мая батареей, будет при колебаниях периодически изменяться. Так же как и для случая лампового генератора, для всех автоколебательных систем является весьма характерной именно такая связь между системой и источником энергии. Сам по себе источник отдавал бы постоянную энергию, но вследствие того, что работа, которую совершает этот источник, зависит от состояния системы (от ее координат и скоростей), действие источника энергии может стать периодическим, причем этот период определяется свойствами самой автоколебательной системы. Таким образом, автоколебательная система представляет собой устройство, которое из постоянного источника энергии периодически черпает известные порции энергии, т. е. *за счет непериодического источника энергии создает периодический процесс*. С точки зрения этого определения сразу видно, что, например, паровая машина является автоколебательной системой.

§ 7. Предварительное рассмотрение автоколебаний, близких к синусоидальным

Весьма общим классом автоколебательных систем с одной степенью свободы являются системы, описываемые уравнением [1])

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=F(x, \dot{x})-2h\dot{x}=f(x, \dot{x}). \tag{3.59}$$

К уравнению такого типа мы всегда приходим, если в составе нашей системы имеется колебательный контур с линейным затуханием. Если мы, например, имеем дело с обычным ламповым генератором, то $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$, $2h=\frac{R}{L}$, а $F(x, \dot{x})$ — приведенная [2]) э.д.с., действующая на колебательный контур благодаря обратной связи. Работа этой силы, в конечном счете, восполняет потери энергии, обусловленные наличием сопротивления, благодаря чему и становится возможным периодический процесс.

Как по заданной функции $f(x, \dot{x})$ (которую можно, например, предположить аналитической на всей фазовой плоскости x, $\dot{x}$) определить, возможны ли в системе устойчивые автоколебания, и если возможны, то хотя бы приближенно найти характеристики (амплитуду, период, форму) таких колебаний — эта задача является *основной* для теории нелинейных колебаний в автономных системах с одной степенью свободы. В сущности почти все дальнейшее изложение в той или иной форме связано с этой основной задачей. Однако, прежде чем перейти к систематическому изложению теории, мы

---

[1]) В ряде простейших случаев $F(x, \dot{x})$ не зависит от x, так что вместо (3.59) имеем:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\psi(\dot{x}).$$

[2]) Размерность $F(x, \dot{x})$ может не совпадать с размерностью электродвижущей силы.

сейчас дадим предварительное, нестрогое рассмотрение важного класса автоколебаний, так называемых *автоколебаний, близких к синусоидальным* [1]), имеющее целью уяснить постановку задачи теоретического изучения автоколебаний. О колебаниях, близких к синусоидальным, предварительно заметим следующее. Если, например, мы знаем, что периодическое решение уравнения (3.59) существует и соответствующая ему замкнутая фазовая траектория расположена на фазовой плоскости вне круга фиксированного радиуса R_0 и если $f(x, \dot{x})$ достаточно мала всюду вне этого круга (мы предполагаем ω_0 заданным), то мы можем сказать, что наше решение будет достаточно близко к синусоидальному [2]). С другой стороны, как нетрудно видеть, требование малости функции $f(x, \dot{x})$ отнюдь не является необходимым. Возможны автоколебания, имеющие форму сколь угодно близкую к синусоидальной, хотя функция $f(x, \dot{x})$ принимает в некоторые моменты движения сколь угодно большие значения. С та-

---

[1]) Хотя автоколебания по своей физической природе, по характеру действующих сил, существенно отличаются от колебаний консервативных систем, тем не менее *форма* установившихся автоколебаний может сколь угодно мало отличаться от формы колебаний консервативной системы.

В частности, в ряде практически весьма важных случаев форма автоколебаний весьма мало отличается (в смысле малости клирфактора) от формы колебаний линейного гармонического осциллятора. Например, глядя на осциллограмму колебаний генератора с $\int$-характеристикой в случае малого h, мы не сможем отличить ее от осциллограммы гармонического осциллятора.

[2]) Чтобы пояснить смысл этого утверждения, приведем доказательство. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y;$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \varphi(x, y).$$

К такой системе легко преобразуется уравнение (3.59) после надлежащей замены переменных.

