативные системы

Поскольку рассматриваемый нами случай отличается от рассмотренного ранее случая консервативной системы наличием сил, не имеющих потенциала, мы можем, вводя «обобщенные силы», написать для этих систем уравнение Лагранжа в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \Phi = 0, \quad (3.1)$$

где обобщенная сила Φ есть некоторая функция q и \dot{q} ¹⁾. В частном случае «линейного трения» или омического сопротивления Φ есть линейная функция скорости: $\Phi = -b\dot{q}$, и уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + b\dot{q} = 0.$$

К такому уравнению приводят любая из рассмотренных нами нелинейных систем при наличии силы трения, пропорциональной скорости, например контур с железом при наличии омического сопротивления. К общему же виду, т. е. к уравнению (3.1), нас приведет рассмотрение систем, в которых трение каким-либо более сложным образом зависит от скорости.

Если неконсервативные силы имеют характер сил трения, то они должны препятствовать движению, т. е. должны быть всегда направлены в сторону, противоположную скорости. Следовательно, в случае наличия сил трения всегда соблюдается условие

$$\Phi\dot{q} \leq 0, \quad (3.2)$$

причем равенство нулю никогда не может удовлетворяться тождественно за исключением случая, когда $\dot{q} \equiv 0$, т. е. когда система находится в состоянии покоя. Умножив все члены уравнения (3.1) на \dot{q} , мы получаем уравнение баланса энергии:

$$\frac{dW}{dt} - \Phi\dot{q} = 0, \quad (3.3)$$

где $W = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$ ($W = \text{const}$ является интегралом уравнения (3.1) при $\Phi = 0$). Для обычных систем W есть полная энергия, и, как это следует из уравнения (3.3) и условия (3.2), эта энергия при движении системы ($\dot{q} \neq 0$) всегда убывает. Предположим, что энергия не может стремиться к $-\infty$. Тогда мы можем утверждать, что с течением времени она стремится к некоторому постоянному значению W_0 , а $\Phi\dot{q}$ и, следовательно, \dot{q} — к нулю, т. е. система стремится к состоянию покоя (к состоянию равновесия)²⁾. Такие системы мы будем называть *диссипативными*. В диссипативной системе единственными стационарными состояниями являются состояния равновесия, к которым система приближается при любых начальных условиях. Периодические

¹⁾ Обобщенная сила определяется соотношением: $\delta A = \Phi \delta q$, где δA — работа непотенциальных сил над системой при малом, виртуальном (в смысле теоретической механики) изменении координаты на δq . Например, работа, совершаемая на сопротивлении R электрической системы при прохождении через него заряда δq , равна $U_R \cdot \delta q$, где $U_R = R\dot{q}$ — напряжение на сопротивлении; таким образом, в этом случае $\delta A = -R\dot{q}\delta q$ и $\Phi = -R\dot{q}$. Точно так же для сил вязкого, линейного трения $\Phi = -b\dot{q}$ ($b > 0$).

²⁾ Вообще говоря, W_0 зависит от начальных условий.

движения в диссипативных системах, очевидно, невозможны, так как энергия системы при движении всегда убывает.

В качестве примера диссипативной системы рассмотрим обычный маятник при больших отклонениях и при наличии силы трения. Для простоты будем считать, что сила трения пропорциональна скорости, т. е. положим $\Phi = -b\dot{\varphi}$ и $b > 0$. Лагранжева функция L для маятника имеет вид

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg l (\cos \varphi - 1),$$

и уравнение Лагранжа напишется так:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mg l \sin \varphi = 0. \quad (3.4)$$

Картина на развертке фазового цилиндра (фазовой поверхностью, конечно, опять является цилиндр) определяется уравнением

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{b\omega + mg l \sin \varphi}{I\omega}, \quad (3.5)$$

где $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Особыми точками этого уравнения, очевидно, будут: $\varphi = 0$, $\omega = 0$ и $\varphi = \pm\pi$, $\omega = 0$. Устойчивому состоянию равновесия соответствует точка $(0, 0)$, которая является либо устойчивым фокусом (при $b^2 < 4Imgl$), либо устойчивым узлом (при $b^2 > 4Imgl$); неустойчивому состоянию равновесия соответствует седло $(\pm\pi, 0)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно разложить $\sin \varphi$ в степенные ряды вблизи значений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$, ограничиться линейными членами и исследовать полученные линеаризованные уравнения так, как это мы делали в гл. I.

