

меньшей степени во всех измерительных и указательных приборах, в которых подвижная система испытывает сухое трение (например, трение в подшипниках). Застой представляет собой, конечно, вредное явление в измерительных приборах, и поэтому в них всегда стремится сделать трение в подшипниках и вообще сухое трение возможно малым. Ясно, что «жидкое» трение не может играть такой роли, так как оно влияет только на скорость установления подвижной системы, но не влияет на окончательное ее положение. Поэтому в некоторых системах измерительных и указательных приборов используется весьма остроумный прием, позволяющий «превратить» сухое трение в жидкое. Именно, оси сообщается постоянное движение взад и вперед вдоль подшипника. Тогда составляющая силы трения оси о подшипник *в направлении вращения* пропорциональна скорости вращения (если скорость достаточно мала), и прибор ведет себя как система, обладающая жидким, а не сухим трением.

§ 3. Ламповый генератор в случае Г-характеристики

Прием, которым мы воспользовались в предыдущем параграфе, не является, конечно, специфичным для диссипативных систем. Его можно применить в том случае, когда «силы трения» хотя и могут быть аппроксимированы разрывной характеристикой, но не подчиняются условию диссипативности. Мы рассмотрим сейчас при помощи этого же приема — замены нелинейного уравнения несколькими линейными с припасовыванием начальных условий — два примера, для которых не удовлетворяется условие диссипативности. Эти примеры имеют существенное значение; они позволяют нам подойти к теории периодических процессов в нелинейных системах. В качестве первого примера рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода и индуктивной обратной связью (рис. 120).

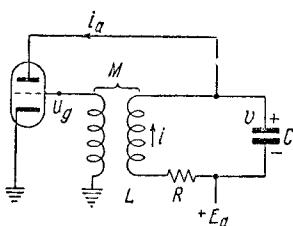


Рис. 120.

Пренебрегая сеточными токами и анодной реакцией и применяя обозначения, указанные на рисунке, мы можем, исходя из законов Кирхгофа, написать следующие дифференциальные уравнения для колебаний в рассматриваемом ламповом генераторе:

$$Ri = -v - L \frac{di}{dt}, \quad i = i_a + C \frac{dv}{dt},$$

или после исключения v :

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a. \quad (3.15)$$

Здесь $i_a = i_a(u_g)$ — анодный ток, зависящий, как мы предположили, только от напряжения на сетке лампы

$$u_g = -M \frac{di}{dt}. \quad (3.16)$$

Предположим, что характеристика лампы $i_a = i_a(u_g)$ имеет ток насыщения (равный I_s) и большую крутизну восходящего участка и что рабочая точка лежит на этом восходящем участке характеристики. Такая характеристика лампы изображена на рис. 121 пунктирной линией. Если амплитуда колебаний напряжения на сетке лампы настолько велика, что большую часть времени анодный ток i_a равен либо нулю (лампа заперта), либо току насыщения I_s , то мы можем достаточно хорошо отобразить свойства такой лампы идеализированной Г-характеристикой, изображенной на том же рис. 121 сплошной линией:

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{при } u_g < 0, \\ I_s & \text{при } u_g > 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

(мы будем считать, что при $u_g = 0$ $i_a = i_a^0$). Как мы увидим дальше, амплитуда колебаний сеточного напряжения будет тем больше, чем при прочих равных условиях меньше затухание контура. Отсюда можно заключить, что наша идеализация характеристики лампы (так называемая Г-характеристика) в случае достаточно малого затухания контура и достаточно сильной обратной связи может привести к результатам, имеющим определенный физический интерес.

Выберем такое расположение катушек, чтобы коэффициент взаимоиндукции $M < 0$ (как увидим ниже, в этом случае генератор будет совершать автоколебания); тогда уравнение для тока в колебательном контуре генератора, уравнение (3.15), может быть приведено к виду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{x} < 0, \\ \omega_0^2 & \text{при } \dot{x} > 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

где

$$x = \frac{i}{I_s}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad 2h = \frac{R}{L}.$$

Уравнение (3.18) (равно как и (3.17)) имеет разрывную правую часть, так как анодный ток меняется скачком при проходе \dot{x} или u_g через нуль. Вследствие этого мы должны дополнительно к уравнению

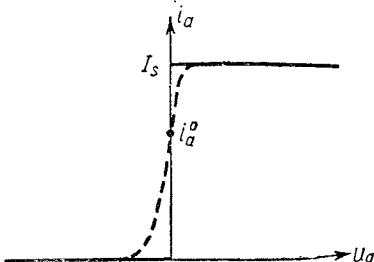


Рис. 121.

