

Наконец, в четвертом случае (постоянное трение и удар по закону  $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}$ ) потери энергии есть линейная функция амплитуды, а поступающая энергия имеет постоянную величину, и снова возможна только одна стационарная амплитуда, для которой насту-пает баланс энергии (рис. 141).

### § 5. Теория часов. Безударная модель «спуска с отходом назад»<sup>1)</sup>

В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько простейших ударных моделей часовых механизмов, пользуясь которыми мы смогли объяснить некоторые основные свойства часов: существование единственного периодического движения и необходимость начального толчка конечной величины для возбуждения этих колебаний, т. е. жесткий режим (последнее потребовало учета сухого трения в колебательной системе часов). Однако эти модели, являясь примитивными, не могут отобразить весьма важных количественных характеристик часовых механизмов, в частности, не могут объяснить зависимость периода колебаний часов от силы или момента сил заводного механизма и от сил трения<sup>2)</sup>.

Для того чтобы получить зависимость хода часов, т. е. зависимость их периода, от параметров, что, например, необходимо для выяснения условий, когда эта зависимость наименьшая, а стабильность хода часов наибольшая, требуется более детальное рассмотрение динамики часов с учетом основных, характерных особенностей того или иного типа часового механизма и, в частности, примененного в нем спускового устройства<sup>3)</sup>. Мы рассмотрим ниже при определенных упрощающих предположениях динамику часов, снабженных так называемым «спуском с отходом назад»<sup>4)</sup>. Схема этого спуска приведена на рис. 142. Ходовое колесо, связанное через систему шестерен с заводным механизмом, своими фигурными зубьями соприкасается с концами (*палеттами*) скобы, находящейся на одной оси с балан-

<sup>1)</sup> Написано Н. А. Железовым.

<sup>2)</sup> Сила заводного механизма и силы трения являются наиболее сильно меняющимися параметрами часов. Например, сила пружинного завода уменьшается по мере раскручивания пружины, а силы трения заметно зависят от положения часов. Это приводит к некоторому изменению периода колебаний часов. Между тем наиболее удовлетворительная из рассмотренных нами ударная модель часов с кулоновским трением привела к автоколебаниям, период которых не зависит ни от силы удара (т. е. от сил заводного механизма), ни от сил трения.

<sup>3)</sup> Значительный вклад в развитие динамики часов сделан за последние годы в работах Н. Н. Баутина [22—25, 27, 28].

<sup>4)</sup> Такой спуск, иногда называемый еще «крючковым», находит себе применение в стенных часах, будильниках и т. п. По динамике этому спуску аналогичен «шпиндельный» спуск, который применялся в наиболее ранних конструкциях часов, в частности в часах Гюйгенса.

сиrom или маятником часов. Тем самым заводной механизм через спусковое устройство (через ходовое колесо и скобу) создает некоторый момент сил  $M$ , приложенный к балансир и зависящий от взаимного расположения ходового колеса и скобы. На рис. 142,  $a$  изображено

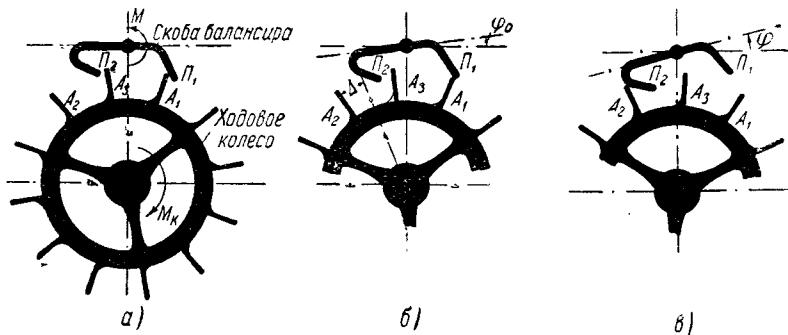


Рис. 142.

среднее положение вилки балансира ( $\varphi = 0$ ), при котором ходовое колесо, соприкасаясь зубом  $A_1$  с правой палеттой  $\Pi_1$  скобы, поворачивает балансир в направлении против вращения часовой стрелки (это направление мы примем за направление положительных  $\varphi$ ). Это ускоренное движение балансира будет продолжаться до тех пор, пока балансир не повернется на некоторый угол  $\varphi_0$  (рис. 142,  $b$ ) и зуб  $A_1$  не соскочит с палетты  $\Pi_1$  (угол  $2\varphi_0$  называется «углом подъема» балансира). После соскока зуба  $A_1$  с палетты  $\Pi_1$  балансир будет продолжать двигаться в направлении положительных  $\varphi$ , а ходовое колесо, освободившись от балансира, придет в быстрое ускоренное движение (ускорение тем больше, чем меньше момент инерции ходового колеса). При этом движении зуб  $A_2$  и левая палетта  $\Pi_2$  скобы идут навстречу друг другу<sup>1)</sup>, и через некоторый малый интервал времени зуб  $A_2$  нанесет балансиру через палетту  $\Pi_2$  встречный удар. После установления контакта зуба  $A_2$  с палеттой  $\Pi_2$  ходовое колесо будет создавать на оси скобы отрицательный момент, тормозящий движение балансира в положительном направлении. Но балансир по инерции может повернуться еще на некоторый угол в положительном направлении, заставляя ходовое колесо сделать некоторый «отход назад» (отсюда и название спуска), и лишь затем начнет движение в обратном направлении, разгоняясь моментом, приложенным через палетту  $\Pi_2$  со стороны ходового колеса (рис. 142,  $c$ ). Балансир проходит среднее положение ( $\varphi = 0$ ), и при достижении угла  $\varphi = -\varphi_0$  зуб  $A_2$  соскакивает с палетты  $\Pi_2$ . После «падения ходового колеса»

<sup>1)</sup> Это — так называемое «падение ходового колеса». Угол  $\Delta$  на рис. 142,  $b$  называется углом падения ходового колеса.

