

устойчивым (устойчивый фокус). Из картины на фазовой плоскости со всей очевидностью следует, что в генераторе установится периодический процесс только в том случае, когда в начальный момент напряжение или сила тока в контуре достаточно велики¹⁾.

§ 4. Теория часов. Модели с ударами

Часы представляют собой, как известно, такую колебательную систему, которая способна совершать колебания со стационарной амплитудой, не зависящей от начальных условий. Правда, для того чтобы часы пошли, т. е. чтобы эта стационарная амплитуда установилась, обычно нужен некоторый достаточно большой начальный толчок, но амплитуда установившихся колебаний сама по себе не зависит от величины начального толчка (иначе говоря, в большинстве часов имеет место жесткий режим возбуждения автоколебаний). Если начальный толчок слишком мал, то периодический процесс вообще не установится, колебания затухнут. Эта область начальных значений, из которой система стремится к состоянию равновесия, а не к состоянию периодического движения, в разных часах может быть разной величины и зависит от устройства часов, но, как правило, существует во всяких часах. Эти характерные черты часового механизма мы и попытаемся объяснить, рассматривая возможно более простые, идеализированные модели часов.

Всякий часовой механизм грубо может быть разделен на три основных части: 1) колебательная система, например маятник, балансир, горизонтальный маятник и т. д.; 2) заводной механизм — гиря, пружина и, наконец, 3) спусковой механизм, связывающий колебательное устройство с заводным механизмом. Эта связь заключается в следующем: при определенных положениях колебательной системы (в дальнейшем мы будем для краткости говорить о маятнике) приходит в действие спусковой механизм, сообщающий маятнику за счет энергии заводного механизма некоторый импульс. Длительность этого импульса в различных часах бывает различна, но в хороших часовых механизмах импульс бывает весьма кратковременным. Действует спусковой механизм обычно два раза за период и притом вблизи положения равновесия колебательной системы, т. е. в той области, где скорость системы наибольшая. Таково в общих чертах устройство всякого часового механизма. Для нас в устройстве часов наиболее существенно то, что момент, когда начинает действовать спусковой механизм, целиком определяется положением колебательной системы (например, спусковой механизм приходит в действие каждый раз, когда маятник проходит через положение равновесия). Кроме того, характер воздействия и величина импульса также зависят от состояния маятника. Следовательно, всякие силы, которые могут возникнуть в механизме,

¹⁾ Более подробно эта задача будет рассмотрена в § 4 гл. VIII.

зависят только от положений и скоростей отдельных частей системы, но не зависят явно от времени. Таким образом, часы — это *автономная* система.

Для теоретического рассмотрения работы часовых механизмов мы должны, как и во всех других случаях, сделать некоторые упрощающие предположения об устройстве часового механизма, которые, делая такое рассмотрение возможным, отображали бы в то же время основные свойства часового механизма. Простейшими теоретическими моделями часов являются модели с ударами, в которых используется представление о воздействии со стороны спускового механизма на колебательную систему часов в виде *мгновенных ударов*. Такие «ударные» модели часов мы и будем рассматривать в настоящем параграфе. Именно, мы будем предполагать, что колебательная система (балансир, маятник) в момент прохождения системы через положение равновесия испытывает со стороны спускового механизма мгновенные удары, приводящие к мгновенным увеличениям скорости колебательной системы. Что касается закона изменения скорости при ударе, то тут уместны два наиболее простых предположения. Во-первых, можно предположить, что при ударе скорость системы всегда увеличивается на одну и ту же величину, независимо от скорости системы до удара. Пусть, например, скорость до удара v_0 и после удара v_1 . Тогда наше предположение сводится к тому, что $v_1 - v_0 = \text{const}$ или что $mv_1 - mv_0 = \text{const}$; наше предположение сводится таким образом к предположению о постоянстве количества движения, сообщаемого спусковым механизмом колебательной системе. Другое простое предположение сводится к тому, что кинетическая энергия системы при ударе изменяется на одну и ту же величину независимо от скорости системы до удара. Это предположение

сводится к тому, что $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$. Наши предположения, конечно, не исчерпывают всех возможных типов удара и являются лишь простейшими допущениями. Однако, присматриваясь к устройству часового механизма, можно подметить некоторые обстоятельства, говорящие в пользу второго допущения. Именно, в случае гиревого заводного механизма гири при каждом ударе часов опускается на одно и то же расстояние, т. е. совершает одну и ту же работу. Поэтому вполне естественно второе предположение, что колебательная система получает одно и то же количество энергии¹⁾. В случае же первого предположения, поскольку энергия, сообщаемая механизму, существенно зависит от скорости системы, мы должны были бы сделать довольно искусственное допущение, что потери энергии в спусковом механизме изменяются в широких пределах, причем чем меньше скорость системы, тем больше потери энергии в спусковом механизме (так как чем меньше скорость системы до толчка, тем меньшую энергию она получает при

¹⁾ Это второе предположение и делается обычно в теории часов. См., например, [133].

толчке в случае первого предположения). Но все же первое предположение ($mv_1 - mv_0 = \text{const}$), хотя и кажется в силу этих соображений менее естественным, отнюдь не является невозможным, поэтому мы рассмотрим оба эти предположения, причем, как мы убедимся, они приводят в некоторых случаях к существенно различным результатам.

Помимо предположения о характере удара надо сделать известные предположения о характере силы трения в часовом механизме. Здесь мы также ограничимся двумя простейшими предположениями, которые мы уже применяли в других случаях. Во-первых, мы предположим, что величина силы трения пропорциональна скорости («линейное трение») и, во-вторых, что величина силы трения не зависит от скорости («постоянное трение»). Эти предположения также приведут нас к существенно различным результатам.