нию (3.18) определить, как ведет себя система при прохождении \dot{x} через нуль. Исходя из физически ясного требования ограниченности напряжений и токов в схеме, мы можем утверждать, что x и \dot{x} *непрерывны* всюду и, в частности, при $\dot{x} = 0^1$). Поэтому, как и в предыдущем случае, мы будем рассматривать два движения, подчиняющихся двум различным дифференциальным уравнениям, и будем «припасовывать» начальные условия нового движения к тому конечному состоянию, в которое привело систему предшествующее движение.

Каждое из уравнений (3.18) определяет затухающее «полуколебание» (мы будем предполагать, что затухание мало). Из этих двух «полуколебаний» только одно происходит относительно смещенного положения равновесия, именно то, для которого $\frac{dx}{dt} > 0$. Положение равновесия для этого «полуколебания» смещается на единицу в сторону, *противоположную* той, в которую смещалось состояние равновесия для соответствующего «полуколебания» в случае твердого трения. Нетрудно сообразить, что это обстоятельство при достаточно малых начальных отклонениях и достаточно малом линейном затухании приводит к последовательному увеличению размахов колебаний, а не к их уменьшению, как было в случае сухого трения. Такое нарастающее колебание, состоящее из двух «затухающих полусинусоид», из которых одна смещена в направлении оси ординат на единицу, изображено на рис. 122.

Однако легко убедиться, что это нарастание колебаний не будет продолжаться бесконечно и что в системе установятся незатухающие колебания с некоторой постоянной «амплитудой», так как при больших размахах колебаний будет происходить их последовательное уменьшение.

Этот процесс установления периодических колебаний в ламповом генераторе мы можем проследить, рассматривая фазовые траектории на фазовой плоскости x, y ($y = \dot{x}$). Мы не будем предполагать, что сопротивление R колебательного контура достаточно мало (но оно во всяком случае таково, что $h < \omega_0$). Ясно, что фазовые траектории в нижней полуплоскости ($y < 0$) совпадают с фазовыми траекториями

¹⁾ Действительно, если бы x (или ток i) изменялись скачком, то были бы бесконечно большие э. д. с. индукции и напряжение на сетке, которые пропорциональны $\frac{di}{dt}$. Это невозможно, следовательно, x — непрерывная функция времени. Точно также невозможны скачки напряжения на конденсаторе v , ибо иначе были бы бесконечные токи и напряжения в контуре. Но $L \frac{di}{dt} = -v - R i$, поэтому непрерывным будет и $\frac{di}{dt}$ (или \dot{x}) в силу непрерывности v и i . Это условие непрерывности можно получить и путем предельного перехода в задаче о ламповом генераторе с непрерывной характеристикой лампы, когда эта характеристика стремится к Γ -характеристике.

(спиралями) затухающего линейного осциллятора (гл. I, § 4), а в верхней ($y > 0$) — с такими же траекториями, но для случая осциллятора со смещенным в точку $(1,0)$ состоянием равновесия. Из этих «полу-

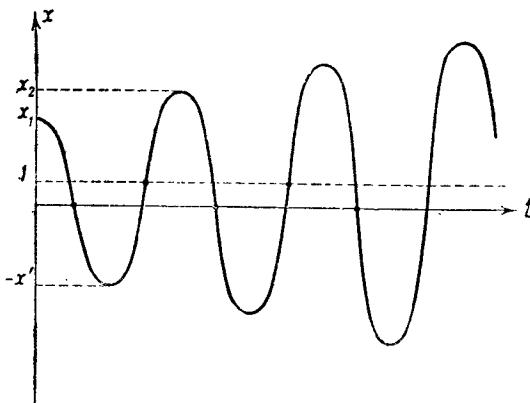


Рис. 122.

витков» спиралей и образуются целые фазовые траектории, являющиеся *непрерывными* кривыми (как мы только что разбирали, x и $y = \dot{x}$ должны быть непрерывными функциями времени t , и, в частности, в те моменты, когда $y = 0$).

Единственным состоянием равновесия и, очевидно, неустойчивым, является точка $(x_0, 0)$, где $x_0 = \frac{i_a^0}{I_s}$ ¹⁾.

Общий вид фазовой плоскости лампового генератора с Γ -характеристикой изображен на рис. 123.

Покажем, что на фазовой плоскости существует замкнутая фазовая траектория (так называемый *пределный цикл*), к которой асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются все остальные фазовые траектории (а это как раз и означает, что в рассматриваемой схеме при любых начальных условиях будут устанавливаться незатухающие, периодические колебания). С этой целью рассмотрим произвольную фазовую траекторию, выходящую на нижнюю полуплоскость в некоторой точке x_1

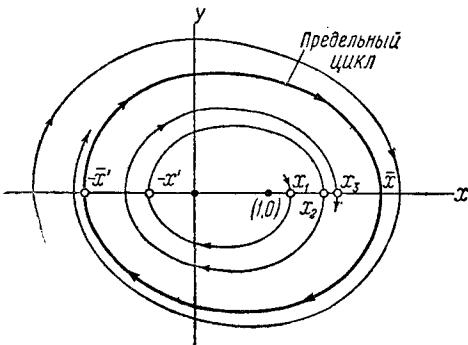


Рис. 123.