в соприкосновение с палеттой  $P_1$  приходит зуб  $A_3$ , движение балансира в направлении отрицательных  $\varphi$  тормозится и затем начинается движение в положительном направлении ( $\varphi > 0$ ), и т. д. Таким образом, ходовое колесо подталкивает балансир дважды за каждое его колебание и, совершая некоторую положительную работу, компенсирует потери энергии в колебательной системе из-за трения.

Исследование динамики часов с таким спусковым устройством довольно затруднительно [16, 22]. Поэтому для упрощения задачи мы перейдем к модели часов с *одной* степенью свободы, которая получается в предположении, что *момент инерции ходового колеса  $I_k$  равен нулю*<sup>1)</sup>. При таком предположении «падение ходового колеса» после каждого соскаока зуба с палетты скобы будет происходить *мгновенно* и всегда одна из палетт, или правая  $P_1$ , или левая  $P_2$ , находится в контакте с каким-либо зубом ходового колеса.

Кинематика спускового устройства, как мы видели, такова, что при  $\varphi \leq -\varphi_0$  с зубом ходового колеса контактирует только правая палетта  $P_1$ , при  $\varphi \geq +\varphi_0$  — только левая палетта  $P_2$ , а при  $-\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0$  может контактировать любая из палетт. При контакте зуба ходового колеса с палеттой  $P_1$  момент сил  $M$ , создаваемый ходовым колесом на оси балансира, больше нуля, при контакте с палеттой  $P_2$  момент  $M < 0$ . Поэтому момент сил, развиваемый ходовым колесом на оси балансира,  $M = M(\varphi)$  является на интервале  $-\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0$  *двузначной* функцией угла поворота балансира  $\varphi$  ( $M > 0$  или  $M < 0$  в зависимости от того, какая из палетт контактирует с зубом ходового колеса).

Это налагает известные ограничения на характер фазовой поверхности для рассматриваемой динамической модели часов. Действительно, в качестве такой поверхности мы не можем взять обычную плоскость с декартовыми координатами  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ <sup>2)</sup>, так как задание точки на ней ( $\varphi, \dot{\varphi}$ ), где  $-\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0$ , не определяет однозначно сил, действующих в системе, и, следовательно, не определяет однозначно состояния системы. В соответствии с *двузначностью* зависимости момента  $M$  от  $\varphi$  фазовой поверхностью может служить «плоскость с наложениями» (рис. 143), состоящая из двух наложенных друг на друга полуплоскостей: (I)  $\varphi < \varphi_0$  и (II)  $\varphi > -\varphi_0$ . Первая из них соответствует контакту зуба ходового колеса с правой палеттой  $P_1$ , вторая — с левой палеттой  $P_2$ . Точки такой *двухлистной* фазовой поверхности и состояния системы соответствуют уже *взаимно*

<sup>1)</sup> Если привести момент инерции ходового колеса (вместе со всей системой шестерен и заводным механизмом) к оси балансира, то во многих часовых механизмах он будет составлять всего несколько процентов от момента инерции  $I$  балансира. Для таких часов наше предположение, что  $I_k = 0$ , будет достаточно удовлетворительным.

<sup>2)</sup> Мы будем отвлекаться от того обстоятельства, что в силу конструктивных причин углы поворота ограничены, и будем считать, что  $\varphi$  может принимать любые значения.

однозначно. При этом, очевидно, переход изображающей точки с листа (I) на лист (II) происходит при  $\dot{\varphi} = +\dot{\varphi}_0$  и обратный — при  $\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}_0$ <sup>1)</sup>. При переходе изображающей точки с одного листа на другой ее

абсцисса, конечно, остается неизменной. Неизменной, несмотря на наличие встречных ударов по

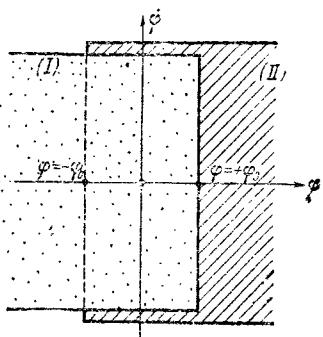


Рис. 143.

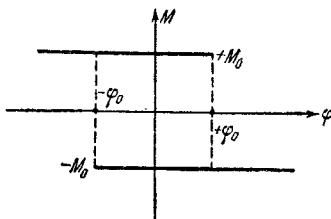


Рис. 144.

палеттам, наносимых зубьями ходового колеса в конце «падения» ходового колеса, будет оставаться и ордината  $\dot{\varphi}$  (скорость балансира) в силу нашего предположения, что момент инерции ходового колеса  $I_k$  равен нулю<sup>2)</sup>.

Для дальнейшего упрощения рассмотрения динамики изучаемой нами модели часов сделаем еще следующие предположения о силах, действующих на балансир часов. Во-первых, мы предположим, что момент сил  $M$ , действующий на балансир со стороны спускового

<sup>1)</sup> Здесь и ниже мы под листами понимаем полу平面ости (I) и (II), составляющие двулистную фазовую поверхность — поверхность «с наложением» для рассматриваемой модели часов.

<sup>2)</sup> Переход изображающей точки с одного листа на другой соответствует процессу освобождения ходового колеса от балансира, его «падению» (повороту на угол  $\Delta$ ) и встречному удару по соответствующей палетте. Нетрудно показать, что ходовое колесо в силу нашего предположения о равенстве нулю его момента инерции не несет никакого момента количества движения и, следовательно, при встречном ударе своим зубом по палетте (это удар для простоты будем полагать абсолютно неупругим) не будет изменять скорости балансира  $\dot{\varphi}$ .

Действительно, пусть  $\dot{\varphi}_0$  и  $\dot{\psi}$  — скорости ходового колеса соответственно при соскачивании его зуба с палетты и непосредственно перед ударом о другую палетту. Очевидно (мы предположим пока, что момент инерции ходового колеса  $I_k$  мал, но отличен от нуля),  $\frac{1}{2} I_k (\dot{\psi}^2 - \dot{\varphi}_0^2) = M_k \Delta$ , где  $M_k$  — момент сил на оси колеса, приложенный со стороны заводного механизма (мы считаем его постоянным). Тогда предударный момент количества движения ходового колеса равен  $G = I_k \dot{\varphi} = I_k \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \frac{2M_k \cdot \Delta}{I_k}}$  и стремится к нулю при  $I_k \rightarrow 0$ , несмотря на то, что  $\dot{\psi} \rightarrow \infty$ .