Пусть дано, что эта система имеет периодическое движение, фазовая траектория которого лежит вне круга радиуса R_0. Пусть, далее, вне круга радиуса R_0 $|\varphi(x, y)| < \varepsilon R_0$, где $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\dot{\varphi} = -1 + \frac{x\varphi(x, y)}{r^2};$$

$$\dot{r} = +\frac{y\varphi(x, y)}{r}.$$

Вне круга радиуса R_0

$$\left|\frac{x\varphi(x, y)}{r^2}\right| < \frac{|\varphi(x, y)|}{R_0} < \varepsilon < \frac{1}{2}; \quad \left|\frac{y\varphi(x, y)}{r}\right| < |\varphi(x, y)| < \varepsilon R_0.$$

Дадим оценку «поправки» к периоду гармонического осциллятора:

$$\int_0^{2\pi} \dot{\varphi}(t)\,dt = -2\pi + \alpha, \quad \text{где } |\alpha| < 2\pi\varepsilon,$$

кими системами мы имели дело в теории часов и в теории генератора с Г-характеристикой и с колебательным контуром в цепи сетки, так как очевидно, что если мы имеем дело с мгновенной передачей конечного количества движения, то это может произойти только в результате действия бесконечно большой силы.

Вопрос о характеристиках и, в частности, о спектральном составе периодического процесса, по крайней мере для случая автоколебаний, близких к синусоидальным, может быть приближенно продискутирован при помощи представления об *авторезонансе*, о котором мы уже упоминали при изложении теории генератора с Г-характеристикой.

Напомним предварительно некоторые элементарные положения обычной теории резонанса. Мы говорим о резонансе в линейном осцилляторе, когда под действием внешней периодической силы и силы трения, пропорциональной скорости, в нем поддерживается движение, близкое к одному из его собственных колебаний в том смысле, что период этого движения достаточно близок к собственному периоду осциллятора, а клирфактор достаточно мал. Пусть мы имеем внешнюю периодическую силу $\Phi(t)$ с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, действующую на гармонический осциллятор с линейным затуханием, собственная частота которого также равна ω (этот частный случай нас главным образом будет интересовать):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \Phi(t) - 2h\dot{x}. \tag{3.60}$$

Представим $\Phi(t)$ в виде:

$$\Phi(t) = P\cos\omega t + Q\sin\omega t + G(t), \tag{3.60a}$$

$$\int_0^\tau \dot{\varphi}(t)\,dt = -2\pi, \text{ где } \tau \text{ — искомый период.}$$

Отсюда $\left|\int_{2\pi}^{\tau} \dot{\varphi}(t)\,dt\right| < 2\pi\varepsilon$, что дает поправку к периоду $|\tau - 2\pi| < 4\pi\varepsilon$.

Оценим максимальное изменение радиуса-вектора за период:

$$\Delta r < \int_0^\tau |\dot{r}_{\max}|\,dt < \int_0^\tau \varepsilon R_0\,dt < \varepsilon R_0(2\pi + 4\pi\varepsilon).$$

Отсюда следует, что замкнутая траектория, соответствующая периодическому решению, лежит на фазовой плоскости между двумя концентрическими окружностями, разность радиусов которых меньше $R_0(2\pi\varepsilon + 4\pi\varepsilon^2)$. Само собой разумеется, что если мы заранее знаем, что траектория периодического движения лежит между окружностями с радиусами R_0 и R_1 ($R_1 > R_0$), то нам достаточно требовать малости $\varphi(x, y)$ лишь в области между двумя окружностями.

выделив резонансные члены [1]). Существует *определенное* собственное колебание

$$x_1(t) = \frac{P \sin \omega t - Q \cos \omega t}{2h\omega}, \tag{I}$$

для которого резонансные члены внешней силы компенсируются развивающейся при этом колебании силой трения. Нетрудно видеть, что при достаточно малом h (если $P^2 + Q^2 \neq 0$) в системе будет поддерживаться под действием силы $\Phi(t)$ периодическое движение, сколь угодно близкое к собственному колебанию (I) в том смысле, что для этого движения собственное колебание (I) будет как угодно сильно доминировать над остальными членами соответствующего разложения в ряд Фурье, или, говоря более точно, в том смысле, что для этого движения клирфактор будет как угодно мал. Докажем это утверждение. Обозначим разность между точным решением уравнения (3.60) и собственным колебанием $x_1(t)$ через $z(t)$, тогда $x(t) = x_1(t) + z(t)$. Очевидно, что $z(t)$ порождается нерезонансными членами $G(t)$ и удовлетворяет уравнению

$$\ddot{z} + \omega^2 z = G(t) - 2h\dot{z},$$

где

$$G(t) = \frac{P_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n \cos n\omega t + Q_n \sin n\omega t).$$