1. Часы в случае линейного трения. Мы начнем рассмотрение со случая «линейного трения» и удара с постоянным количеством движения, причем будем предполагать сначала, что спусковой механизм действует только один раз за период (удар, например, наносится при прохождении положения равновесия слева направо)¹⁾. Этот случай может быть исследован методом, аналогичным примененному для рассмотрения лампового генератора с Г-характеристикой. Действительно, если логарифмический декремент затухания системы d (затухание мы считаем малым), а приращение скорости, которое получает система при ударе, a , то при начальной скорости y_1 (мы считаем начальным момент, непосредственно следующий за ударом) скорость через период будет:

$$\left. \begin{aligned} &\text{непосредственно до удара } y' = y_1 e^{-d}, \\ &\text{» } \quad \text{после удара } y_2 = y_1 e^{-d} + a. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Для того чтобы процесс был периодическим, нужно, чтобы $y_2 = y_1 = \bar{y}$, где \bar{y} — стационарная амплитуда. Следовательно,

$$\bar{y} = \frac{a}{1 - e^{-d}}.$$

Стационарная амплитуда имеет всегда конечную величину, и a оказывается по сравнению с этой амплитудой тем меньше, чем меньше d . Рассуждениями, аналогичными тем, которые были приведены для лампового генератора, можно показать, что эта стационарная амплитуда устойчива и что при малом y_1 колебания будут нарастать.

В этом можно убедиться и непосредственно из выражения (3.28), связывающего две последующие амплитуды; действительно, при сколь угодно малом y_1 последующая амплитуда y_2 непременно будет больше y_1 .

¹⁾ Один удар за период имеет место, например, в спусковом устройстве, применяемом в хронометрах.

Следовательно, рассматриваемая нами модель часов обладает свойством самовозбуждения: колебания в ней нарастают при сколь угодно малых начальных отклонениях. Картина на фазовой плоскости для этого случая изображена на рис. 129. Фазовая плоскость заполнена кусками спиралей, начинающихся и кончающихся на верхней полуоси y . Дойдя по спирали до верхней полуоси y , представляющая точка делает скачок каждый раз на одну и ту же величину a вверх по оси y и снова продолжает движение по соответствующей спирали. Из соображений непрерывности ясно, что благодаря скачку путь представляющей точки по одной из спиралей окажется замкнутым, что и соответствует периодическому движению.

Таким образом, при сделанных предположениях мы получаем нужные свойства часового механизма в смысле наличия периодического процесса с амплитудой, не зависящей от начальных условий. Но наш идеализированный механизм обладает способностью самовозбуждения; при сколь угодно малом начальном толчке в конце концов часы будут совершать незатухающие колебания. Между тем в реальных часах всегда нужен некоторый начальный толчок конечной величины, для того чтобы часы пошли. Значит, наши предположения не дают возможности объяснить одно из наиболее типичных свойств часового механизма. К тому же результату мы придем, сохранив предположение о линейном трении и переходя к другому закону удара, именно, полагая, что

$$y^2 - y'^2 = h^2 = \text{const.}$$

В таком случае скорость будет:

$$\text{непосредственно до удара } y' = y_1 e^{-ad},$$

$$\Rightarrow \text{после удара } y_2 = \sqrt{y'^2 + h^2} = \sqrt{y_1^2 e^{-2ad} + h^2}.$$

Стационарная амплитуда \bar{y} определяется из условия

$$y_2 = y_1 = \bar{y} \quad \text{и} \quad \bar{y}^2 (1 - e^{-2ad}) = h^2 \quad \text{или} \quad \bar{y} = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-2ad}}}.$$

И в этом случае также, как легко видеть, будет иметь место самовозбуждение.

Картина на фазовой плоскости изменится по сравнению с картиной для предыдущего случая только в том смысле, что скачки a вдоль оси y будут уже не постоянны по величине, а будут функцией y' (т. е. скорости, которая предшествует удару):

$$a = \sqrt{y'^2 - h^2} - y'.$$

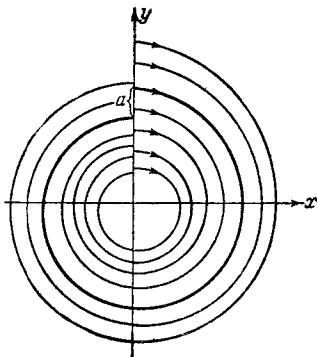


Рис. 129.

Значит, при возрастании предшествующей скорости скачки скорости будут убывать. Так как шаг спирали, т. е. разница между двумя последовательными значениями y , соответствующими значению $x = 0$, наоборот, возрастает при возрастании y , то опять-таки из соображений непрерывности ясно, что должна существовать такая спираль, движение которой будет замкнутым.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для того случая, когда спусковой механизм наносит удары колебательной системе

два раза за период, т. е. при каждом прохождении системы через положение равновесия¹⁾. При этом, конечно, каждый раз наносятся подталкивающие удары — удары в направлении движения. Картина на фазовой плоскости для этого случая изображена на рис. 130. Фазовые траектории состоят из «полувитков» спиралей затухающего осциллятора и имеют разрывы на оси y , соответствующие мгновенным ударам, наносимым колебательной системе часов со стороны спускового механизма.

