

Но фазовые траектории в верхней полуплоскости ($y \geq 0$), очевидно, совпадают с траекториями (3.8) только что рассмотренной консервативной системы. Поэтому, сохранив над осью x картину, изображенную на рис. 112, и построив в нижней полуплоскости траектории, симметричные (относительно начала координат) с траекториями в верхней полуплоскости, мы получим фазовый портрет осциллятора с квадратичным трением (рис. 114).

Как и следовало ожидать, состояние равновесия $(0, 0)$ является устойчивым и к нему асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все остальные спиралевидные фазовые траектории; иначе говоря, система при любых начальных условиях совершают осцилляторно затухающие колебания¹⁾.

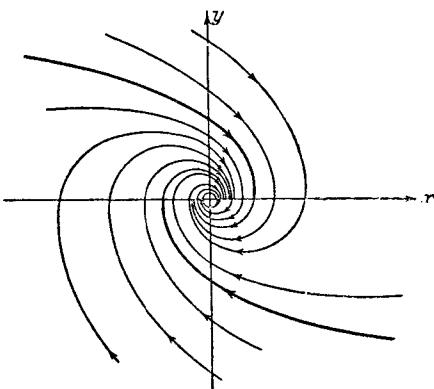


Рис. 114.

§ 2. Осциллятор с «кулоновским» трением

В качестве другого примера диссипативной системы мы рассмотрим осциллятор с «сухим» трением (рис. 115), причем для простоты будем считать, что при отсутствии трения система представляет гармонический осциллятор.

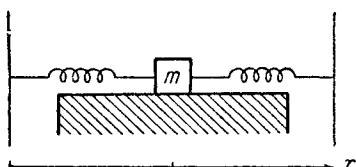


Рис. 115.

Такую задачу об осцилляторе, который при отсутствии трения был бы гармоническим, мы уже рассматривали в гл. I, § 4, предполагая, однако, при этом, что сила трения пропорциональна скорости. Этот закон трения удовлетворительно определяет сопротивление движению тела со стороны жидкой или газообраз-

ной среды при не слишком больших скоростях. Однако этот линейный закон совершенно не отображает закономерностей «сухого» трения — трения между твердыми поверхностями (без слоя смазки между ними), имеющегося в рассматриваемой колебательной системе. Достаточно хорошо основные черты этих закономерностей, во всяком случае в области малых скоростей, передаются предположением о «постоянном»

¹⁾ В § 9 гл. VIII мы докажем, что фазовые траектории идут действительно так, путем сведения задачи к некоторому точечному преобразованию прямой в прямую,

или «кулоновском» трении. Конечно, когда речь идет о постоянном трении, то нужно понимать под этим трение, постоянное по величине, но не по направлению, так как направление силы трения всегда противоположно направлению скорости (только в этом случае условие диссипативности, т. е. неравенство (3.2), соблюдается).

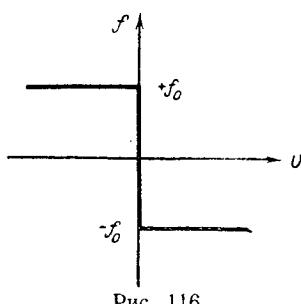


Рис. 116.

Зависимость кулоновской силы трения f от скорости v можно, как мы уже это делали, изобразить диаграммой, приведенной на рис. 116. При этом следует помнить, что величина силы трения для $v = 0$ может принимать в зависимости от величины других действующих на систему сил любые значения от $+f_0$ до $-f_0$, полностью уравновешивая эти силы при условии, что их равнодействующая не превышает по абсолютной величине максимальную силу трения f_0 .¹⁾

превышает по абсолютной величине максимальную силу трения f_0 .¹⁾.

В рассматриваемой нами системе на массу m кроме силы сухого трения действует еще сила натяжения пружин $-kx$. Поэтому неподвижный осциллятор ($\dot{x} = 0$) останется в покое, если сила натяжения пружин по абсолютному значению не превышает f_0 , так как она будет полностью уравновешена силой сухого трения. Таким образом, все положения осциллятора с координатами $-\frac{f_0}{k} \leq x \leq +\frac{f_0}{k}$ могут быть положениями покоя. Если же $|kx| > f_0$, то сила натяжения пружины уже не будет полностью уравновешена силой сухого трения и осциллятор придет в движение. При движении осциллятора сила кулоновского трения $f = +f_0$ при $\dot{x} < 0$ и $f = -f_0$ при $\dot{x} > 0$.