¹⁾ Напомним, что мы полагаем анодный ток *однозначной* функцией сеточного напряжения. В частности, при $v_g = 0$, что имеет место в состоянии равновесия, $i_\omega = i_a^0$.

полуоси положительных x (рис. 123). Пройдя нижнюю полуплоскость, она пересечет полуось отрицательных x (обозначим абсциссу этой точки пересечения через $-x'$), выйдет на верхнюю полуплоскость и затем вернется обратно на полуось положительных x (абсциссу этой в горой, последующей точки пересечения обозначим через x_2 ; очевидно, x_1, x' и $x_2 > 0$).

Найдем связь между первой и второй точками пересечения рассматриваемой произвольной фазовой траектории с полуосью положительных x — связь между x_1 и x_2 . Так как в нижней полуплоскости эта траектория является «полувитком» спирали для осциллятора с затуханием и с состоянием равновесия в точке $(0, 0)$, то согласно (1.31)

$$x' = x_1 e^{-\frac{d}{2}},$$

где $d = hT = \frac{2\pi h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}$ — логарифмический декремент затухания контура генератора. В верхней полуплоскости эта траектория является также «полувитком» такой же спирали, но для осциллятора с состоянием равновесия, смещенным на единицу вправо, т. е. в точку $(1, 0)$. Поэтому согласно тому же соотношению

$$x_2 - 1 = (x' + 1) e^{-\frac{d}{2}},$$

так как $x' + 1$ и $x_2 - 1$ — расстояния начальной и конечной точек «полувитка» от «состояния равновесия» $(1, 0)$. Исключая x' , получим:

$$x_2 = 1 + e^{-\frac{d}{2}} + x_1 e^{-d}. \quad (3.19)$$

Эта функция, определяющая по заданной точке пересечения фазовой траектории с полуосью положительных x последующую точку пересечения, называется *функцией последования*. Она определяет некоторое *точечное преобразование полупрямой* (полуоси положительных x) самой в себя, устанавливая определенное взаимно-однозначное и непрерывное соответствие точек x_1 этой полупрямой с точками x_2 той же полупрямой.

Неподвижная точка этого точечного преобразования — точка, преобразующаяся сама в себя (для нее $x_1 = x_2$), очевидно, является точкой пересечения *замкнутой* фазовой траектории с полуосью положительных x . Подставляя в (3.19) $x_1 = \bar{x}$, $x_2 = \bar{x}$, получим для неподвижной точки:

$$\bar{x} = 1 + e^{-\frac{d}{2}} + \bar{x} e^{-d},$$

или

$$\bar{x} = \frac{1 + e^{-\frac{d}{2}}}{1 - e^{-d}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{d}{2}}} > 1. \quad (3.20)$$

Таким образом, рассматривая точечное преобразование полуоси положительных x самой в себя, осуществляющееся фазовыми траекториями и выражаемое функцией последования (3.19), мы доказали, что на фазовой плоскости лампового генератора имеется единственная замкнутая фазовая траектория, соответствующая периодическим, незатухающим колебаниям в генераторе. Однако, для того чтобы утверждать, что эти незатухающие колебания действительно могут происходить и что наши высказывания о наличии периодического режима имели физическое значение, нам следует ответить еще на два вопроса. Во-первых, на вопрос о том, при каких начальных условиях устанавливается найденное нами периодическое решение, в частности установится ли оно, если начальные значения x и \dot{x} будут достаточно малы. Во-вторых, на вопрос о том, *устойчиво ли* найденное периодическое движение по отношению к произвольным малым изменениям начальных условий, например по отношению к изменениям максимального значения силы тока. На оба эти вопросы мы легко сможем ответить, рассматривая график функции последования (3.19) — так называемую «диаграмму Ламеря» (рис. 124). Очевидно, графиком функции последования (3.19) является прямая линия с угловым коэффициентом $0 < e^{-d} < 1$, отсекающая на оси ординат положительный отрезок $1 + e^{-\frac{d}{2}}$.