механизма, постоянен по абсолютной величине, т. е.  $M = +M_0$ , когда с зубом ходового колеса контактирует палетта  $\Pi_1$ , и  $M = -M_0$ , когда контактирует палетта  $\Pi_2$  (рис. 144)<sup>1)</sup>. Во-вторых, силы трения будем представлять в виде сил кулоновского трения (наибольший момент силы трения покоя, который мы будем считать не зависящим от угла поворота балансира, обозначим через  $f_0$ )<sup>2)</sup>.

Ниже мы рассмотрим, опираясь на разобранную динамическую модель часов со спуском с «отходом назад», два типа часовых механизмов. Один из них имеет балансир без «собственного периода» (центр тяжести такого балансира лежит на его оси вращения и нет никакой пружины, которая бы приводила его к среднему положению  $\varphi = 0$ ). Этот тип часовых механизмов, как мы увидим, не обладает хорошей стабильностью хода и поэтому применяется лишь в тех случаях, когда не нужна большая стабильность периода колебаний (он применяется, например, в автоспусках фотоаппаратов, в звонковых устройствах будильников и т. п.) [16, 25, 67].

Второй тип часовых механизмов имеет балансир «с собственным периодом» (балансир с пружиной или маятник), который при отсоединении спуска может совершать затухающие колебания. Этот второй тип, обладающий достаточно хорошей стабильностью хода, применяется во многих конструкциях часов (главным образом стенных)<sup>3)</sup>.

**1. Модель часов с балансиром «без собственного периода».** Динамические уравнения рассматриваемой модели часов с балансиром «без собственного периода», очевидно, запишутся в виде

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}) + M(\varphi),$$

где  $I$  — момент инерции балансира,  $M = M(\varphi)$  — момент сил на оси балансира, создаваемый спусковым устройством, и  $f(\varphi, \frac{d\varphi}{dt})$  — момент сил кулоновского трения. При движении балансира ( $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ )

$$f(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}) = -f_0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt}$$

<sup>1)</sup> Вид зависимости  $M = M(\varphi)$  при контакте зуба ходового колеса с данной палеттой определяется профилем палетты; в частности, его можно выбрать таким, чтобы  $M$  было постоянным.

<sup>2)</sup> Силы сухого трения в колебательной системе часов возникают в двух местах: в подшипниках оси балансира и при скольжении зуба ходового колеса по той или иной палетте скобы балансира. Последние в большинстве часов являются основными и, очевидно, пропорциональны при заданном коэффициенте трения давлению зуба на палетту, т. е. пропорциональны силе заводного механизма.

<sup>3)</sup> С динамикой первого типа часовых механизмов сходна динамика ранних, безмаятниковых часов, которые часто называются «догалиеевыми» часами. Динамика второго типа часов близка к динамике часов Гюйгенса [128].

и уравнение движения принимает вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f_0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt} \pm M_0 \quad (3.39)$$

(верхний знак — при контакте зуба ходового колеса с палеттой  $\Pi_1$ , нижний — при контакте с палеттой  $\Pi_2$ ).

Введем новые, безразмерные переменные:

$$x = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad t_{\text{нов}} = +\sqrt{\frac{M_0}{I \cdot \varphi_0}} t; \quad (3.40)$$

тогда уравнение (3.39) приведется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -F \operatorname{sgn} y - (-1)^n \end{cases} \quad (y \neq 0), \quad (3.41)$$

где

$$F = \frac{f_0}{M_0},$$

$n$  — номер палетты, находящейся в контакте с зубом ходового колеса (точкой вверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени).

В случае  $M_0 \leq f_0$  (т. е.  $F \geq 1$ ) и неподвижного осциллятора ( $y = 0$ ) момент спускового устройства не может преодолеть сил сухого трения, поэтому  $\dot{y} = 0$  (т. е.  $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ ) и любое состояние  $(x, 0)$  является состоянием равновесия. В этом случае никаких периодических движений быть не может и любое движение заканчивается приходом системы в одно из состояний равновесия.

Поэтому ниже мы будем предполагать, что  $M_0 > f_0$  или, что то же самое,  $F < 1$ . В этом случае, как нетрудно видеть, система не имеет состояний равновесия.

Для фазовых траекторий на листе ( $I$ ) ( $x < +1$ ; с зубом ходового колеса контактирует правая палетта  $\Pi_1$  и  $M = +M_0$ ), разделив второе из уравнений (3.41) на первое, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - F \operatorname{sgn} y}{y};$$

после интегрирования

$$\frac{y^2}{2} - (1 + F)x = \text{const} \quad (3.42a)$$

на нижней половине листа ( $y < 0$ ) и

$$\frac{y^2}{2} - (1 - F)x = \text{const} \quad (3.42b)$$

на верхней ( $y > 0$ ). Таким образом, фазовые траектории на листе ( $I$ ) состоят из дуг парабол (3.42a) и (3.42b), причем в нижней половине

листа изображающая точка движется влево, ибо там  $\dot{x} = y < 0$ , а в верхней — вправо (рис. 145). Все фазовые траектории на листе (I) выходят на его границу на полупрямой  $x = +1$ ,  $y < 0$ .

Фазовые траектории на листе (II) симметричны (относительно начала координат) с траекториями на листе (I), так как уравнения (3.41) для траекторий на листе (II) — полуплоскости  $x > -1$  — переходят в уравнения для траекторий на листе (I) при замене переменных  $x$ ,  $y$  на  $-x$ ,  $-y$ . Для выяснения характера возможных движений балансира проведем две полупрямые: ( $v$ )  $x = -1$ ,  $y = -v < 0$  и ( $v'$ )  $x = +1$ ,  $y = v' > 0$ , и рассмотрим последовательность точек пересечения с ними любой фазовой траектории — последовательность  $v$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , ... (рис. 146)<sup>1)</sup>. Пусть изображающая точка перешла с листа (II) на лист (I) в точке  $(-1, -v)$ .