Обозначим через v величины (абсолютные значения) скоростей, которыми обладает колебательная система часов *непосредственно после* ударов. Очевидно, скорость после каждого удара v_2 однозначно

определяется скоростью системы после предыдущего удара v_1 (рис. 130). Для двух примененных ранее предположений о законе удара мы получим следующие функции последования — функции, связывающие между собой v_1 и v_2 :

$$v_2 = v_1 e^{-\frac{d}{2}} + a, \quad (3.29)$$

если при ударе колебательной системе передается определенное (всегда одно и то же) количество движения, т. е. при ударе $\Delta(y) = a = \text{const}$, и

$$v_2^2 = v_1^2 e^{-d} + h^2, \quad (3.30)$$

если при каждом ударе кинетическая энергия системы увеличивается на одну и ту же величину: $\Delta(y^2) = h^2 = \text{const}$.

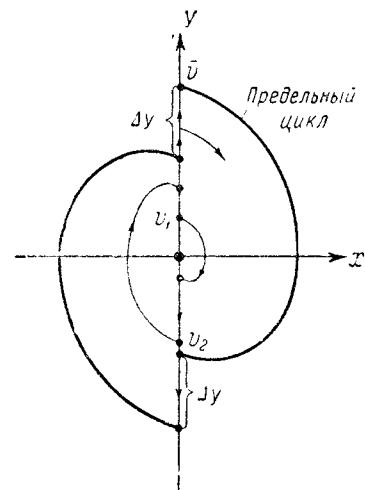


Рис. 130.

¹⁾ Два удара за период осуществляются в большинстве спусковых механизмов и, в частности, в «анкерном спуске», применяемом, например, в карманных часах.

В обоих случаях соответствующие точечные преобразования имеют единственную неподвижную точку

$$\bar{v} = \frac{a}{1 - e^{-d/2}}$$

при первом предположении относительно закона удара и

$$\bar{v} = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-d}}}$$

при втором, т. е. в обоих случаях система имеет единственное периодическое движение, которое, как нетрудно показать построением графиков функции последования, устойчиво и устанавливается при любых начальных условиях. Графики функций последования (диаграммы Ламерей) имеют вид, аналогичный рис. 124; во втором случае этот график следует строить не для v , а для v^2 .

Все рассмотренные нами модели часов с линейным трением объясняют наличие периодического процесса с определенной и не зависящей от начальных условий амплитудой автоколебаний, но все они дают мягкий режим, т. е. не объясняют необходимости начального толчка конечной величины для установления колебаний маятника или балансира часов.

Чтобы объяснить это свойство часов, нужно, как мы увидим ниже, отказаться от предположения о линейном трении и принять, что часы представляют собой автоколебательную систему с сухим трением.

2. Ламповый генератор с контуром в цепи сетки в случае г-характеристики. Мы рассматривали в теории часов удары, которые мгновенно изменяли количество движения и энергию системы. Аппарат, создававший эти удары, развивал бесконечно большую мощность, мгновенно отдавая определенные порции энергии. Естественен вопрос, применима ли такая идеализация при рассмотрении электрических колебательных систем. Покажем, что аналогичное положение вещей встречается и в электрических системах. Предположим, например, что в генераторе с колебательным контуром в цепи сетки (в дальнейших рассуждениях мы, как и обычно, пренебрегаем реакцией анода и се-точным током) устанавливаются настолько большие синусоидальные колебания, что напряжение на сетке далеко заходит как в область, где анодный ток нуль, так и в область насыщения. Но если в контуре происходит синусоидальный колебательный процесс, то напряжение на сетке v (рис. 131) дважды за период меняет знак. Когда v проходит через нуль в положительном направлении, анодный ток чрезвычайно быстро (т. е. в течение времени τ , очень малого по сравнению с периодом колебаний T) переходит от значения нуль к значению I_s . За время τ э. д. с. индукции $M \frac{di_a}{dt}$ очень быстро нарастает от значения нуль, которое она имела прежде (когда $i_a = 0$),

до некоторого очень большого значения, а затем, когда i_a становится равным I_s , примерно так же быстро спадает до нуля. Когда v проходит через нуль в отрицательном направлении, анодный ток чрезвычайно быстро изменяется от значения I_s до нуля. При этом э. д. с. индукции очень быстро изменяется от значения нуль до некоторого очень большого (по абсолютной величине) отрицательного значения, а затем снова очень быстро принимает значение нуль. Таким образом, на контур в этом случае действуют кратковременные э. д. с., достигаю-

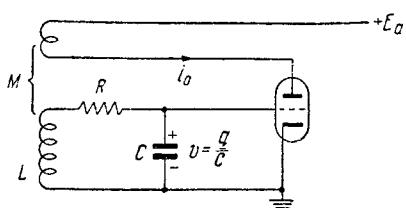


Рис. 131.

щие очень большой величины, и притом тем большей, чем круче изменяется анодный ток от нуля до I_s при увеличении v . Если мы примем, что этот переход происходит скачком (Г-характеристика), то нам придется иметь дело с мгновенной бесконечно большой э. д. с. Нетрудно видеть, что здесь мы имеем полную аналогию с рассмотренным нами случаем часов, когда на колеблющуюся массу действует в надлежащие моменты мгновенный импульс, сообщающий этой массе фиксированное количество движения.

В механике можно рассматривать действие силы $f(t)$, отличной от нуля в течение достаточно малого промежутка времени τ , как мгновенный удар, изменяющий скачком количество движения $m\dot{x}$ (речь идет о простейшем прямолинейном движении) на величину $\Delta(m\dot{x}) =$

$$= \int_t^{t+\tau} f(t) dt. \text{ Аналогично можно считать, что если э. д. с. индукции}$$

$\mathcal{E} = M \frac{di_a}{dt}$ отлична от нуля лишь в течение достаточно малого промежутка времени, то она вызывает быстрое, в пределе (при $\tau \rightarrow 0$) скачкообразное изменение потока индукции $L\dot{q}$ на величину

$$\Delta(L\dot{q}) = \int_t^{t+\tau} \mathcal{E} dt = \int_t^{t+\tau} M \frac{di_a}{dt} dt = M [i_a(t + \tau) - i_a(t)] = M \Delta i_a,$$

где t и $t + \tau$ — моменты начала и конца изменения анодного тока i_a . В момент скачка потока индукции сама координата q (заряд конденсатора) не меняется, так что скачок (так же как и удар в механическом случае) не нарушает непрерывности изменений координаты.