Неподвижная точка \bar{x} , по определению, должна лежать на прямой $x_1 = x_2$ и, следовательно, является точкой пересечения этой

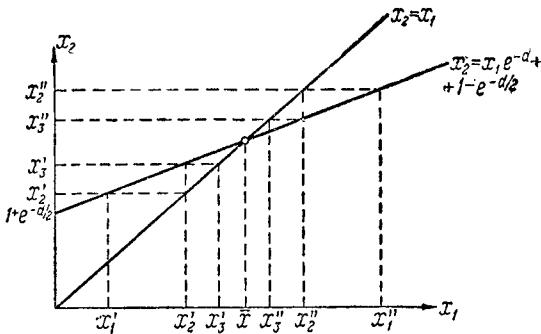


Рис. 124.

прямой с графиком функции последования (из рис. 124 еще раз следует существование и единственность неподвижной точки).

Возьмем какую-либо фазовую траекторию, отличную от замкнутой, и рассмотрим последовательность точек ее пересечения с полуосью $y = 0$, $x > 0$ — последовательность точек x_1, x_2, x_3, \dots (рис. 123). В этой последовательности точек каждая последующая точка определяется по предыдущей функцией последования (3.19), и, пользуясь построением, приведенным на рис. 124, можно определить по заданной

первой точке x_1 все последующие x_2, x_3, x_4, \dots Такое построение (так называемая «лестница Ламерея») на рис. 124 проведено для двух последовательностей точек, для одной из которых начальная точка $x_1 < \bar{x}$, а для другой $x_1' > \bar{x}$. Как видно из рис. 124, точки обеих последовательностей x_1, x_2, x_3, \dots и x_1', x_2', x_3', \dots приближаются к неподвижной точке \bar{x} ¹⁾. Это, очевидно, означает, что фазовые траектории, идущие как вне, так и внутри замкнутой фазовой траектории, асимптотически приближаются (при $t \rightarrow \infty$) к последней. Такую изолированную замкнутую фазовую траекторию, к которой стремятся все соседние и которая соответствует периодическому режиму в системе, мы будем называть *пределным циклом*.

Таким образом, полученные результаты дают право ответить сразу на оба интересующих нас вопроса. Действительно, во-первых, каковы были начальные условия, в системе устанавливаются незатухающие колебания и, во-вторых, эти незатухающие колебания устойчивы²⁾, так как отклонения (в обе стороны) от стационарного режима затухают. Таким образом, мы видим, что в данном случае, несмотря на наличие трения, в нашей системе устанавливаются и поддерживаются незатухающие колебания за счет сил, зависящих от состояния движения самой системы, причем «амплитуда» этих колебаний определяется свойствами системы, а не начальными условиями. Такие колебания мы будем называть *автоколебаниями*, а системы, в которых возможны автоколебания, — *автоколебательными системами*³⁾.

Амплитуда автоколебаний⁴⁾ для безразмерной величины x равна

$$x^* = \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}') = \frac{1}{2}\bar{x}(1 + e^{-d/2}) = \frac{1}{2}\frac{1 + e^{-d/2}}{1 - e^{-d/2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{d}{4},$$

или для тока в колебательном контуре

$$I = I_s \cdot x^* = \frac{I_s}{2} \operatorname{cth}\frac{d}{4}. \quad (3.21)$$

¹⁾ Нетрудно показать и аналитически, что последовательность x_1, x_2, x_3, \dots при любых x_1 имеет своей предельной точкой неподвижную точку преобразования \bar{x} , т. е. что $x_n \rightarrow \bar{x}$ при $n \rightarrow \infty$ и любых x_1 . Действительно, как нетрудно видеть,

$$x_n = \frac{1 - e^{-(n-1)d}}{1 - e^{-d/2}} + x_1 e^{-(n-1)d}$$

и, следовательно, $x_n \rightarrow \frac{1}{1 - e^{-d/2}} = \bar{x}$ при $n \rightarrow \infty$ и любых x_1 . Это также следует и из теоремы Кенигса, которая будет подробно рассмотрена в § 7 гл. V.

²⁾ Можно легко показать, что рассматриваемое периодическое движение устойчиво в смысле Ляпунова. Рассуждения в тексте доказывают лишь абсолютную орбитную устойчивость рассматриваемого движения. В дальнейшем мы подробно остановимся на исследовании устойчивости периодических движений в неконсервативных системах (см. § 6 гл. V).

³⁾ В гл. V мы дадим (для случая одной степени свободы) математическое определение понятий «автоколебание», «автоколебательная система».

⁴⁾ Под амплитудой (периодических) колебаний какой-либо величины мы будем понимать половину разности максимального и минимального значений этой величины.

Она тем больше, чем меньше затухание колебательного контура.