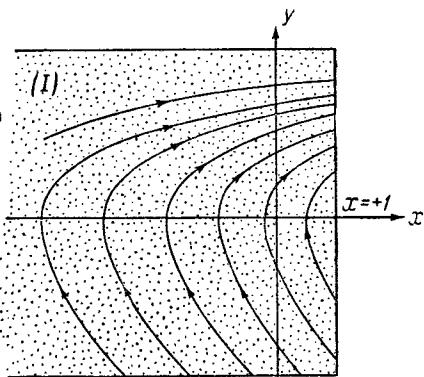


Рис. 145.

Там она будет двигаться по параболе (3.42а), выйдет на ось абсцисс в точке  $(-\xi, 0)$ , причем, очевидно,  $\xi$  определяется уравнением

$$\frac{v^2}{2} + (1 + F) = (1 + F)\xi,$$

или

$$v^2 = 2(1 + F)(\xi - 1). \quad (3.43a)$$

Затем изображающая точка движется в верхней половине листа (I) и выходит,

наконец, на границу этого листа на полупрямой ( $v'$ ) в точке  $(+1, v_1)$ , где  $v_1 > 0$ , и определяется соотношением

$$(1 - F)\xi = \frac{v_1^2}{2} - (1 - F),$$

<sup>1)</sup> Очевидно, точки этих полупрямых соответствуют состояниям системы, при которых после прекращения контакта одной из палетт наступает контакт другой палетты с зубом ходового колеса;  $v$  и  $v'$  являются абсолютными значениями скоростей балансира в этих состояниях.

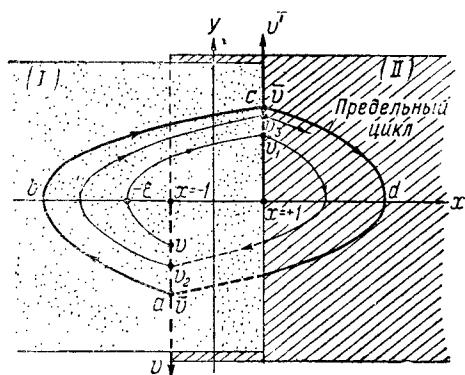


Рис. 146.

или

$$v_1^2 = 2(1 - F)(\xi + 1). \quad (3.43б)$$

Таким образом, фазовые траектории на листе (I) ставят точки полупрямых ( $v$ ) и ( $v'$ ) в некоторое однозначное и непрерывное соответствие или, другими словами, осуществляют некоторое точечное преобразование полупрямой ( $v$ ) в полупрямую ( $v'$ ), выражаемое функцией последования (3.43а) и (3.43б) (мы получили функцию последования, записанную в параметрическом виде; параметром является  $\xi$  — наибольшее отклонение балансира<sup>1)</sup>). В дальнейшем изображающая точка перейдет на лист (II) и, двигаясь по соответствующей фазовой траектории (для которой есть симметричная на листе (I)), выйдет снова на полупрямую ( $v$ ) в некоторой точке  $(-1, -v_2)$ . При этом в силу отмеченной выше симметрии фазовых траекторий на листах (I) и (II)  $v_2$  определяется по  $v_1$  той же функцией последования, выражаемой соотношениями (3.43а) и (3.43б). Иначе говоря, точечное преобразование полупрямой ( $v'$ ) в полупрямую ( $v$ ) тождественно с точечным преобразованием полупрямой ( $v$ ) в полупрямую ( $v'$ ); поэтому ниже мы будем говорить о едином точечном преобразовании полупрямых ( $v$ ) и ( $v'$ ) друг в друга.

Следовательно, при любом движении балансира в последовательности его скоростей  $v$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , ... в моменты смены контактирующей палетты каждая последующая скорость определяется предыдущей найденной функцией последования. Это дает возможность проследить за ходом любой выбранной фазовой траектории. *Неподвижная точка*  $\bar{v}$  точечного преобразования, т. е. точка, для которой  $v = v_1 = \bar{v}$ , очевидно, соответствует *симметричному предельному циклу*, являясь точками пересечения этого предельного цикла с полупрямыми ( $v$ ) и ( $v'$ ). Для неподвижной точки имеем:

$$(1 + F)(\xi - 1) = (1 - F)(\xi + 1),$$

откуда амплитуда автоколебаний балансира

$$\xi = \frac{1}{F} \quad (3.44)$$

и

$$\bar{v}^2 = 2 \frac{1 - F^2}{F}. \quad (3.45)$$

<sup>1)</sup> Конечно, в рассматриваемом случае параметр  $\xi$  нетрудно исключить, и тогда мы получили бы функцию последования, записанную в явном виде. Мы, однако, не будем исключать  $\xi$ , чтобы на этом простом примере показать, как можно вести исследование, пользуясь функцией последования в параметрическом виде. Следует заметить, что во многих задачах трудно получить функцию последования, записанную в явном виде, но сравнительно легко получить ее в параметрической форме (см. гл. VIII).

Для выяснения устойчивости найденного предельного цикла построим на единой диаграмме кривые  $v = v(\xi)$  и  $v_1 = v_1(\xi)$  (если по оси ординат откладывать не  $v$  и  $v_1$ , а  $v^2$  и  $v_1^2$ , то мы получим две прямые, изображенные на рис. 147). Точка их пересечения является неподвижной точкой точечного преобразования. Зададимся любым  $v$  (на рис. 147 для определенности взято  $v > \bar{v}$ ); по прямой (3.43а) определим  $\xi$  и затем по прямой (3.43б) определим  $v_1$ ; по  $v_1$  как по новой, исходной точке преобразования найдем  $\xi_1$  и  $v_2$  и т. д. Построенная «лестница Ламерей» сходится к неподвижной точке в силу того обстоятельства, что прямая  $v^2 = 2(1+F)(\xi - 1)$  идет круче, чем прямая  $v_1^2 = 2(1-F)(\xi + 1)$ , т. е. последовательность  $v, v_1, v_2, v_3, \dots$  сходится к  $\bar{v}$  при любых  $v > \bar{v}$ . Точно так же она будет сходить к  $\bar{v}$  и при  $v < \bar{v}$ . Это доказывает устойчивость найденного единственного периодического движения балансира часов, доказывает, что это движение будет устанавливаться при любых начальных условиях.