Для доказательства сформулированного закона скачка достаточно проинтегрировать уравнение лампового генератора с контуром в цепи сетки (1.62)

$$LC\ddot{v} + RC\dot{v} + v = M \frac{di_a}{dt}$$

по времени за интервал от t до $t + \tau$, в течение которого происходит изменение анодного тока от 0 до I_s (или от I_s до 0). Тогда получим:

$$LC[\dot{v}(t + \tau) - \dot{v}(t)] + RC[v(t + \tau) - v(t)] + \int_t^{t + \tau} v dt = \int_t^{t + \tau} M \frac{dI_a}{dt} dt.$$

При предельном переходе к Γ -характеристике интервал сеточных напряжений v , на котором происходит изменение анодного тока, стремится к нулю, т. е. $v(t + \tau) \rightarrow v(t)$, стремится к нулю и время τ , в течение которого этот интервал проходится системой. Поэтому

$$\int_t^{t + \tau} v dt \rightarrow 0$$

и

$$LC[\dot{v}(t + \tau) - \dot{v}(t)] \rightarrow \int_t^{t + \tau} M \frac{dI_a}{dt} dt = M \Delta I_a$$

или

$$\Delta(L\dot{q}) \rightarrow M \Delta I_a.$$

При переходе напряжения на сетке через нуль в положительном направлении ($q = 0$, $\dot{q} > 0$) $\Delta I_a = I_s$ и $\Delta(L\dot{q}) = MI_s$. Точно так же при переходе v через нуль в обратном направлении ($q = 0$, $\dot{q} < 0$) $\Delta(L\dot{q}) = -MI_s$. Тогда, как нетрудно видеть, поведение системы определяется следующими уравнениями:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (q \neq 0), \\ \Delta\dot{q} = \frac{M}{L} I_s \quad (q = 0, \dot{q} > 0), \\ \Delta\dot{q} = -\frac{M}{L} I_s \quad (q = 0, \dot{q} < 0) \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

и тем дополнительным условием, что q изменяется непрерывно. Таким образом, осциллограмма всякого движения системы будет состоять из дуг «затухающих синусоид»:

$$q = A e^{-h(t-t_0)} \cos [\omega(t-t_0) + \varphi],$$

начинающихся и кончающихся на оси времен. Между двумя соседними дугами существует в точке их смыкания (на оси t) разность наклонов, определенная условиями скачка.

Исследование системы (3.31) вполне аналогично исследованию, проведенному нами для часов в случае двух ударов за период, сообщающих постоянное количество движения.

3. Модель часов с кулоновским трением. Рассмотрим для объяснения жесткого режима возбуждения колебаний в часах ударную модель часов с сухим, кулоновским трением. Мы уже рассмотрели движение осциллятора с кулоновским трением (§ 3 гл. III). При надлежащем выборе единиц уравнение движения такого осциллятора имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = -f_0 \text{ при } \dot{x} > 0, \\ \ddot{x} + x = +f_0 \text{ при } \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

где f_0 — наибольшая сила трения покоя, деленная на коэффициент упругости пружины осциллятора. На фазовой плоскости, как мы уже видели, фазовые траектории будут спиралями, составленными из кусков полуэллипсов или в нашем случае (в силу выбора единиц) из кусков полуокружностей; центром полуокружностей в верхней полу平面ости является точка $(-f_0, 0)$, а в нижней — точка $(+f_0, 0)$.

Добавив мгновенные удары, мы получим ударную модель часов с кулоновским трением. Пусть спусковое устройство наносит колебательной системе (балансиру часов) один удар за колебание. Для простоты рассмотрения мы несколько «перенесем» место удара и будем считать, что удар происходит в момент, когда балансир проходит

в положительном направлении через точку $x = -f_0$, а не через точку $x = 0$.

Рассмотрим сначала первое предположение относительно закона удара: положим, что

$$mv_1 - mv_0 = \text{const},$$

или, пользуясь обозначениями фазовой плоскости,

$$\Delta y = a. \quad (3.33)$$

Чтобы ответить на вопрос о характере возможных движений в этом случае, мы рассмотрим характер траекторий на фазовой плоскости

и найдем функцию последований для скоростей балансира непосредственно после ударов. Пусть скорость балансира непосредственно после удара равна v_1 ; точка A_1 , изображающая ее состояние, имеет координаты $(-f_0, v_1)$. Отсюда изображающая точка, как мы только что отмечали, будет двигаться по окружности с центром в точке $(-f_0, 0)$ и с радиусом $R_1 = v_1$ (рис. 132). Дойдя до полуоси положительных x , она или попадет на отрезок покоя $(-f_0 \leq x \leq +f_0)$,

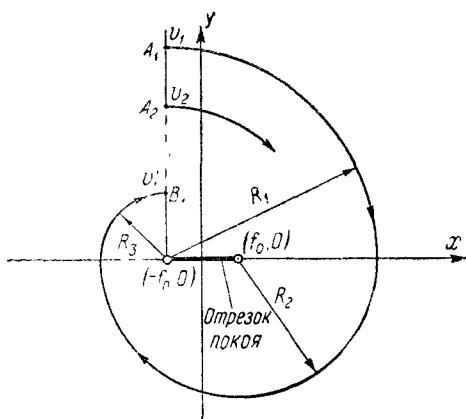


Рис. 132.

