и, следовательно,

$$\tau \approx 2\pi - 4\lambda \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} = 2\pi - 4r\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}, \tag{3.57}$$

так как $\sin \tau^0 = \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}$. График зависимости τ от $\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\xi}$ (при постоянном λ) дан на рис. 155 $\left(\text{при } \frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0\right)$. Рассматривая τ как функцию λ и $\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{\xi}$, нетрудно получить следующие выражения

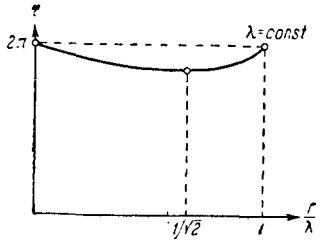

Рис. 155.

для стабильности хода часов при изменении силы заводного механизма и коэффициента трения:

$$\left.\begin{aligned} S_M &= \frac{1}{\frac{\lambda}{2\pi}\left|\frac{\partial \tau}{\partial \lambda}\right|_{\frac{r}{\lambda} = \text{const}}} = \frac{\pi \xi^2}{2\lambda\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{\pi}{2r\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}} \\ &\text{и} \\ S_f &= \frac{1}{\frac{r}{2\pi}\left|\frac{\partial \tau}{\partial r}\right|_{\lambda = \text{const}}} = \frac{2\pi\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}}{r\left(1 - 2\frac{r^2}{\lambda^2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.58}$$

Как видим, стабильность хода часов тем лучше, чем меньше r и λ, т. е. чем меньше трение в колебательной системе часов и чем слабее воздействие на нее со стороны спускового механизма по сравнению с моментом $k\varphi_0$. Во всяком случае, стабильность хода часов с балансиром, «обладающим собственным периодом», может быть сделана значительно более хорошей, чем стабильность часов с балансиром без «собственного периода» [23].

§ 6. Свойства простейших автоколебательных систем

На частных примерах часов и лампового генератора (с характеристикой, состоящей из прямолинейных отрезков), рассмотренных в предыдущих параграфах, мы познакомились с основными чертами весьма многочисленных и практически весьма важных устройств, которые

целесообразно объединить в отдельный своеобразный класс, именно класс *автоколебательных* систем. Общей чертой этих систем является их способность совершать *автоколебания*, т. е. такие колебания, амплитуда которых, с одной стороны, в течение долгого времени может оставаться постоянной, а с другой стороны, вообще говоря, не зависит от начальных условий и определяется не начальными условиями, а свойствами самой системы. К числу таких автоколебательных систем следует помимо рассмотренных нами (часы и ламповый генератор) относить, например, электрический звонок, всевозможные генераторы пилообразных и разрывных колебаний, дуговой генератор электрических колебаний, целый ряд музыкальных инструментов, как-то: духовые и смычковые инструменты и т. д. При известных условиях автоколебания могут возникнуть в передней подвеске автомобиля (так называемое явление «шимми» колес автомобиля). Автоколебательными системами являются и периодические переменные звезды типа цефеид [124, 54—56].

Свойство автоколебаний — независимость амплитуды от начальных условий — является весьма характерным их признаком. Однако не всегда автоколебательные системы обладают этим свойством в совершенно «чистом» виде. Так, например, амплитуда колебаний маятника часов, как мы видели, в известном смысле зависит от начальных условий. Если отклонить маятник мало, то он будет совершать затухающие колебания, часы остановятся. Для того чтобы установились незатухающие колебания (чтобы часы пошли), обычно нужно дать маятнику достаточно большое начальное отклонение или сообщить достаточно большую начальную скорость. Таким образом, целой области начальных условий (начальное отклонение больше данной величины) соответствует одна и та же амплитуда незатухающих колебаний. Как мы увидим в дальнейшем, в некоторых автоколебательных системах может существовать несколько стационарных процессов с различными амплитудами, и тот или другой из них устанавливается в зависимости от начальных условий, хотя и в этом случае целой области начальных условий соответствует одна и та же амплитуда незатухающих колебаний.

Другая типичная черта автоколебаний заключается в следующем: во всякой автоколебательной системе происходит компенсация потерь за счет какого-то источника энергии, и поэтому в автоколебательной системе непременно должен существовать такой источник энергии, причем, так как мы рассматриваем случай автономной системы, т. е. системы, на которую не действуют силы, явно зависящие от времени, то и источник энергии должен создавать силу, которая сама по себе не является заданной функцией времени, а определяется самой системой. Такова, например, анодная батарея в рассмотренном в предыдущей главе примере с ламповым генератором (или заводной механизм в часах); батарея дает некоторое постоянное напряжение, не зависящее от времени, но зато энергия, отдавае-

мая батареей, будет при колебаниях периодически изменяться. Так же как и для случая лампового генератора, для всех автоколебательных систем является весьма характерной именно такая связь между системой и источником энергии. Сам по себе источник отдавал бы постоянную энергию, но вследствие того, что работа, которую совершает этот источник, зависит от состояния системы (от ее координат и скоростей), действие источника энергии может стать периодическим, причем этот период определяется свойствами самой автоколебательной системы. Таким образом, автоколебательная система представляет собой устройство, которое из постоянного источника энергии периодически черпает известные порции энергии, т. е. *за счет непериодического источника энергии создает периодический процесс*. С точки зрения этого определения сразу видно, что, например, паровая машина является автоколебательной системой.

§ 7. Предварительное рассмотрение автоколебаний, близких к синусоидальным

Весьма общим классом автоколебательных систем с одной степенью свободы являются системы, описываемые уравнением [1])

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=F(x, \dot{x})-2h\dot{x}=f(x, \dot{x}). \tag{3.59}$$

К уравнению такого типа мы всегда приходим, если в составе нашей системы имеется колебательный контур с линейным затуханием. Если мы, например, имеем дело с обычным ламповым генератором, то $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$, $2h=\frac{R}{L}$, а $F(x, \dot{x})$ — приведенная [2]) э.д.с., действующая на колебательный контур благодаря обратной связи. Работа этой силы, в конечном счете, восполняет потери энергии, обусловленные наличием сопротивления, благодаря чему и становится возможным периодический процесс.

Как по заданной функции $f(x, \dot{x})$ (которую можно, например, предположить аналитической на всей фазовой плоскости x, $\dot{x}$) определить, возможны ли в системе устойчивые автоколебания, и если возможны, то хотя бы приближенно найти характеристики (амплитуду, период, форму) таких колебаний — эта задача является *основной* для теории нелинейных колебаний в автономных системах с одной степенью свободы. В сущности почти все дальнейшее изложение в той или иной форме связано с этой основной задачей. Однако, прежде чем перейти к систематическому изложению теории, мы

---

[1]) В ряде простейших случаев $F(x, \dot{x})$ не зависит от x, так что вместо (3.59) имеем:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\psi(\dot{x}).$$

[2]) Размерность $F(x, \dot{x})$ может не совпадать с размерностью электродвижущей силы.