Амплитуда автоколебаний балансира дается формулой (3.44) или в обычных угловых единицах

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 \xi = \varphi_0 \frac{M_0}{f_0}.$$

Для вычисления периода автоколебаний обратим внимание на то обстоятельство, что предельный цикл (он изображен на рис. 146) состоит из четырех дуг параболы, на каждой из которых ускорение балансира  $\dot{y}$  постоянно. На дуге параболы  $ab$  ускорение  $\dot{y} = 1 + F$  и, следовательно, время пробега изображающей точки по этой дуге предельного цикла равно

$$\tau_1 = \frac{\bar{v}}{1+F};$$

аналогично, на дуге  $bc$   $\dot{y} = 1 - F$  и время пробега равно

$$\tau_2 = \frac{\bar{v}}{1-F}.$$

Поэтому период автоколебаний (в единицах безразмерного времени) равен

$$\tau = 2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{F(1-F)}} , \quad (3.46)$$

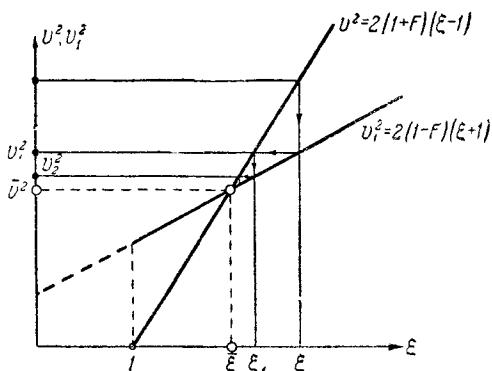


Рис. 147.

или в обычных единицах

$$T = 4 \sqrt{\frac{2\varphi_0 I}{M_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{F(1-F^2)}}. \quad (3.47)$$

Как видим, период автоколебаний балансира зависит как от силы заводного механизма, так и от силы трения. Силе заводного механизма пропорционален момент сил  $M_0$ , развиваемый спусковым устройством. Но ей же пропорциональны и давление, оказываемое зубьями ходового колеса на палетты вилки балансира, и, следовательно,

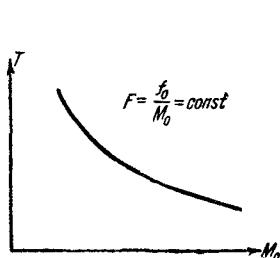


Рис. 148.

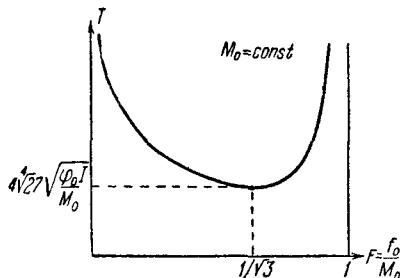


Рис. 149.

(с известной степенью точности) момент сил сухого трения, действующий на балансир, т. е.  $f_0$ . Поэтому с той же степенью точности мы можем считать, что коэффициент  $F$ , а значит и амплитуда автоколебаний  $\xi$  или  $\bar{\varphi}$  не зависят от силы заводного механизма и определяются, в основном, коэффициентом трения зуба ходового колеса о палетту. Период автоколебаний зависит и от  $M_0$  и от  $F$  (графики зависимости  $T$  от  $M_0$  и  $F$  даны на рис. 148 и 149). Количественной мерой стабильности хода часов при изменении силы заводного механизма и коэффициента трения могут служить величины

$$S_M = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial M_0} \Big|_{F=\text{const}}}, \quad S_f = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial F} \Big|_{M_0=\text{const}}},$$

которые показывают, во сколько раз относительное изменение периода автоколебаний меньше относительного изменения того или иного параметра часов. Как легко подсчитать, исходя из формулы (3.47),

$$S_M = 2 \quad \text{и} \quad S_f = 2 \frac{1-F^2}{|1-3F^2|}. \quad (3.48)$$

Наилучшая стабильность хода часов при изменении коэффициента трения ( $S_f = \infty$  или  $\frac{\partial T}{\partial F} = 0$ ) получается при  $F = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , однако стабильность хода при изменении силы заводного механизма всегда невелика ( $S_M = 2$ ).

**2. Модель часов с балансиром, обладающим «собственным периодом».** Переходим теперь к рассмотрению модели часов, на балансир которых кроме сил трения и сил, действующих со стороны спуска, действует еще сила, «притягивающая» его к среднему положению (колебательной системой часов является или балансир с пружиной или маятник и она имеет «собственный период», т. е. может совершать колебания при отсоединенном спусковом устройстве).

Уравнение движения колебательной системы таких часов можно записать в виде

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi = f(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}) + M(\varphi),$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в предыдущем пункте, а —  $k\varphi$  является моментом сил пружины балансира<sup>1)</sup>. Это уравнение для движущегося балансира ( $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ ), если ввести новые переменные

$$x = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad t_{\text{нов}} = \omega_0 t = \sqrt{\frac{k}{I}} t$$

и безразмерные параметры часов

$$\lambda = \frac{M_0}{k\varphi_0} \quad \text{и} \quad r = \frac{f_0}{k\varphi_0},$$

можно записать в виде следующей системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - r \operatorname{sgn} y - \lambda (-1)^n, \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

где, как и раньше,  $n$  — номер палетты, контактирующей с зубом ходового колеса, и точкой вверху обозначено дифференцирование по новому времени (очевидно, по-прежнему листом (I) двулистной фазовой поверхности, соответствующим контакту правой палетты  $P_1$  с зубом ходового колеса, является полуплоскость  $x < +1$  и листом (II), соответствующим контакту левой палетты  $P_2$ , — полуплоскость  $x > -1$ ).