$y = 0$), состоящий из состояний равновесия (это будет при $R_1 \leq 2f_0$), или же (при $R_1 = v_1 > 2f_0$) перейдет в нижнюю полуплоскость и будет там двигаться (без скачков) по полуокружности с центром в точке $(+f_0, 0)$, радиус которой равен $R_2 = R_1 - 2f_0 = v_1 - 2f_0$. Если $R_2 \leq 2f_0$, то изображающая точка все же попадет на отрезок покоя (на этот раз — снизу). Только при $R_2 > 2f_0$, т. е. при $v_1 > 4f_0$, изображающая точка перейдет на верхнюю полуплоскость и будет там двигаться по четверти окружности, центром которой снова

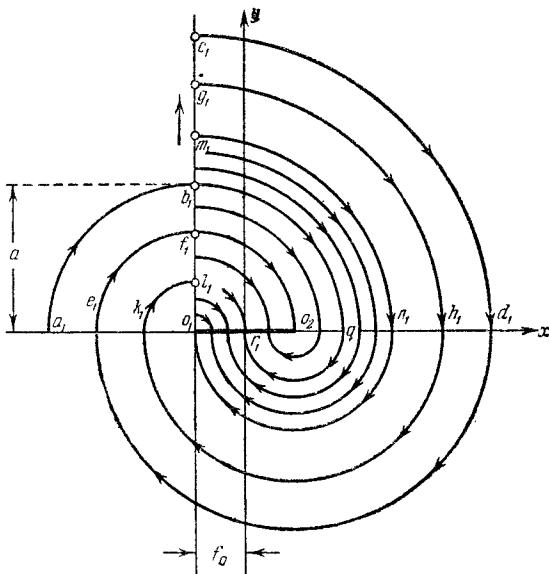


Рис. 133.

является точка $(-f_0, 0)$, а радиус равен $R_3 = R_2 - 2f_0 = v_1 - 4f_0$, пока не придет на «полупрямую ударов» ($x = -f_0, y > 0$) в точке B_1 с ординатой

$$v'_1 = v_1 - 4f_0. \quad (3.34)$$

В этом состоянии колебательной системе наносится подталкивающий мгновенный удар, в результате чего скорость y мгновенно увеличивается на величину a , и изображающая точка скачком переходит в точку $A_2(-f_0, v_2)$, где

$$v_2 = v'_1 + a = v_1 - 4f_0 + a \quad (v_1 > 4f_0). \quad (3.35)$$

Соотношение (3.35) и есть искомая функция последования, определяющая по заданной скорости системы v_1 после удара ($v_1 > 4f_0$) скорость v_2 непосредственно после следующего удара. Очевидно, последовательность скоростей $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$ после удара

составляет арифметическую прогрессию с общим членом

$$v_n = v_1 + (n - 1)(a - 4f_0).$$

Легко видеть, что характер возможных движений в нашей системе зависит от знака $a - 4f_0$.

Случай I. $a - 4f_0 < 0$. В этом случае (рис. 133), каковы бы ни были начальные условия, колебания системы будут затухать, и изображающая точка после конечного числа размахов дойдет до отрезка состояний равновесия, простирающегося на f_0 в обе стороны от начала координат.

Случай II. $a - 4f_0 > 0$. В этом случае фазовая плоскость может быть разбита на две области с различными характерами возможных

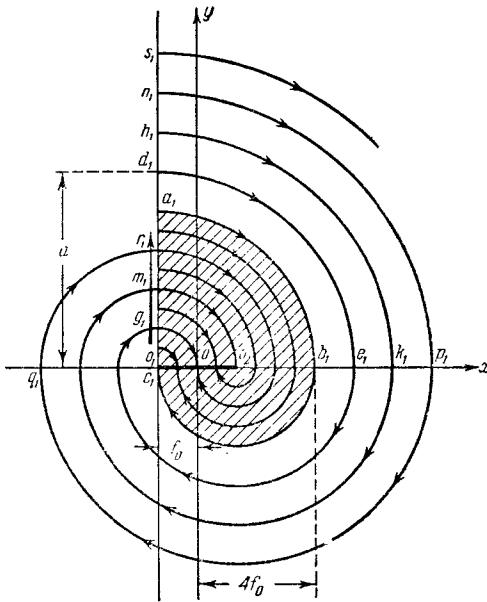


Рис. 134.

движений. Именно, если в начальный момент представляющая точка находится внутри области a_1, b_1, c_1 (рис. 134), то система в конечное время дойдет до отрезка состояний равновесия; колебания системы прекратятся. Если же начальные условия соответствуют точкам, лежащим вне этой области или на границе, колебания системы будут неограниченно нарастать.

Случай III. $a - 4f_0 = 0$. В этом идеальном случае полного равенства фазовая плоскость также может быть разбита на две части с различным характером возможных движений. Если начальные условия лежат внутри области a_1, b_1, c_1 (рис. 135), то изображающая

точка придет, еще не успев сделать полного оборота, к отрезку состояний равновесия. Если же начальные значения лежат вне этой области, то все движения суть периодические, с амплитудой, которая определяется начальными условиями.

В этом последнем случае мы имеем дело с континуумом периодических движений, т. е. с обстоятельством, характерным для консервативной системы. Но как и всякая консервативная система, наша система неустойчива по отношению к малым изменениям параметров. Достаточно, например, немножко изменить величину f_0 , чтобы прийти к случаю I или II, т. е. к существенно иной картине.