Итак, для рассматриваемой задачи мы можем записать силу кулоновского трения в следующем виде:

$$f = \begin{cases} +f_0 & \text{при } \dot{x} < 0, \\ +f_0 & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } kx > f_0, \\ +kx & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } |kx| \leq f_0, \\ -f_0 & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ и } kx < -f_0, \\ -f_0 & \text{при } \dot{x} > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

(сила кулоновского трения является, таким образом, нелинейной, разрывной функцией и зависит не только от скорости \dot{x} , но и от координаты x осциллятора).

¹⁾ По закону Кулона максимальная сила трения покоя f_0 пропорциональна силе давления одной трущшейся поверхности на другую; в нашем случае $f_0 = \rho_0 mg$, где ρ_0 — так называемый коэффициент трения.

Соответственно нелинейное дифференциальное уравнение движения осциллятора

$$m\ddot{x} = -kx + f \quad (3.12)$$

мы можем записать в виде двух *различных линейных* уравнений, одно из которых справедливо для движения влево:

$$m\ddot{x} + kx = +f_0 \quad (\dot{x} < 0), \quad (3.12a)$$

а другое — для движения вправо:

$$m\ddot{x} + kx = -f_0 \quad (\dot{x} > 0). \quad (3.12b)$$

При неподвижном осцилляторе (т. е. при $\dot{x} = 0$) $\ddot{x} = 0$, если $|kx| \leq f_0$, $m\ddot{x} = -kx + f_0$, если $kx > f_0$, и, наконец, $m\ddot{x} = -kx - f_0$, если $kx < -f_0$.

Как найти движение такой системы? Пусть, например, в начальный момент у нас $\dot{x} > 0$. Движение системы описывается первым дифференциальным уравнением (3.12a). Скорость будет уменьшаться до некоторого момента $t = t_1$, и когда система достигнет координаты $x = x_1$, скорость обратится в нуль. Затем скорость изменит знак, и система будет двигаться в обратном направлении¹⁾. Обратное движение, само собой разумеется, описывается уже вторым уравнением (3.12b), причем теперь в качестве начальных условий обратного движения нужно взять те значения координаты и скорости $(x_1, 0)$, которыми обладала система в конце предыдущего этапа движения. Таким же образом поступают и дальше: меняют уравнение при каждом изменении направления движения, «припасовывая» начальные условия, т. е. принимая за начальное состояние то состояние, в которое пришла система в предшествующем движении. Обозначая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{f_0}{m} = a\omega_0^2$ (очевидно, что в таком случае $a = \frac{f_0}{k}$), напишем уравнения движения рассматриваемой системы в таком виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} +a\omega_0^2 & \text{при } \dot{x} < 0, \\ -a\omega_0^2 & \text{при } \dot{x} > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Вводя для первого уравнения новую переменную $\xi_1 = x - a$, а для второго $\xi_2 = x + a$, получим два одинаковых уравнения: $\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = 0$ (при $\ddot{\xi}_1 < 0$) и $\ddot{\xi}_2 + \omega_0^2 \xi_2 = 0$ (при $\ddot{\xi}_2 > 0$), но для переменных, отнесенных к разным началам координат. Решениями этих уравнений являются уравнения гармонического колебания. Следовательно, движение рассматриваемой системы можно представить себе составленным из двух «половин» гармонических колебаний,

¹⁾ Тело, конечно, может остановиться. Остановится оно или не остановится, зависит от того, что больше в точке x_1 : максимальное значение силы трения f_0 или сила упругости.

происходящих относительно двух различных положений равновесия, сдвинутых соответственно на расстояние $+a$ и $-a$ от истинного положения равновесия, которое занимала бы система при отсутствии трения. «Смена уравнений» происходит в тот момент, когда скорость системы обращается в нуль, но координата отлична от нуля. Следовательно, при каждой «смене уравнений» мы имеем начальные условия $x = x_{01}$; $\dot{x} = 0$. Решение, удовлетворяющее этим начальным условиям, есть $x_{01} \cos \omega_0 t$ (если для момента «смены уравнений» положить $t = 0$). Поэтому каждое «полуколебание» мы должны изображать отрезком косинусоиды от 0 до π , т. е. от одного экстремального значения до следующего.