Рассмотрим фазовые траектории на листе (I) (по-прежнему фазовые траектории на листе (II) симметричны (относительно начала координат) с траекториями на листе (I)). Прежде всего найдем состояния равновесия. В силу того, что мы учтем силы сухого, кулоновского трения, равновесие наступит во всяком состоянии, в котором осциллятор неподвижен ( $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  или  $y = 0$ ), а сумма моментов сил пружины и спускового механизма не превышает максимального момента

<sup>1)</sup> Это уравнение, конечно, справедливо и для часов с маятником при малых углах отклонения маятника от его среднего, вертикального положения, что в часах всегда имеет место.

силы трения покоя, т. е.

$$|M_0 - k\varphi| < f_0 \text{ или } |x - \lambda| < r.$$

Очевидно, в зависимости от параметров могут представиться три случая: а) если  $\lambda + r \leq 1$ , то на листе (I) имеется отрезок ( $y = 0$ ,  $\lambda - r \leq x \leq \lambda + r$ ), состоящий из состояний равновесия, — отрезок покоя  $O_1^+O_1^-$  (рис. 150);

б) если  $\lambda + r > 1$ , но  $\lambda - r \leq 1$ , то состояниями равновесия будут точки отрезка ( $y = 0$ ,  $\lambda - r \leq x \leq 1$ ), и, наконец, в) состояний равновесия не существует, если  $\lambda - r > 1$  (в последнем случае и точка  $O_1^+(\lambda - r, 0)$ , и точка  $O_1^-(\lambda + r, 0)$  лежат вне листа (I)).

Интегрируя уравнения (3.49) для листа (I) (для него  $n = 1$ ), нетрудно убедиться, что фазовыми траекториями будут дуги полуокружностей:

$$y^2 + [x - (\lambda + r)]^2 = \text{const} \quad (3.50a)$$

в нижней половине листа,  $y < 0$  (с центром в точке  $O_1^-(\lambda + r, 0)$ ) и

$$y^2 + [x - (\lambda - r)]^2 = \text{const} \quad (3.50b)$$

в верхней половине,  $y > 0$  (с центром в точке  $O_1^+(\lambda - r, 0)$ ). На рис. 150 изображены фазовые траектории на листе (I) для случая  $\lambda + r < 1$ . Фазовые траектории, начинающиеся в заштрихованной области, входят (через конечный промежуток времени) в отрезок покоя  $O_1^+O_1^-$ . Все остальные фазовые траектории выходят на границу листа на полупрямой

$$x = +1, \quad y > 0.$$

Для выяснения характера возможных движений колебательной системы часов, так же как и в предыдущей задаче, проведем на фазовой поверхности две полупрямые: ( $v$ )  $x = -1, y = -v$  ( $v > 0$ ) и ( $v'$ )  $x = +1, y = v' > 0$ , и рассмотрим точечное преобразование их друг в друга, осуществляемое фазовыми траекториями. Пусть изображающая точка перешла с листа (II) на лист (I) в точке  $(-1, -v)$  полупрямой ( $v$ ) (рис. 151). На листе (I) она, двигаясь по соответствующей полуокружности (3.50a), придет на ось абсцисс в точке  $(-\xi, 0)$ , где  $\xi > 1$  и определяется уравнением

$$v^2 = [\xi + \lambda + r]^2 - [1 + \lambda + r] = \xi^2 + 2(\lambda + r)\xi - 1 - 2(\lambda + r). \quad (3.51a)$$

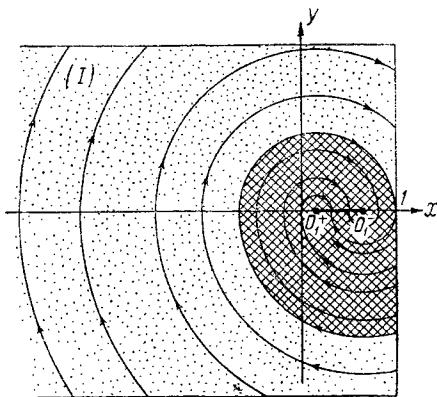


Рис. 150.

Если  $-\xi < \lambda - r$ , то изображающая точка пересечет ось абсцисс и будет двигаться в верхней половине листа (*I*) по полуокружности (3.50 б):

$$y^2 + [x - (\lambda - r)]^2 = [\xi + \lambda - r]^2$$

и или выйдет на полупрямую  $(v')$  в точке  $(+1, v_1)$ , определяемой уравнением

$$v_1^2 = [\xi + \lambda - r]^2 - [1 - \lambda + r]^2 \doteq \xi^2 + 2(\lambda - r)\xi - 1 + 2(\lambda - r), \quad (3.516)$$

или придет на отрезок покоя, в одно из равновесных состояний. Последнее имеет место при

$$\xi + \lambda - r < 1 - \lambda + r \text{ или } \xi < \xi_1 = 1 - 2(\lambda - r). \quad (3.52)$$

Соотношения (3.51 а) и (3.51 б) для рассматриваемого точечного преобразования, записанной опять в параметрической форме; функция последований для точечного преобразования полупрямой ( $v'$ ) в полупрямую ( $v$ ), осуществляющегося фазовыми траекториями на листе (II), имеет тот же вид в силу указанной выше симметрии фазовых траекторий на листах (I) и (II). Эта функция последований определяет в последовательности точек пересечения любой выбранной фазовой траектории с полупрямыми ( $v$ ) и ( $v'$ ) (в последовательности  $v, v_1, v_2, v_3, \dots$ ) каждую последующую точку по предыдущей. Неподвижная точка

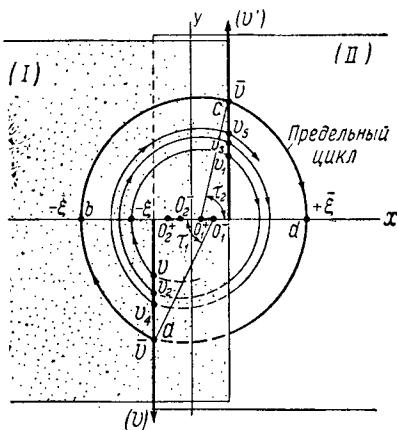


Рис. 151.