Понимая в дальнейшем под $z(t)$ «вынужденное» решение этого уравнения, т. е.

$$z(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \cos (n\omega t + \varphi_n),$$

где

$$C_n = \frac{\sqrt{P_n^2 + Q_n^2}}{\sqrt{(n^2-1)^2\omega^4 + 4h^2n^2\omega^2}} \leqslant \frac{\sqrt{P_n^2 + Q_n^2}}{\omega^2},$$

мы можем записать квадрат клирфактора рассматриваемого периодического движения в виде:

$$\varkappa^2 = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2}{\frac{P^2 + Q^2}{4h^2\omega^2}},$$

---

[1]) То есть подобрав постоянные P и Q так, чтобы

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t) \cos \omega t \, dt = 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t) \sin \omega t \, dt = 0.$$

или, так как

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2 < \frac{1}{\omega^4}\left[\frac{P_0^2}{2} + P^2 + Q^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(P_n^2 + Q_n^2)\right] = \frac{1}{\pi\omega^3}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G^2(t)\,dt,$$

$$\varkappa^2 \leqslant \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G^2(t)\,dt}{P^2 + Q^2}\,\frac{4h^2}{\pi\omega}.$$

Таким образом, условие малости клирфактора имеет вид

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{G^2(t)\,dt}{\pi\omega} \leqslant \frac{P^2 + Q^2}{4h^2}.$$

Если $\Phi(t)$ задано, то при достаточно малом h клирфактор сколь угодно мал, каков бы ни был спектр $\Phi(t)$, если только $P^2 + Q^2 \neq 0$.

Нас интересует сейчас не случай внешней силы (вынужденные колебания), а автоколебания, где сама система порождает действующую на нее силу. Уравнение движения здесь имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x}. \tag{3.59}$$

Предположим, что нам известно периодическое движение этой системы, соответствующее автоколебательному процессу: $x = \varphi(t)$, $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$. Очевидно, что это решение удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)] - 2h\dot{x}, \tag{3.61}$$

т. е. уравнению системы, находящейся под действием силы, явно зависящей от времени [1]). Таким образом, автоколебания можно рассматривать как вынужденные колебания, поддерживаемые внешней силой, вид которой определяется видом самих автоколебаний. Если функция времени $F[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ такова, что для нее выполняются условия резонанса, в частности если ее период достаточно близок к $\frac{2\pi}{\omega_0}$, то целесообразно говорить об авторезонансе [2]).

---

[1]) Заметим, что уравнению (3.61) удовлетворяет только рассматриваемое периодическое движение и, вообще говоря, ему *не удовлетворяют* другие движения, определяемые уравнением (3.59). Отсюда следует, что, исходя из решений этого неавтономного уравнения, нельзя, например, рассматривать вопросы устойчивости.

[2]) В частности, при помощи представления об авторезонансе можно заключить, что если функция $F[x(t), \dot{x}(t)]$ в уравнении (3.59) *как функция времени* практически не зависит от характера колебаний в контуре (например,

Заметим, что мы имеем известный произвол в выборе уравнения вида (3.61); например, часто бывает целесообразно писать это уравнение в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)\varphi - 2h\dot{x}, \tag{3.62}$$

где ω — частота автоколебаний, и таким образом рассматривать действие измененной внешней силы

$$F_1(\varphi, \dot{\varphi}) = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)\varphi$$

на линейный осциллятор с иной («поправленной») частотой. Ибо может оказаться, что при написании уравнения в виде (3.61) мы не будем иметь выполнения условий резонанса, в то время как при написании в виде (3.62) и подходящем выборе ω они будут выполняться.

Покажем теперь, как, пользуясь представлением об авторезонансе и *заранее постулировав* существование у уравнения (3.59) периодического решения, близкого к синусоидальному, можно получить приближенные выражения для амплитуды основного тона и для частоты этого решения.