Изображая движение на осциллограмме $x = f(t)$, мы должны поступить следующим образом (рис. 117). Пусть начальное отклонение системы x_{01} , а начальная скорость $\dot{x}_{01} = 0$. Если начальное отклонение положительно, то скорость первое время будет отрицательна и,

значит, положение равновесия будет смещено на $+a$, т. е. на величину a вверх от оси времен. Поэтому в результате первого полуколебания от одного экстремального значения до другого система дойдет вниз до наибольшего отклонения x_{02} , причем $|x_{02}| = |x_{01}| - 2a$.

Дальше, для второго полуколебания (при $\dot{x} > 0$) вступает в силу второе уравнение, и следовательно, это будет полуколебание относительно положения равновесия, сдвинутого на $-a$, т. е.

на величину a вниз от оси времен, начинающееся также с экстремального значения. К концу этого полуколебания система достигнет наибольшего отклонения x_{03} (над осью t), причем $|x_{03}| = |x_{02}| - 2a = |x_{01}| - 4a$.

То обстоятельство, что положение равновесия смещается в сторону начального отклонения, как легко видеть, и обуславливает затухание колебаний. Наибольшие отклонения, которых достигает система (экстремумы отклонений), убывают каждый раз по абсолютной величине на $2a$, а наибольшие отклонения в одну сторону (максимумы или минимумы) представляют собой убывающую арифметическую прогрессию с разностью прогрессии, равной $4a$. Ясно, что эта прогрессия состоит из конечного числа членов, и движение прекращается по прошествии конечного числа колебаний. Действительно, когда наибольшее отклонение упадет до величины, меньшей, чем $3a$, например отклонение x_{03} на рис. 117, то следующее движение приведет систему в область, заключенную между прямыми $+a$ и $-a$,

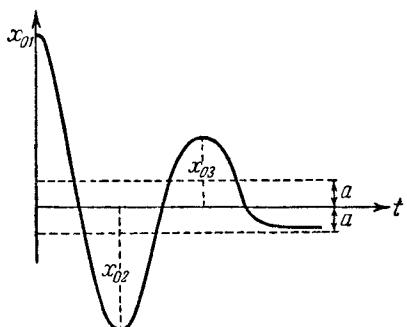


Рис. 117.

в которой система при отсутствии скорости может оставаться в покое в любой точке, так как в этой области $|kx| \leq f_0$. Таким образом, в рассматриваемом случае наибольшие отклонения убывают не по геометрической прогрессии, как в случае линейного осциллятора (с силой трения, пропорциональной скорости), а по арифметической прогрессии, и движение прекращается через конечный промежуток времени. Термин «логарифмический декремент затухания» в этом случае теряет свой смысл, ибо логарифм отношения двух последовательных отклонений уже не есть постоянная величина.

«Условный период» колебаний системы в том смысле, как мы его определили для затухающего колебания в случае трения, пропорционального скорости, т. е. интервал времени между двумя максимумами (во время колебательного этапа движения) для случая постоянного трения не зависит от величины силы трения и совпадает с периодом гармонического осциллятора¹⁾. При этом, как легко убедиться из рассмотрения рис. 117, расстояние (по оси времени) между максимумом и следующим нулевым значением больше, чем между нулевым значением и следующим максимумом. Эта разница тем более заметна, чем меньше максимум. Такой же «сдвиг» максимальных значений по оси времени «назад» в направлении предшествующих нулевых значений, как мы видели, имеет место и в линейной системе с трением, пропорциональным скорости. Наконец, отметим еще одно различие между системами с линейным и постоянным трением (связь этого различия с только что отмеченным легко проследить). Именно, в случае линейного трения всегда можно, по крайней мере формально, разделять системы на колебательные и апериодические. В случае же постоянного трения разделение систем на колебательные и апериодические вообще теряет смысл, ибо всегда при любом трении можно выбрать достаточно большое начальное отклонение, так что система совершил ряд колебаний, прежде чем ее движение прекратится. Физический смысл этого свойства систем с постоянным трением выступает особенно ясно при рассмотрении вопроса о балансе энергии в системе.