преобразования  $\bar{v}$  (для нее  $v = v_1 = \bar{v}$ ) соответствует симметричному предельному циклу (рис. 151).

Для отыскания неподвижной точки, а также для определения ее устойчивости построим диаграмму Ламерея (рис. 152). Построив на ней кривые (3.51а) и (3.51б) (первую из них следует строить только для  $\xi > 1$ , вторую для  $\xi > \xi_1 = 1 - 2(\lambda - r)$ ), нетрудно найти неподвижную точку как точку пересечения этих кривых (на рис. 152 по оси ординат отложены  $v^2$  и  $v_1^2$  вместо  $v$  и  $v_1$ ; в этом случае кривые (3.51а) и (3.51б) являются параболами). Очевидно, если  $\xi_1 > 1$ , что имеет место при  $\lambda < r$ , то кривые (3.51а) и (3.51б) не пересекаются; первая из них идет всюду над второй, последовательность чисел  $v$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ , ... будет монотонно убывающей и система при любых начальных условиях будет приходить в одно из состояний

равновесия. Автоколебаний часов в этом случае не будет (диаграмма Ламерей для этого случая изображена на рис. 152, а).

Если же  $\xi_1 < 1$ , что имеет место при

$$\lambda > r, \quad (3.53)$$

то кривые (3.51а) и (3.51б) имеют единственную точку пересечения, а рассматриваемое точечное преобразование — единственную неподвижную точку, которая, как нетрудно убедиться, является устойчивой (рис. 152, б). Таким образом, при выполнении неравенства (3.53) на

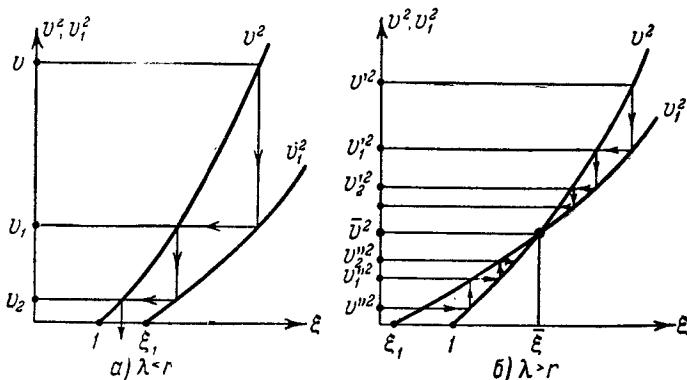


Рис. 152.

фазовой поверхности имеется единственный устойчивый предельный цикл, который и соответствует автоколебательному режиму часов (предельный цикл для случая  $\lambda + r < 1$  и  $\lambda > r$  изображен на рис. 151).

В зависимости от значений параметров  $\lambda$  и  $r$  (но  $\lambda > r$ ) мы будем иметь или жесткий или

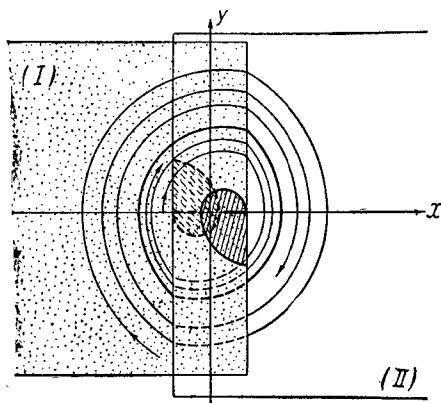


Рис. 153.



Рис. 154.

мягкий режим установления автоколебаний. Если  $\lambda > r$ , но  $\lambda < 1 + r$ , то наряду с устойчивым предельным циклом на фазовой поверхности

имеются еще отрезки устойчивых состояний равновесия (на каждом листе) и установление автоколебаний происходит не при всех начальных условиях (вне заштрихованной области на рис. 153). Если же  $\lambda > 1 + r$ , то состояний равновесия не существует и все фазовые траектории асимптотически (при  $t \rightarrow +\infty$ ) приближаются к предельному циклу, т. е. имеет место мягкий режим установления автоколебаний (они устанавливаются при любых начальных условиях). На рис. 154 изображена плоскость параметров часов  $\lambda, r$  (точнее ее первый квадрант) с отмеченными на ней областями существования различных режимов часов.

Остановимся теперь более подробно на периодическом движении колебательной системы часов, которое, как мы видели, существует только при  $\lambda > r$  или, что то же самое, при  $M_0 > f_0$ . Приравнивая  $v^2$  и  $v_1^2$  в выражениях (3.51а) и (3.51б), мы получим для амплитуды автоколебаний балансира:

$$\xi = \frac{\lambda}{r}, \quad (3.54)$$

или в обычных угловых единицах<sup>1)</sup>

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 \xi = \varphi_0 \frac{M_0}{f_0}.$$

Для вычисления периода автоколебаний заметим, что изображающие точки двигаются по фазовым траекториям — полуокружностям — с угловой скоростью относительно их центров, равной единице<sup>2)</sup>. Поэтому время пробега (в единицах безразмерного времени) изображающей точки по той или иной дуге полуокружности, составляющей предельный цикл, равно величине центрального угла этой дуги и период автоколебаний (также в единицах безразмерного времени) равен

$$\tau = 2(\pi + \tau_1 - \tau_2),$$

где  $\tau_1$  и  $\pi - \tau_2$  — центральные углы дуг  $ab$  и  $bc$  предельного цикла