Предположим, что периодическое решение уравнения (3.59) близко (в смысле малости клирфактора) к синусоидальному колебанию:

$$x_0(t) = A\cos\omega t; \quad \dot{x}_0(t) = -A\omega\sin\omega t,$$

где A и ω — пока неопределенные константы. Подставляя тогда в уравнение (3.62) вместо точного решения φ «нулевое приближение» $x_0(t) = A\cos\omega t$, мы можем опять, теперь уже приближенно, рассматривать автоколебания, как вынужденные колебания. Мы получаем, таким образом, следующую задачу о вынужденных колебаниях:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_1(A\cos\omega t, \ -A\omega\sin\omega t) - 2h\dot{x}. \tag{3.63}$$

Разлагая $F_1(A\cos\omega t, -A\omega\sin\omega t)$ в ряд Фурье, имеем (см. (3.60а)):

$$F_1(A\cos\omega t, \ -A\omega\sin\omega t) = P(A)\cos\omega t + Q(A)\sin\omega t + G(A, t),$$

где

$$P(A) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_1(A\cos\omega t, \ -A\omega\sin\omega t)\cos\omega t\, dt,$$

$$Q(A) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_1(A\cos\omega t, \ -A\omega\sin\omega t)\sin\omega t\, dt.$$

от величины размахов) и если при уменьшении затухания контура ее период стремится к периоду гармонического осциллятора $\frac{2\pi}{\omega_0}$, то при уменьшении затухания контура мы будем получать колебания все более и более синусоидальные. Это замечание имеет практический интерес. В частности, как раз такое положение дела мы имели в теории генератора с Г-характеристикой.

Вынужденное решение уравнения (3.63) имеет вид:

$$x_1(t) = \frac{P(A)\sin\omega t - Q(A)\cos\omega t}{2h\omega} + z_1(A, t),$$

где $z_1(A, t)$ — члены, порождаемые нерезонансным членом $G(A, t)$. Если предположить, что ω, $P(A)$ и $Q(A)$ заданы, то можно сказать, что существует определенное собственное колебание

$$\frac{P(A)\sin\omega t - Q(A)\cos\omega t}{2h\omega},$$

для которого резонансные члены внешней силы компенсируются развиваемой этим собственным колебанием силой трения. Очевидно, что мы можем отождествить это собственное колебание с тем собственным колебанием $x_0(t) = A\cos\omega t$, которое по нашему предположению порождает внешнюю силу. Это сразу дает два уравнения [1]):

$$P(A) = 0, \quad Q(A) + 2h\omega A = 0, \tag{3.64}$$

которые «отбирают» те A и ω, которые характеризуют возможные автоколебания, близкие к синусоидальным.

Однако следует ясно отдать себе отчет, что найденные по уравнениям (3.63) амплитуда и частота, вообще говоря, отнюдь не являются амплитудой основного тона и частотой *точного* периодического решения (даже если, как мы предположили, такое точное решение действительно существует и имеет малый клирфактор [2])), так как мы при переходе к «вынужденному» рассмотрению вместо точного решения подставили $A\cos\omega t$. Можно ожидать, что мы получим следующее приближение к амплитуде основного тона и частоте

---

[1]) Эти уравнения часто называют уравнениями, получаемыми путем приравнивания нулю коэффициентов при «резонансных членах». Поясним происхождение этого названия и одновременно дадим другой, с известной точки зрения более убедительный, вывод этих уравнений. Именно, вместо уравнения (3.62) рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)\, x - 2h\dot{\varphi} = f_1(\varphi, \dot{\varphi}).$$

Предполагая существование колебаний, близких к синусоидальному колебанию $x = A\cos\omega t$, получаем задачу из теории вынужденных колебаний гармонического осциллятора *без трения*:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = P(A)\cos\omega t + [Q(A) + 2h\omega A]\sin\omega t + G(A, t).$$

Как известно, отсутствие неограниченного нарастания колебаний может иметь место в рассматриваемом случае лишь тогда, когда коэффициенты при резонансных членах внешней силы равны нулю. Это замечание снова приводит к уравнениям (3.64).

[2]) Следует подчеркнуть, что наличие действительных решений уравнений (3.64) еще само по себе ничего не говорит о существовании периодических решений дифференциального уравнения (3.59).