Если начальное отклонение системы есть x_{01} , а начальная скорость равна нулю, то начальная энергия системы есть только потенциальная энергия V , причем $V_1 = \frac{kx_{01}^2}{2}$. Работа A , затрачиваемая на преодоление силы трения, не зависит от скорости, а зависит только от пути (ибо сила трения постоянна). Очевидно, что за первую половину «условного периода» эта работа составляет:

$$A_1 = (|x_{01}| + |x_{02}|)f_0,$$

¹⁾ Заметим, что в рассматриваемом случае постоянного трения интервалы времени между нулевыми значениями координаты, соответствующими движению системы в одну и ту же сторону (во время колебательного этапа), уже не являются одинаковыми и поэтому не могут быть положены в основу определения «условного периода».

где x_{02} — второе наибольшее отклонение, потенциальная же энергия при $x = x_{02}$ будет:

$$V_2 = \frac{kx_{02}^2}{2};$$

так как $V_1 - V_2 = A_1$, то

$$\frac{k}{2}(x_{01}^2 - x_{02}^2) = (|x_{01}| + |x_{02}|)f_0,$$

$$|x_{01}| - |x_{02}| = \frac{2f_0}{k} = 2a$$

(этот результат мы уже получили раньше из другого рассмотрения), и

$$A_1 = 2f_0(|x_{01}| + a).$$

Мы видим, что с увеличением начального отклонения A_1 растет линейно, а V_1 — по квадратичному закону. Следовательно, при достаточно большом начальном отклонении запас энергии в системе будет гораздо больше, чем потери энергии на трение за половину условного периода, и значит, при достаточно больших начальных отклонениях система первое время всегда будет себя вести, как колебательная.

Посмотрим теперь, как изобразится исследованное нами движение на фазовой плоскости. Для этого положим, как обычно, $\frac{dx}{dt} = y$ и получим два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2(x-a)}{y} \quad \text{при } y < 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2(x+a)}{y} \quad \text{при } y > 0;$$

интегрируя, находим:

$$\frac{(x-a)^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_1^2 \omega_0^2} = 1 \quad \text{при } y < 0, \quad (3.14a)$$

$$\frac{(x+a)^2}{R_2^2} + \frac{y^2}{R_2^2 \omega_0^2} = 1 \quad \text{при } y > 0, \quad (3.14b)$$

где R_1 и R_2 — константы интегрирования. Уравнения (3.14a) и (3.14b) определяют семейства «полуэллипсов», центры которых смешены соответственно вправо (3.14a) и влево (3.14b) на a . Пользуясь методом «припасования» (см. выше) и учитывая направление движения по фазовой плоскости, нетрудно построить фазовые траектории, как это и сделано на рис. 118. По этому рисунку, представляющему фазовый «портрет» рассматриваемой динамической системы, мы сразу можем судить о характере возможных движений. Все фазовые траектории суть спирали, составленные из полуэллипсов, и приходят на отрезок O_1O_2 , который является геометрическим местом состояний равновесия. Таким образом, вообще говоря, наша система со-

вершает колебания вокруг положения равновесия с уменьшающимися размахами и останавливается, совершив конечное число этих размахов, зависящее от начальных условий. В частном случае, когда начальные условия соответствуют одной из точек отрезка O_1O_2 , наша система остается в покое. Состоянию покоя, как мы видим, соответствуют не отдельные точки, а целый отрезок прямой O_1O_2 . Но на этом отрезке система обладает все же некоторой своеобразной «неустойчивостью». Действительно, пусть, например, система остановилась в точке $+x_1$, и мы, толкая ее в разные стороны, сообщаем ей одну и ту же величину начальной скорости.