Касательные к интегральным кривым вертикальны на оси φ ($\omega = 0$) и горизонтальны на кривой $\omega = -\frac{mg l}{b} \sin \varphi$, т. е. изоклина $\frac{d\omega}{d\varphi} = 0$ имеет вид синусоиды, и чем меньше b , тем больше амплитуда этой синусоиды. В общем для двух рассматриваемых случаев $b^2 < 4Imgl$ и $b^2 > 4Imgl$ получаются фазовые портреты, изображенные соответственно на рис. 110 и 111. Склейв развертку цилиндра по линии $\varphi = \pm\pi$, мы получим фазовый цилиндр, разбитый на фазовые траектории.

Глядя на фазовые портреты маятника (рис. 110 и 111), легко убедиться в том, что периодических движений в системе нет и что почти при всех начальных условиях (за исключением условий, соответствующих состояниям равновесия и устойчивым узам седел) система стремится к устойчивому состоянию равновесия.

Если условие (3.2) не соблюдается, то система может уже не быть диссипативной. В такой системе возможно возрастание энергии за счет «сил трения», так как при $\Phi \dot{q} > 0$ $\frac{dW}{dt} > 0$; с такими случаями

мы познакомились на примерах лампового генератора и маятника Фроуда.

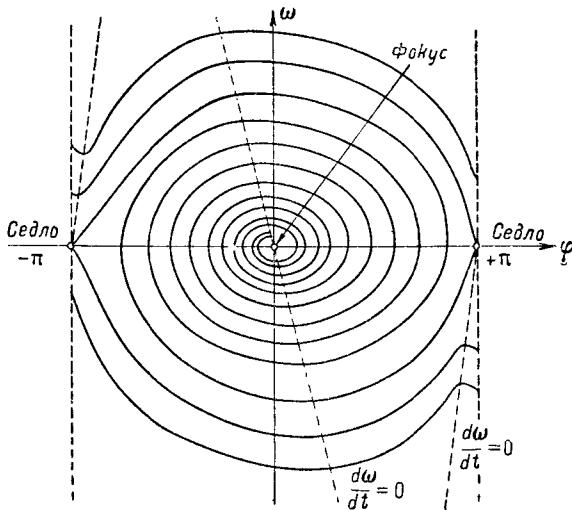


Рис. 110.

Если условие (3.2) не соблюдается, то мы уже не можем утверждать, что периодические движения невозможны. Пусть, например,

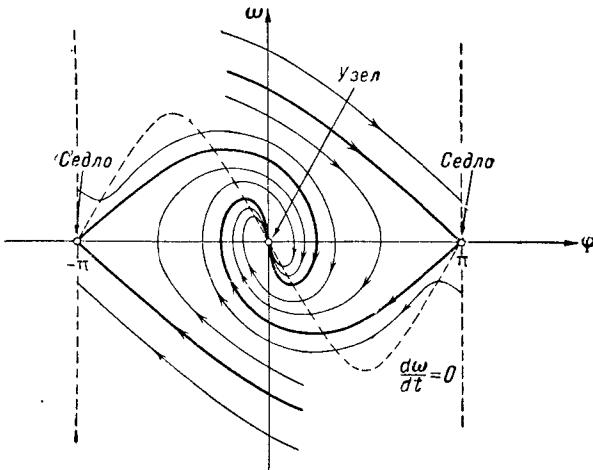


Рис. 111.

мы имеем «силу трения», пропорциональную квадрату скорости, т. е. $\Phi = -b\dot{q}^2$, где $b > 0$. Очевидно, что такая «сила трения»

препятствует движению при $\dot{q} > 0$ и помогает движению при $\dot{q} < 0$. В этом случае уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{dW}{dt} + b\dot{q}^2 = 0.$$

Легко можно показать, исследуя это уравнение, что для обычных механических и электрических задач «сила трения» вида $\Phi = -b\dot{q}^2$ не нарушает консервативности системы и что в соответствующих системах возможны континуумы периодических движений, с амплитудами, зависящими от начальных условий¹⁾.

В качестве примера рассмотрим картину на фазовой плоскости для осциллятора, описываемого уравнением²⁾

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0. \quad (3.6)$$

Полагая $\dot{x} = y$ и исключая время, получим уравнение для интегральных кривых на фазовой плоскости x, y :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y^2}{2y} \quad (3.7)$$

или $2y \frac{dy}{dx} = -x - y^2$ и $\frac{d(y^2)}{dx} + y^2 = -x$. Интегрируя последнее, получим:

$$y^2 = Ce^{-x} + 1 - x$$

или

$$(y^2 + x - 1)e^x = C, \quad (3.8)$$

где C — постоянная интегрирования (мы оставили коэффициент 2 при \ddot{x} в уравнении движения только для того, чтобы это уравнение интегральных кривых имело простой вид).