При $d \ll 1$, разлагая $e^{-\frac{d}{2}}$ в степенной ряд и ограничиваясь главными членами, получим следующее приближенное выражение для амплитуды установившихся колебаний тока в колебательном контуре:

$$I = \frac{2I_s}{d}.$$

Период этих стационарных колебаний в рассматриваемом случае совпадает с «периодом» затухающих колебаний линейного осциллятора. Но это справедливо только для рассматриваемого частного случая. В дальнейшем мы увидим, что, вообще говоря, период автоколебаний вовсе не совпадает с «периодом» затухающих колебаний линейного контура, входящего в состав автоколебательной системы.

Энергия, необходимая для поддержания незатухающих колебаний в контуре, доставляется анодной батареей. Легко видеть, что эта компенсирующая потеря энергия поступает из анодной батареи не все время, а только в течение полупериода за каждый период, именно того полупериода, в течение которого течет анодный ток (рассечение же энергии в колебательном контуре происходит, конечно, все время, так как контур обладает постоянным сопротивлением R)¹⁾. Так как батарея дает ток только в течение полупериода, то средняя мощность, отдаваемая батареей, имеет значение

$$W_A = \frac{I_s E_a}{2},$$

где E_a — напряжение, даваемое батареей. Так как i как функция времени нам известна, то можно подсчитать мощность, развиваемую в колебательном контуре, подставляя в интеграл $\int R i^2 dt$ выражение для i для первой и второй половин периода. Однако, как будет показано ниже, при достаточно малых затуханиях колебания в контуре близки к синусоидальным. Ограничиваюсь этим случаем, мы можем для подсчета мощности, рассеиваемой в контуре, считать колебания синусоидальными с амплитудой $\frac{2I_s}{d}$. Но в таком случае можно принять с достаточной степенью точности, что переменное напряжение на контуре $V \approx I \cdot \omega L$, а средняя за период рассеиваемая в контуре мощность

$$W = \frac{RI^2}{2} = \frac{RI}{2} \cdot \frac{2I_s}{d} = \frac{R II_s}{\pi R} = \frac{I_s \omega L I}{\pi} = \frac{VI_s}{\pi},$$

¹⁾ Конечно, за исключением тех моментов времени, для которых ток в колебательном контуре равен нулю,

и, наконец, к. п. д. генератора

$$\eta = \frac{W}{W_A} = \frac{I_s V}{\pi} \cdot \frac{2}{I_s E_a} = \frac{2}{\pi} \frac{V_A}{E_a}.$$

Ясно, что переменное напряжение на контуре V должно быть меньше анодного напряжения батареи E_a , так как в противном случае в некоторые моменты напряжение на аноде падало бы до нуля и даже становилось отрицательным, а тогда лампа не вела бы себя так, как мы предполагали, и наша идеализация характеристики в таком случае не была бы применима.

Следовательно, к. п. д. генератора при сделанных нами предположениях не может превышать $\frac{2}{\pi}$, т. е. $64\%_0$ ¹⁾.

Остальная часть мощности, отдаваемой батареей, как легко сообразить, расходуется на аноде лампы в виде тепла.

Исследуем более подробно характер того периодического процесса, который, как мы обнаружили, может происходить в ламповом генераторе.

С этой целью найдем разложение

функции, изображающей зависимость силы тока от времени для этого периодического процесса, в ряд Фурье. В частности, это разложение даст нам возможность показать (о чем у нас уже шла речь), что при достаточно малом затухании рассматриваемый периодический процесс будет как угодно близок к синусоидальному.

Функция, изображающая этот периодический процесс с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (рис. 125), может быть записана следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi h}{\omega}}} e^{-ht} \frac{\cos(\omega t - \vartheta)}{\cos \vartheta} && \text{при } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}, \\ x &= -\frac{e^{\frac{\pi h}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi h}{\omega}}} e^{-ht} \frac{\cos(\omega t - \vartheta)}{\cos \vartheta} && \text{при } \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

где

$$\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{h}{\omega}.$$

¹⁾ Коэффициент полезного действия генератора может быть выше $64\%_0$, если рабочая точка на характеристике смешена влево, т. е. если анодный ток появляется не при нулевом, а при каком-то положительном напряжении на сетке.

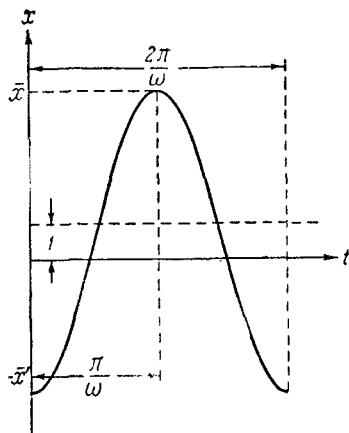


Рис. 125.