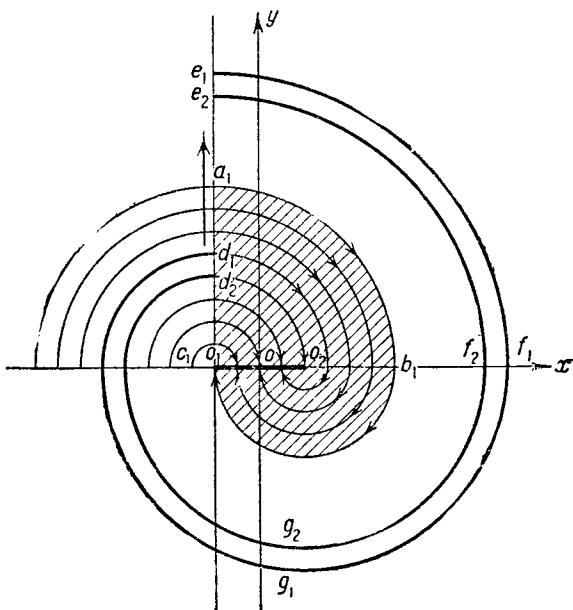


Рис. 135.

Мы видим, таким образом, что принятая нами на этот раз идеализация закона трения и закона удара не отображает наиболее существенной черты реальных часов, именно того, что в часах возможны периодические движения только с вполне определенной амплитудой, не зависящей от начальных условий. Достаточно, однако, изменить допущение о характере ударов, сохранив предположение о характере сил трения, чтобы снова получить систему, способную совершать периодическое движение только с одной, вполне определенной амплитудой. Примем снова, что при ударе спусковой механизм сообщает системе одну и ту же кинетическую энергию, т. е. положим, что

$$\Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \text{const} \quad \text{или} \quad \Delta (y^2) = h^2, \quad (3.36)$$

где h — константа, величина которой определяется устройством спускового механизма.

В этом случае величина «скачка» a на фазовой плоскости снова не будет постоянна, а будет зависеть от скорости движения нашей системы в момент, непосредственно предшествующий удару. Именно, как следует из выражения (3.36), $a = \sqrt{v^2 + h^2} - v$, величина «скачка» убывает в зависимости от предударной скорости v по гиперболическому закону. Функция последования для скоростей балансира после удара, поскольку по-прежнему последующая скорость до удара v'_1 дается выражением (3.34), очевидно, запишется в виде

$$v_2^2 = (v_1 - 4f_0)^2 + h^2 \quad (v_1 > 4f_0) \quad (3.37)$$

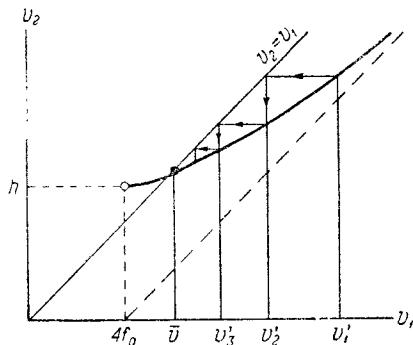


Рис. 136.

ние балансира прекращается). График функции последования (3.37) изображен на рис. 136. Это — гипербола, начинающаяся в точке $v_1 = 4f_0$, $v_2 = h$ с асимптотой $v_2 = v_1 - 4f_0$. Пересечение этой гиперболы с прямой $v_1 = v_2$, если оно существует, даст нам неподвижную точку \bar{v} , которая является скоростью после удара для *периодического* движения. Очевидно, такая точка существует при

$$h > 4f_0, \quad (3.38)$$

и если существует, то единственная. Для неподвижной точки имеем:

$$\bar{v}^2 = (\bar{v} - 4f_0)^2 + h^2,$$

откуда

$$\bar{v} = \frac{h^2}{8f_0} + 2f_0$$

(для нее, очевидно, должно быть $\bar{v} > 4f_0$, что выполняется при $h > 4f_0$). Амплитуда периодических колебаний балансира часов, очевидно, равна

$$\bar{x} = \bar{v} - f_0 = \frac{h^2}{8f_0} + f_0.$$

Условие (3.38), как легко видеть, предъявляет известные требования к силе пружины или весу гири заводного механизма. Дей-

ствительно, так как путь, проходимый гирей при каждом ударе, задан конструкцией механизма, то работа, совершаемая гирей, должна быть во всяком случае больше, чем энергия, сообщаемая системе. Следовательно, чем больше f_0 , тем больше должен быть вес гири, чтобы условие (3.38) могло быть соблюдено. Если условие (3.38) выполнено, то в системе возможен *единственный* периодический процесс с определенной амплитудой, которому соответствует на фазовой плоскости замкнутая траектория, составленная из частей окружностей и отрезка оси u длиной a . Можно показать, хотя бы путем построения «лестницы Ламерея» (рис. 136) или пользуясь теоремой Кенигса (см. § 7 гл. V), что рассматриваемая неподвижная точка \bar{v} *устойчива* и, следовательно, имеет место процесс приближения соседних движений к найденному периодическому.