Но, толкая ее в одну сторону, мы «закидываем» представляющую точку на $+y_1$, а толкая в другую сторону — на $-y_1$ (рис. 119). Так как верхние полуэллипсы в этом месте имеют большие полуоси, чем нижние, то они

идут «круче» к оси абсцисс, чем нижние, и, следовательно, при толчке $-y_1$ система в конечном счете больше приблизится к «истинному» положению равновесия (к началу координат), чем при толчке $+y_1$ она удалится от этого положения равновесия. Следовательно, если толчки действуют как в ту, так и в другую сторону одинаково часто (например, этого можно достигнуть, подвергая систему искусственно систематическому

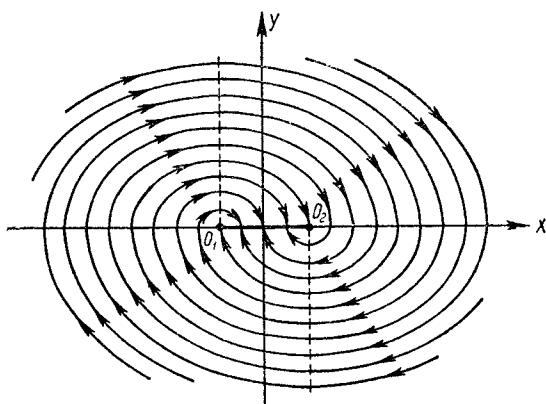


Рис. 118.

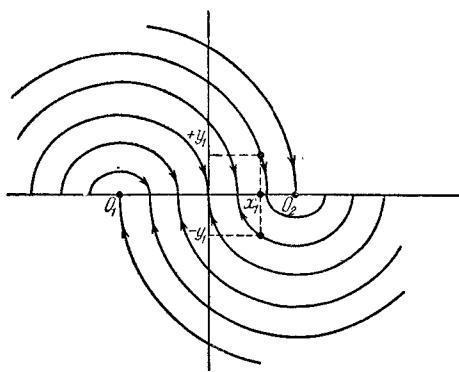


Рис. 119.

встряхиванию), то в конце концов наша система придет в область, непосредственно прилегающую (размеры этой области сколь угодно малы при достаточно малых толчках) к «истинному» положению равновесия.

Эти явления — наличие целой области положений равновесия (так называемый «застой») и приближение системы к истинному положению равновесия в результате толчков — наблюдаются в большей или

меньшей степени во всех измерительных и указательных приборах, в которых подвижная система испытывает сухое трение (например, трение в подшипниках). Застой представляет собой, конечно, вредное явление в измерительных приборах, и поэтому в них всегда стремится сделать трение в подшипниках и вообще сухое трение возможно малым. Ясно, что «жидкое» трение не может играть такой роли, так как оно влияет только на скорость установления подвижной системы, но не влияет на окончательное ее положение. Поэтому в некоторых системах измерительных и указательных приборов используется весьма остроумный прием, позволяющий «превратить» сухое трение в жидкое. Именно, оси сообщается постоянное движение взад и вперед вдоль подшипника. Тогда составляющая силы трения оси о подшипник *в направлении вращения* пропорциональна скорости вращения (если скорость достаточно мала), и прибор ведет себя как система, обладающая жидким, а не сухим трением.

§ 3. Ламповый генератор в случае Г-характеристики

Прием, которым мы воспользовались в предыдущем параграфе, не является, конечно, специфичным для диссипативных систем. Его можно применить в том случае, когда «силы трения» хотя и могут быть аппроксимированы разрывной характеристикой, но не подчиняются условию диссипативности. Мы рассмотрим сейчас при помощи этого же приема — замены нелинейного уравнения несколькими линейными с припасовыванием начальных условий — два примера, для которых не удовлетворяется условие диссипативности. Эти примеры имеют существенное значение; они позволяют нам подойти к теории периодических процессов в нелинейных системах. В качестве первого примера рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода и индуктивной обратной связью (рис. 120).

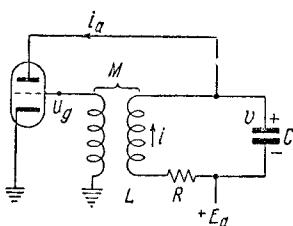


Рис. 120.

Пренебрегая сеточными токами и анодной реакцией и применяя обозначения, указанные на рисунке, мы можем, исходя из законов Кирхгофа, написать следующие дифференциальные уравнения для колебаний в рассматриваемом ламповом генераторе:

$$Ri = -v - L \frac{di}{dt}, \quad i = i_a + C \frac{dv}{dt},$$

или после исключения v :

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a. \quad (3.15)$$