Здесь константы интегрирования подобраны так, чтобы получилось найденное непрерывно дифференцируемое периодическое решение, т. е. чтобы $x(0) = x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = -\bar{x}$, при $t = \frac{\pi}{\omega}$ для обоих выражений $x = \bar{x}$, $\dot{x}(0) = \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \dot{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0$, причем $\dot{x} > 0$ для $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ и $\dot{x} < 0$ для $\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$. Воспользовавшись выражениями (3.22), можно найти по известным формулам разложение $x(t)$ в ряд Фурье. Однако это разложение можно найти в рассматриваемом случае совершенно иным путем, не зная наперед аналитического выражения $x(t)$. Мы используем этот второй путь, который, допуская простую физическую интерпретацию, приводит к менее громоздким выкладкам. Именно, мы можем рассуждать следующим образом. Исследуя поведение изображающей точки на фазовой плоскости, мы убедились, что в течение промежутка времени от 0 до $\frac{\pi}{\omega}$ ($x(0) < 0$, $\dot{x}(0) = 0$) величина $\dot{x} > 0$, а в промежутке от $\frac{\pi}{\omega}$ до $\frac{2\pi}{\omega}$ величина $\dot{x} < 0$, и т. д. Это справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося процесса. Но если это так, то мы можем утверждать, что функция $i_a = i_a(u_g)$ в уравнении (3.15) есть периодическая функция времени с периодом T . Вид этой функции для рассматриваемого нами случая Γ -характеристики таков, что нашим утверждением однозначно определяется значение функции $i_a = F(t)$ в любой момент времени. Именно, $i_a = F(t)$

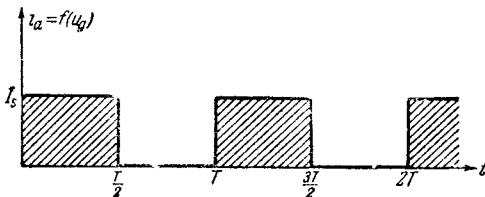


Рис. 126.

представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов (рис. 126), причем в течение одного полупериода, когда $u_g > 0$, $i_a(u_g) = I_s$, а в течение другого полупериода, когда $u_g < 0$, $i_a(u_g) = 0$. Другими словами, хотя i_a и является функцией u_g , т. е. в конечном счете функцией силы тока в колебательном контуре, но он зависит от нее только в том смысле, что период функции $F(t)$ определяется свойствами системы, а форма (или, иначе, амплитуды членов ряда Фурье, представляющего эту периодическую функцию) не зависит от характера движений в системе. Мы можем поэтому рассматривать функцию

$$f_1(\dot{x}) = \frac{i_a(-M\dot{x})}{I_s} = \frac{i_a(u_g)}{I_s} \quad \text{в уравнении} \\ \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f_1(\dot{x}) \quad (3.23)$$

не как функцию \dot{x} , а как некую действующую на линейный

колебательный контур периодическую, заданную как функцию времени «внешнюю силу» $f(t)$, частота которой, однако, не является произвольной, а совпадает с «условной частотой» затухающих колебаний в системе, т. е. с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$. Свойства системы таковы, что она приспосабливает «внешнюю силу» к своему периоду, как бы «рубит» эту силу на части, совпадающие с периодом системы. Таким образом, задача сводится к исследованию действия внешней силы на колебательную систему. В рассматриваемом случае мы можем, следовательно, амплитуды основного тона и обертонов изучаемого периодического процесса определять так же, как в задаче о вынужденных колебаниях, если вынуждающая периодическая «внешняя сила» $f(t)$ задана (на протяжении одного периода) следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Разлагаем эту функцию в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\omega t. \quad (3.24)$$

Так как здесь мы имеем дело с линейной задачей, для которой соблюдается принцип суперпозиции, то полное решение для «вынужденных» колебаний можно искать как сумму «вынужденных» решений, обусловленных отдельными членами ряда (3.24), т. е. искать «вынужденное» периодическое решение в виде:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t). \quad (3.25)$$

В таком случае

$$\dot{x} = \sum_{s=1}^{\infty} (-a_s s\omega \sin s\omega t + b_s s\omega \cos s\omega t),$$

$$\ddot{x} = \sum_{s=1}^{\infty} (-a_s s^2 \omega^2 \cos s\omega t - b_s s^2 \omega^2 \sin s\omega t).$$

Подставляя значения x , \dot{x} и \ddot{x} в уравнение (3.23) и приравнивая нулю коэффициенты при косинусах и синусах, найдем, что все коэффициенты Фурье с четными номерами равны нулю (кроме $a_0 = 1$), а

коэффициенты Фурье с *нечетными* номерами определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} -\omega^2 s^2 a_s + 2h\omega s b_s + \omega_0^2 a_s &= 0, \\ -\omega^2 s^2 b_s - 2h\omega s a_s + \omega_0^2 b_s &= \frac{2\omega_0^2}{\pi s}, \end{aligned}$$