Отсюда же следует, что предельное периодическое движение устойчиво в смысле Ляпунова. Полученная нами картина на фазовой плоскости (рис. 137) показывает, что при сделанных предположениях

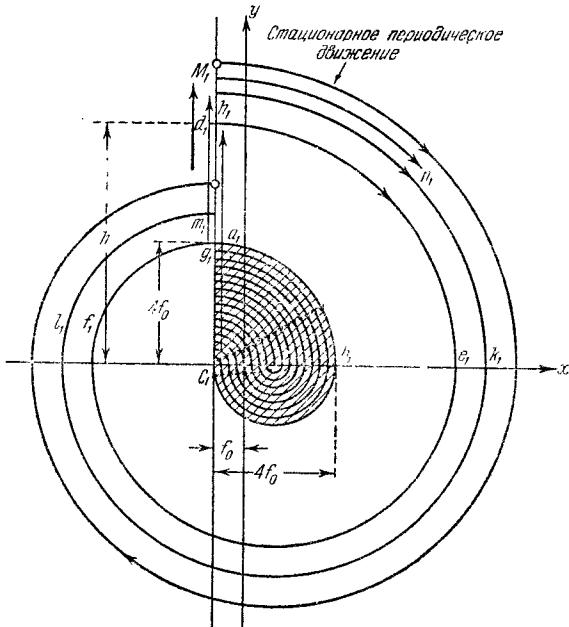


Рис. 137.

(постоянное кулоновское трение и постоянное приращение энергии при ударе) система обладает обоими наиболее характерными свойствами часового механизма: 1) наличие единственного периодического процесса (с определенной амплитудой) и 2) необходимость начального толчка (или отклонения) конечной величины для того, чтобы этот процесс

установился. Второе из этих свойств, как легко видеть, обусловлено наличием постоянного трения в системе, и чем больше постоянное трение, тем больше область, в которой начальные отклонения затухают, и тем больше должен быть начальный толчок, чтобы часы пошли. Постоянное трение неизбежно присутствует в часах, так как маятник часов должен при движении привести в действие спусковой механизм, а для этого при любой конструкции механизма необходимо преодолеть трение покоя, имеющее конечную величину, для чего маятник должен обладать некоторой энергией. Таким образом, второе типичное свойство часов (необходимость начального толчка достаточной величины) тесно связано с самим принципом устройства часов. Особенности же устройства часов, обуславливающие это свойство, прежде всего могут быть охвачены предположением, что в часах присутствует постоянное трение. Самое предположение о постоянном трении, как и всякая идеализация, конечно, не охватывает всех свойств системы, а отражает наиболее характерную черту этой системы. Именно, предположение о постоянном трении может быть сделано тогда, когда в системе присутствуют силы трения, которые при сколь угодно малой скорости движения все же сохраняют конечную величину. Если же при достаточно малой скорости силы трения становятся сколь угодно малыми, то лучше отражает свойства системы предположение о «линейном трении». Конечно, в часах присутствует и то и другое трение; трение в спусковом механизме лучше может быть отражено при помощи первой идеализации, а сопротивление воздуха движению маятника — при помощи второй. Однако учет трения о воздухе, т. е. введение линейного трения, не дало бы ничего нового, только вместо частей окружности на фазовой плоскости нужно было бы проводить части спирали. Постоянное же трение связано с существенно новым свойством — с отсутствием самовозбуждения колебаний и необходимостью начального толчка для установления периодического процесса, т. е. с наличием жесткого режима возбуждения автоколебаний.

Те же результаты мы получим, рассматривая модель часов с двумя подталкивающими ударами за каждое колебание (при $x = -f_0$, $y > 0$ и при $x = +f_0$, $y < 0$). И в этом случае предположение, что при каждом ударе балансиру сообщается одно и то же количество движения ($\Delta(y) = a = \text{const}$), не может отобразить основных свойств часов, именно, существования устойчивых периодических колебаний. Если же предположить, что каждый удар увеличивает кинетическую энергию балансира на определенную, всегда одну и ту же величину, т. е. что при ударе $\Delta(v^2) = h^2 = \text{const}$, то для скоростей после ударов получается функция последования

$$v_2^2 = (v_1 - 2f_0)^2 + h^2,$$

где v_1 и v_2 — заданная и последующая скорости балансира после ударов (под v_1 и v_2 здесь понимаются абсолютные значения скоростей).

Иначе говоря, модель с двумя ударами ведет себя так же, как и модель с одним ударом за период, но с вдвое меньшим трением: при $h > 2f_0$ существует единственное устойчивое периодическое движение, которое устанавливается при всех скоростях после удара $v_1 > 2f_0$; если же $v_1 \leq 2f_0$, то система приходит в одно из состояний равновесия. Картина на фазовой плоскости для модели часов с двумя ударами за период в предположении, что закон удара выражается соотношением (3.36) и что $h > 2f_0$, изображена на рис. 138.

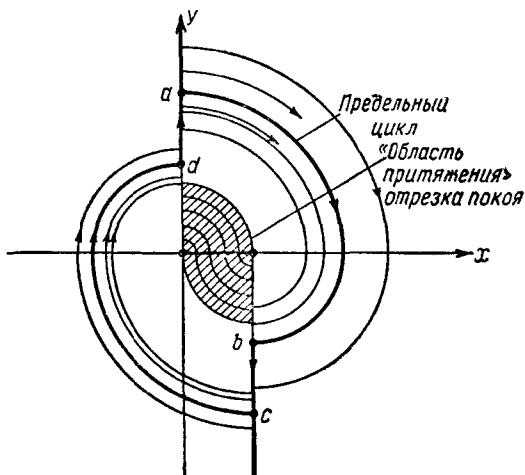


Рис. 138.

Замкнутая разрывная кривая $abcda$ является устойчивым (разрывным) предельным циклом, который соответствует периодическим автоколебаниям колебательной системы (балансира, маятника) часов.