¹⁾ Настоящая сила трения, пропорциональная квадрату скорости, всегда направлена против движения; поэтому она аналитически записывается в виде

$$\Phi = -b\dot{q}^2 \operatorname{sgn} \dot{q},$$

где $b > 0$ и, как обычно, под $\operatorname{sgn} \dot{q}$ понимается функция

$$\operatorname{sgn} \dot{q} = \begin{cases} +1 & \text{при } \dot{q} > 0, \\ 0 & \text{при } \dot{q} = 0, \\ -1 & \text{при } \dot{q} < 0. \end{cases}$$

При таком законе трения условие диссипативности (3.2), конечно, выполняется.

²⁾ К этому уравнению приводится уравнение

$$m \frac{d^2q}{dt^2} + b \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + kq = 0$$

путем замены переменных

$$q = \frac{m}{2b} x, \quad t = \sqrt{\frac{m}{2k}} t_{\text{нов.}}$$

Семейство интегральных кривых (3.8) изображено на рис. 112. Значению $C = -1$ соответствует изолированная точка $(0, 0)$ — особая точка уравнения (3.7); при $0 > C > -1$ получаются замкнутые кривые,

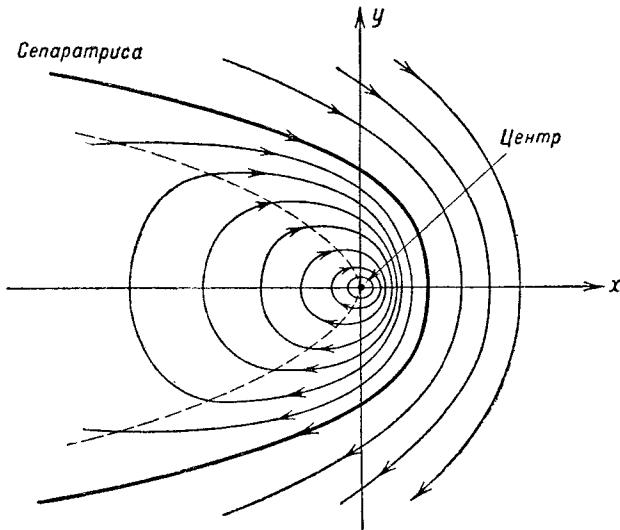


Рис. 112.

охватывающие начало координат и вложенные друг в друга; при $C \geq 0$ кривые (3.8) уходят в бесконечность (значению $C = 0$ соответствует парабола $y^2 = 1 - x$, которая является сепаратрисой, т. е. кривой, разделяющей замкнутые кривые и кривые, уходящие в бесконечность)¹⁾.

¹⁾ Для того чтобы убедиться, что кривые (3.8) действительно имеют такой вид, поступим следующим образом. Найдем, во-первых, точки пересечения кривых (3.8) с осью абсцисс, которые определяются, очевидно, уравнением $(x - 1)e^x = C$.

Для графического решения этого уравнения построим на вспомогательной плоскости x, z кривую

$$z = (x - 1)e^x \quad (a)$$

(эта кривая имеет единственный экстремум — минимум $z = -1$ при $x = 0$; $z \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $z = 0$ при $x = 1$ и $z \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$). Тогда точки пересечения кривой (3.8), соответствующей заданному C , с осью абсцисс определяются как точки пересечения кривой (a) с прямой $z = C$. Очевидно, при $C < -1$ точек пересечения нет; при $C = -1$ имеется одна двухкратная точка $x = 0$; при $-1 < C < 0$ — две точки: $x = x_1 < 0$ и $x = x_2 > 0$, причем $x_2 < 1$, и при $C \rightarrow 0$ $x_1 \rightarrow -\infty$, а $x_2 \rightarrow 1$. Наконец, при $C \geq 0$ имеется только одна точка пересечения $x \geq 1$.

Далее интегральную кривую (3.8) с заданным C легко построить, пользуясь соотношением

$$y^2 = [C - (x - 1)e^x] e^{-x}.$$

Очевидно, эта кривая существует только при тех значениях x , при которых прямая $z = C$ проходит над кривой (a).