где $s = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Решая эти уравнения, находим интересующие нас выражения для нечетных коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= -\frac{2\omega_0^2}{\pi(2k+1)} \frac{2h\omega(2k+1)}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2}, \\ b_{2k+1} &= \frac{2\omega_0^2}{\pi(2k+1)} \frac{\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2}, \end{aligned}$$

и для квадратов амплитуд соответствующих гармоник:

$$\begin{aligned} R_{2k+1}^2 &= a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2 = \\ &= \frac{4\omega_0^4}{\pi^2(2k+1)^2} \frac{1}{[\omega_0^2 - \omega^2(2k+1)^2]^2 + 4h^2\omega^2(2k+1)^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Мерой несинусоидальности периодической функции $x(t)$, т. е. количественной характеристикой отклонения ее формы от синусоиды, служит *клирфактор* χ , определяемый выражением¹⁾

$$\chi^2 = \frac{\sum_{s=2}^{\infty} (a_s^2 + b_s^2)}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Оценим величину клирфактора при малых h . Формулы (3.26) представляют собой результат применения обычной теории линейного резонанса к рассматриваемому случаю. Основной «резонансный» тон внешней силы порождает основной тон $x(t)$, причем квадрат амплитуды этого тона $a_1^2 + b_1^2$, как нетрудно убедиться, неограниченно растет при $h \rightarrow 0$. Остальные члены разложения внешней силы имеют частоты, далекие от резонанса, и поэтому они порождают движение, для которого интересующая нас сумма квадратов коэффициентов ряда Фурье при $h \rightarrow 0$ стремится к конечному положительному пределу (этот предел соответствует случаю действия нерезонансных членов на гармонический осциллятор без трения).

Отсюда ясно, что при достаточно малом h периодическое движение в генераторе с Г-характеристикой имеет сколь угодно малый клирфактор или, иначе говоря, что в этом случае автоколебания сколь угодно близки по форме к синусоидальным.

¹⁾ Заметим, что в рассматриваемом случае можно найти точное выражение для клирфактора в конечном виде.

Мы пользовались в вышеприведенных рассуждениях представлениями обычной теории резонанса.

Известно, что благодаря явлению резонанса сильно несинусоидальная внешняя сила при наличии линейного затухания может поддерживать в гармоническом осцилляторе колебания, весьма близкие (в смысле близости периода и малости квирфактора) к одному из его собственных (и, следовательно, синусоидальных) колебаний. Мы можем поэтому сказать, что в задаче о генераторе с Γ -характеристикой при достаточно малом h мы имеем дело с *авторезонансом*, т. е. с резонансом под действием силы, порождаемой движением самой системы¹⁾.

Заметим, что в данном частном случае благодаря особым свойствам характеристики мы смогли бы, исходя из теории вынужденных колебаний, решить задачу не только об установленном режиме, но и о процессе установления автоколебаний при любых начальных условиях.

Если бы мы рассматривали ту же ламповую схему, но с «перевернутой» обратной связью, т. е. при $M > 0$, то мы получили бы результат, сходный с полученным в предыдущем параграфе. Действие лампы с Γ -характеристикой было бы эквивалентно (при колебаниях) некоторому кулоновскому трению в соответствующей механической задаче. Конечно, в этом случае автоколебания были бы невозможны и колебания были бы затухающими.

В рассмотренной нами системе периодический процесс, если он существует (это будет при $M < 0$), устанавливается при любых начальных условиях, т. е. имеет место самовозбуждение автоколебаний. Такой режим автоколебательных систем называется *мягким режимом* в отличие от *жесткого режима*, при котором для установления периодических колебаний необходим начальный толчок конечной величины. Иначе говоря, при жестком режиме автоколебательная система имеет и устойчивое периодическое движение и устойчивое равновесное состояние, и установление того или другого зависит от того, какие начальные условия были заданы.

В ламповом генераторе с Γ -характеристикой «мягкость» режима была обусловлена тем, что характеристика лампы не смешена, т. е. что вертикальная часть характеристики проходит через точку $u_g = 0$. В случае же смешенной характеристики для лампового генератора также получается жесткий режим. Смешенная Γ -характеристика может служить удовлетворительной идеализацией для того случая, когда, во-первых, переменные напряжения на сетке далеко превосходят напряжение насыщения лампы и, во-вторых, рабочая точка смешена либо в область тока насыщения, либо в область, где анодный ток равен нулю. В случае смешенной Γ -характеристики поведение лампо-

¹⁾ В дальнейшем изложении мы еще вернемся к теории авторезонанса.