Все те выводы, к которым мы пришли, рассматривая разные предположения о законе трения и характере толчков, могут быть пояснены простыми энергетическими соображениями. Для этого нужно лишь иметь в виду, что при линейном трении энергия, рассеиваемая за период, пропорциональна квадрату амплитуды, а при постоянном трении она представляет собой линейную функцию амплитуды. С другой стороны, при ударе по закону $v_1 - v_0 = \Delta v_0 = \text{const}$ энергия, поступающая в систему за период, возрастает на величину

$$\frac{m}{2} (v_0 + \Delta v_0)^2 - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} (2v_0 \Delta v_0 + \Delta v_0^2),$$

т. е. (так как $\Delta v_0 = \text{const}$) является линейной функцией амплитуды. При ударе же по закону $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$ энергия системы

возрастает за период на постоянную величину. После этого сразу становятся ясными основные полученные нами результаты. Всякий периодический процесс возможен только при условии, что энергия системы по прошествии периода имеет ту же величину, что и в начале периода.

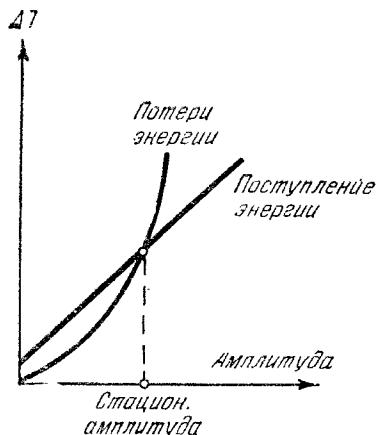


Рис. 139.

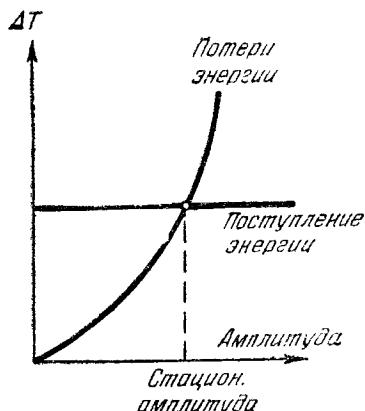


Рис. 140.

Посмотрим, может ли быть соблюдено это условие в разных рассмотренных нами случаях. В первом случае («линейное трение» и удар по закону $v_1 - v_0 = \text{const}$) потери энергии растут пропорционально квадрату амплитуды, а поступление энергии в систему есть линейная функция амплитуды. Ясно, что где-то и только при одной определенной амплитуде наступает баланс энергии и существует только одна стационарная амплитуда (рис. 139). Во втором случае (линейное трение и удар по закону $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$) потери пропорциональны квадрату амплитуды, а поступление энергии — постоянная величина. Опять-таки существует только одна стационарная амплитуда, при которой имеет место баланс энергии (рис. 140). В третьем случае (постоянное трение и удар по закону $v_1 - v_0 = \text{const}$) и потери и поступление энергии — линейные функции амплитуды. Следовательно, либо вообще нет стационарной амплитуды, либо таких стационарных амплитуд бесконечное множество.

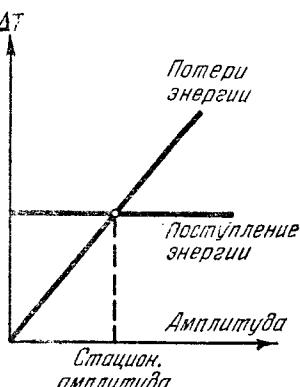


Рис. 141.

Наконец, в четвертом случае (постоянное трение и удар по закону $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$) потери энергии есть линейная функция амплитуды, а поступающая энергия имеет постоянную величину, и снова возможна только одна стационарная амплитуда, для которой насту-пает баланс энергии (рис. 141).

§ 5. Теория часов. Безударная модель «спуска с отходом назад»¹⁾

В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько простейших ударных моделей часовых механизмов, пользуясь которыми мы смогли объяснить некоторые основные свойства часов: существование единственного периодического движения и необходимость начального толчка конечной величины для возбуждения этих колебаний, т. е. жесткий режим (последнее потребовало учета сухого трения в колебательной системе часов). Однако эти модели, являясь примитивными, не могут отобразить весьма важных количественных характеристик часовых механизмов, в частности, не могут объяснить зависимость периода колебаний часов от силы или момента сил заводного механизма и от сил трения²⁾.

Для того чтобы получить зависимость хода часов, т. е. зависимость их периода, от параметров, что, например, необходимо для выяснения условий, когда эта зависимость наименьшая, а стабильность хода часов наибольшая, требуется более детальное рассмотрение динамики часов с учетом основных, характерных особенностей того или иного типа часового механизма и, в частности, примененного в нем спускового устройства³⁾. Мы рассмотрим ниже при определенных упрощающих предположениях динамику часов, снабженных так называемым «спуском с отходом назад»⁴⁾. Схема этого спуска приведена на рис. 142. Ходовое колесо, связанное через систему шестерен с заводным механизмом, своими фигурными зубьями соприкасается с концами (*палеттами*) скобы, находящейся на одной оси с балан-

¹⁾ Написано Н. А. Железовым.

²⁾ Сила заводного механизма и силы трения являются наиболее сильно меняющимися параметрами часов. Например, сила пружинного завода уменьшается по мере раскручивания пружины, а силы трения заметно зависят от положения часов. Это приводит к некоторому изменению периода колебаний часов. Между тем наиболее удовлетворительная из рассмотренных нами ударная модель часов с кулоновским трением привела к автоколебаниям, период которых не зависит ни от силы удара (т. е. от сил заводного механизма), ни от сил трения.

³⁾ Значительный вклад в развитие динамики часов сделан за последние годы в работах Н. Н. Баутина [22—25, 27, 28].

⁴⁾ Такой спуск, иногда называемый еще «крючковым», находит себе применение в стенных часах, будильниках и т. п. По динамике этому спуску аналогичен «шпиндельный» спуск, который применялся в наиболее ранних конструкциях часов, в частности в часах Гюйгенса.