<sup>1)</sup> Мы получили то же самое выражение для амплитуды автоколебаний, что и в случае часов с балансиром без «собственного периода» (см. (3.44)). Это полностью объясняется консервативностью момента пружины балансира —  $k\varphi$ . Действительно, поскольку работа спускового механизма за период автоколебаний равна  $4M_0\varphi_0$ , а работа кулоновских сил трения за тот же промежуток времени равна  $4f_0\bar{\varphi}$ , уравнение баланса энергии запишется в виде  $4M_0\varphi_0 = 4f_0\bar{\varphi}$ , независимо от того, имеет балансир пружину или нет, так как работа пружины за период автоколебаний равна нулю. Из этого уравнения баланса энергии мы получим для обоих типов часов:

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 \frac{M_0}{f_0}.$$

<sup>2)</sup> Действительно, квадрат фазовой скорости согласно уравнениям (3.49) равен  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = y^2 + [x + (-1)^n \lambda + r \operatorname{sgn} y]^2 = R^2$  — квадрату радиуса соответствующей полуокружности; поэтому угловая скорость движения изображающей точки равна единице.

(рис. 151). Очевидно,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  удовлетворяют неравенствам:

$$0 < \tau_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < \tau_2 < \pi,$$

и определяются соотношениями:

$$\cos \tau_1 = \frac{1 + \lambda + r}{\xi + \lambda + r} \quad \text{и} \quad \cos \tau_2 = \frac{1 - \lambda + r}{\xi + \lambda - r}. \quad (3.55)$$

Так как  $\frac{1 + \lambda + r}{\xi + \lambda + r} > \frac{1 - \lambda + r}{\xi + \lambda - r}$ , то  $\tau_1 < \tau_2$  и период автоколебаний

$$\tau = 2\pi - 2(\tau_2 - \tau_1) < 2\pi. \quad (3.56)$$

В обычных единицах период автоколебаний равен

$$T = \frac{\tau}{\omega_0} = \tau \sqrt{\frac{T}{k}} < 2\pi \sqrt{\frac{T}{k}}.$$

Он всегда меньше периода свободных колебаний балансира (или маятника).

Посмотрим, как зависит период автоколебаний  $T$  от параметров часов: от  $\lambda$ , т. е. от силы заводного механизма, и от  $\frac{\lambda}{r} = \xi$ , т. е. от коэффициента трения, причем сделаем это для наиболее интересного для практики случая малых  $\lambda$  и  $r$  ( $r < \lambda \ll 1$ )<sup>1</sup>. При заданном  $\xi$  и  $\lambda$ ,  $r \rightarrow 0$   $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \tau^0 = \arccos \frac{1}{\xi}$ , а  $\tau \rightarrow 2\pi$ . При  $\lambda, r \ll 1$ , очевидно, имеем следующие приближенные соотношения:

$$-\sin \tau^0 \cdot (\tau_1 - \tau^0) = \frac{1 + \lambda + r}{\xi + \lambda + r} - \frac{1}{\xi} = \frac{(\xi - 1)(\lambda + r)}{\xi(\xi + \lambda + r)}$$

и, пренебрегая в знаменателе  $\lambda + r$  по сравнению с  $\xi$ ,

$$\tau_1 \approx \tau^0 - \frac{(\xi - 1)(\lambda + r)}{\xi^2 \sin \tau^0};$$

аналогично

$$\tau_2 \approx \tau^0 + \frac{(\xi + 1)(\lambda - r)}{\xi^2 \sin \tau^0}$$

<sup>1)</sup> Как и в предыдущем пункте, мы будем считать, что наибольший момент сил трения покоя  $f_0$  пропорционален силе давления зубьев ходового колеса на палетты балансира или, иначе, силе заводного механизма. Тогда отношение  $\frac{\lambda}{r} = \xi$  не будет зависеть от силы заводного механизма, а будет определяться коэффициентом трения между поверхностями зуба ходового колеса и скобы балансира.

и, следовательно,

$$\tau \approx 2\pi - 4\lambda \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^3} = 2\pi - 4r \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}, \quad (3.57)$$

так как  $\sin \tau^0 = \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}$ . График зависимости  $\tau$  от  $\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\xi}$  (при постоянном  $\lambda$ ) дан на рис. 155 (при  $\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}$   $\frac{\partial \tau}{\partial r} = 0$ ). Рассматривая  $\tau$  как функцию  $\lambda$  и  $\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\xi}$ , нетрудно получить следующие выражения

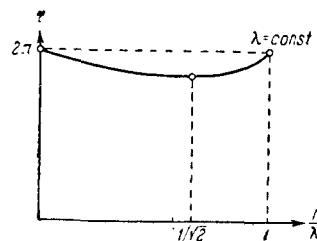


Рис. 155.

для стабильности хода часов при изменении силы заводного механизма и коэффициента трения:

$$\left. \begin{aligned} S_M &= \frac{1}{\frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} \right|_{\frac{r}{\lambda} = \text{const}}} = \frac{\pi \xi^2}{2\lambda \sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{\pi}{2r \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}} \\ S_f &= \frac{1}{\frac{r}{2\pi} \left| \frac{\partial \tau}{\partial r} \right|_{\lambda = \text{const}}} = \frac{2\pi \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}}{r \left( 1 - 2 \frac{r^2}{\lambda^2} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

и

Как видим, стабильность хода часов тем лучше, чем меньше  $r$  и  $\lambda$ , т. е. чем меньше трение в колебательной системе часов и чем слабее воздействие на нее со стороны спускового механизма по сравнению с моментом  $k\varphi_0$ . Во всяком случае, стабильность хода часов с балансиром, «обладающим собственным периодом», может быть сделана значительно более хорошей, чем стабильность часов с балансиром без «собственного периода» [23].

## § 6. Свойства простейших автоколебательных систем

На частных примерах часов и лампового генератора (с характеристикой, состоящей из прямолинейных отрезков), рассмотренных в предыдущих параграфах, мы познакомились с основными чертами весьма многочисленных и практически важных устройств, которые