Если в начальный момент представляющая точка находилась внутри области, ограниченной сепаратрисой, то система будет совершать периодическое движение с амплитудой, целиком определяемой начальными условиями (из вида интегральных кривых сразу можно заключить, что колебания будут по форме существенно отличаться от синусоидальных).

Это свойство является, как мы видели, одним из наиболее характерных свойств консервативных систем; введенное нами трение, которое в течение одной части периода препятствует движению, а в течение другой «помогает» ему, не нарушает консервативности системы.

От этого случая легко перейти к рассмотрению диссипативной системы — осциллятора с «настоящим» квадратичным трением, т. е. с силой

трения, пропорциональной квадрату скорости (рис. 113) и выражаемой соотношением

$$\Phi = -b \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{dq}{dt} \right)$$

($b > 0$). Уравнение движения такого осциллятора

$$m \frac{d^2q}{dt^2} + b \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{dq}{dt} \right) + kq = 0$$

заменой переменных, указанной в примечании на стр. 172, приводится к уравнению

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} + x = 0, \quad (3.9)$$

или

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ 2\dot{y} = -x - y^2 \operatorname{sgn} y. \end{cases} \quad (3.10)$$

Из полученных уравнений следует, что единственным состоянием равновесия является начало координат $(0, 0)$. Далее, поскольку уравнения (3.10) не меняют своего вида при замене переменных x, y на $-x, -y$, фазовые траектории в верхней полуплоскости симметричны относительно начала координат с фазовыми траекториями в нижней полуплоскости (иначе говоря, если кривая $y = f(x)$ является фазовой траекторией, то фазовой траекторией будет и кривая $y = -f(-x)$).

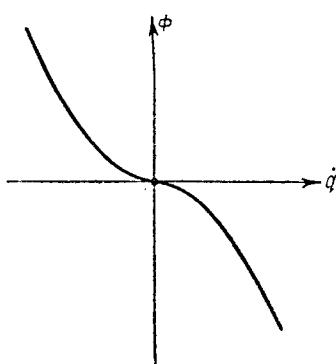


Рис. 113.

Но фазовые траектории в верхней полуплоскости ($y \geq 0$), очевидно, совпадают с траекториями (3.8) только что рассмотренной консервативной системы. Поэтому, сохранив над осью x картину, изображенную на рис. 112, и построив в нижней полуплоскости траектории, симметричные (относительно начала координат) с траекториями в верхней полуплоскости, мы получим фазовый портрет осциллятора с квадратичным трением (рис. 114).

Как и следовало ожидать, состояние равновесия $(0, 0)$ является устойчивым и к нему асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все остальные спиралевидные фазовые траектории; иначе говоря, система при любых начальных условиях совершаает осцилляторно затухающие колебания¹⁾.

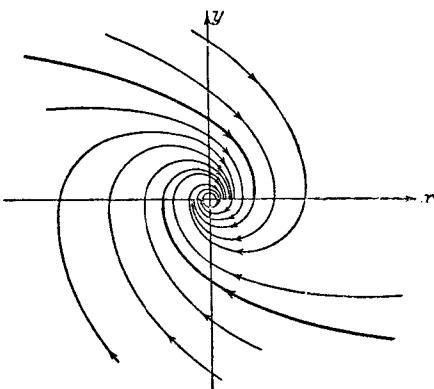


Рис. 114.

§ 2. Осциллятор с «кулоновским» трением

В качестве другого примера диссипативной системы мы рассмотрим осциллятор с «сухим» трением (рис. 115), причем для простоты будем считать, что при отсутствии трения система представляет гармонический осциллятор.

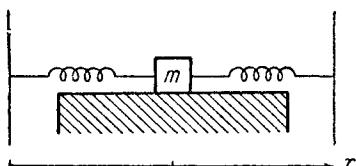


Рис. 115.

Такую задачу об осцилляторе, который при отсутствии трения был бы гармоническим, мы уже рассматривали в гл. I, § 4, предполагая, однако, при этом, что сила трения пропорциональна скорости. Этот закон трения удовлетворительно определяет сопротивление движению тела со стороны жидкой или газообраз-

ной среды при не слишком больших скоростях. Однако этот линейный закон совершенно не отображает закономерностей «сухого» трения — трения между твердыми поверхностями (без слоя смазки между ними), имеющегося в рассматриваемой колебательной системе. Достаточно хорошо основные черты этих закономерностей, во всяком случае в области малых скоростей, передаются предположением о «постоянном»

¹⁾ В § 9 гл. VIII мы докажем, что фазовые траектории идут действительно так, путем сведения задачи к некоторому точечному преобразованию прямой в прямую,