вого генератора будет определяться уравнениями такого же вида, как и при отсутствии смещения:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \text{ при } \dot{x} > b, \\ \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ при } \dot{x} < b, \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

причем для случая смещения, изображенного на рис. 127, величина $b > 0$ (затухание мы по-прежнему считаем малым). Разница заключается в том, что в этом случае «смена уравнений» происходит не при $\dot{x} = 0$, а при $\dot{x} = b$. В соответствии с этим должно быть изменено все наше рассмотрение, и в частности, изменится картина на фазовой плоскости (рис. 128). Фазовую плоскость мы должны «разрезать» не по прямой $y = 0$ (т. е. по оси x), как в случае отсутствия смещения), а по прямой $y = b$, и верхнюю часть полуплоскости сместить на единицу вправо. Из соображений непрерывности и в этом случае вытекает необходимость существования одной замкнутой траектории состоящей из двух «полуспиралей». К этой траектории стремятся все другие траектории, кроме тех, которые лежат внутри заштрихованной

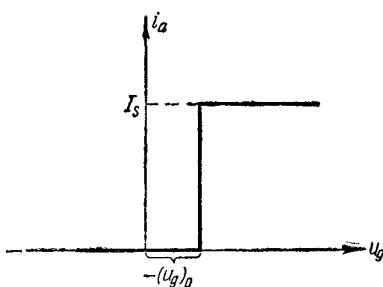


Рис. 127.

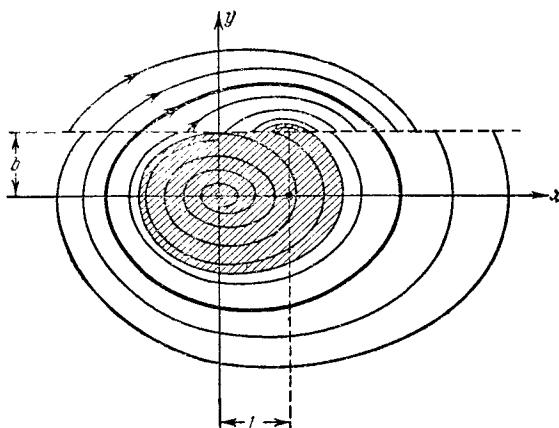


Рис. 128.

области, образованной «предельной спиралью» и прямой $y = b$. Из всех начальных состояний, лежащих внутри этой области, система стремится к состоянию равновесия, которое является, следовательно,

устойчивым (устойчивый фокус). Из картины на фазовой плоскости со всей очевидностью следует, что в генераторе установится периодический процесс только в том случае, когда в начальный момент напряжение или сила тока в контуре достаточно велики¹⁾.

§ 4. Теория часов. Модели с ударами

Часы представляют собой, как известно, такую колебательную систему, которая способна совершать колебания со стационарной амплитудой, не зависящей от начальных условий. Правда, для того чтобы часы пошли, т. е. чтобы эта стационарная амплитуда установилась, обычно нужен некоторый достаточно большой начальный толчок, но амплитуда установившихся колебаний сама по себе не зависит от величины начального толчка (иначе говоря, в большинстве часов имеет место жесткий режим возбуждения автоколебаний). Если начальный толчок слишком мал, то периодический процесс вообще не установится, колебания затухнут. Эта область начальных значений, из которой система стремится к состоянию равновесия, а не к состоянию периодического движения, в разных часах может быть разной величины и зависит от устройства часов, но, как правило, существует во всяких часах. Эти характерные черты часового механизма мы и попытаемся объяснить, рассматривая возможно более простые, идеализированные модели часов.

Всякий часовой механизм грубо может быть разделен на три основных части: 1) колебательная система, например маятник, балансир, горизонтальный маятник и т. д.; 2) заводной механизм — гиря, пружина и, наконец, 3) спусковой механизм, связывающий колебательное устройство с заводным механизмом. Эта связь заключается в следующем: при определенных положениях колебательной системы (в дальнейшем мы будем для краткости говорить о маятнике) приходит в действие спусковой механизм, сообщающий маятнику за счет энергии заводного механизма некоторый импульс. Длительность этого импульса в различных часах бывает различна, но в хороших часовых механизмах импульс бывает весьма кратковременным. Действует спусковой механизм обычно два раза за период и притом вблизи положения равновесия колебательной системы, т. е. в той области, где скорость системы наибольшая. Таково в общих чертах устройство всякого часового механизма. Для нас в устройстве часов наиболее существенно то, что момент, когда начинает действовать спусковой механизм, целиком определяется положением колебательной системы (например, спусковой механизм приходит в действие каждый раз, когда маятник проходит через положение равновесия). Кроме того, характер воздействия и величина импульса также зависят от состояния маятника. Следовательно, всякие силы, которые могут возникнуть в механизме,

¹⁾ Более подробно эта задача будет рассмотрена в § 4 гл. VIII.