точного решения, если мы при «вынужденном» рассмотрении вместо нулевого приближения подставим «первое приближение»[1]):

$$x_1(t) = A\cos\omega t + z_1(A, t).$$

Мы получим совершенно аналогичным образом (вместо (3.64)) новые, вообще говоря, измененные условия для определения A и ω, а также найдем «второе приближение»:

$$x_2(t) = A\cos\omega t + z_2(A, t).$$

Такой процесс составления уравнений для определения A и ω и составления последовательных «приближений» можно продолжать неограниченно. Если этот процесс сходящийся, то может оказаться, что мы таким путем найдем точное решение. Для обоснования этого процесса и для доказательства существования периодического решения нужно специальное математическое рассмотрение. Мы затронем связанные с этим вопросы в дальнейшем, когда будем изучать количественные методы Пуанкаре.

Предположение о том, что автоколебания близки к синусоидальным, широко используется в теории колебаний для решения ряда задач. Например, такие приближенные количественные методы рассмотрения ламповых генераторов, как метод Баркгаузена — Мёллера (метод «средней крутизны» или «квазилинейный» метод) [18, 136, 178, 73, 74, 29] или как метод Ван-дер-Поля [186, 90], основаны на этом предположении. Также и методы Пуанкаре [184, 185] удобно применять в тех случаях, когда колебания близки к синусоидальным[2]).

В заключение параграфа для иллюстрации введенного здесь представления об авторезонансе проведем вычисление периода и амплитуды автоколебаний часов со спуском с отходом назад и балансиром с собственным периодом — часов, рассмотренных нами в пункте 2 § 5 настоящей главы.

Запишем уравнение движения таких часов (3.49) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_1(x, \dot{x}) + (\omega^2 - 1)x = F(x, \dot{x}),$$

---

[1]) Заметим, что если «первое приближение» с достаточной точностью представляет искомое периодическое движение, которое по нашему предположению близко к синусоидальному, то для него должно соблюдаться условие малости клирфактора. Однако, если это условие выполнено, то мы, вообще говоря, еще ничего не можем сказать о том, будут ли полученные из уравнений (3.64) A и ω с достаточной точностью представлять тон нашего решения, и о том каков будет клирфактор для дальнейших «приближений».

[2]) Условия близости колебаний к синусоидальным соблюдаются, конечно, далеко не всегда. В некоторых случаях эти условия не могут быть выполнены, а в других специально выбирают такие условия работы системы, чтобы колебания имели заданную форму, значительно отличающуюся от синусоидальной. Таковы, например, всевозможные мультивибраторы, генераторы напряжения пилообразной формы и т. п.

где $F_1(x, \dot{x}) = -r \operatorname{sgn} \dot{x} - (-1)^n \lambda$ — сумма приведенных моментов сил сухого трения и спускового устройства. Предположим, что периодическое решение этого уравнения близко к синусоидальному:

$$x = A \cos \omega t$$

(это, как мы видели, имеет место при $r < \lambda \ll 1$). Такое колебание, а также вид функции F_1 для этого колебания изображены на рис. 156. Вычислив первые коэффициенты Фурье для функции $F[x(t), \dot{x}(t)]$

$$P(A) = \frac{4}{\pi}\left[r - \frac{\lambda}{A}\right],$$

$$Q(A) = (\omega^2 - 1) A - \frac{4\lambda}{\pi}\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}},$$

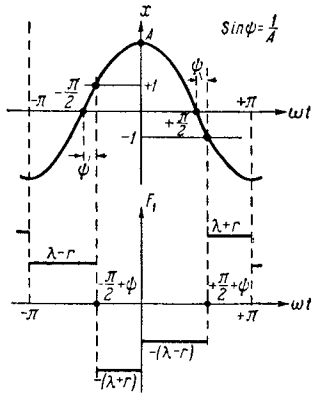

Рис. 156.

получим следующие уравнения (в соответствии с (3.64)) для амплитуды A и частоты ω периодического решения:

$$r - \frac{\lambda}{A} = 0, \quad (\omega^2 - 1) A - \frac{4\lambda}{\pi}\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} = 0,$$

откуда

$$A = \frac{\lambda}{r}, \quad \omega^2 = 1 + \frac{4\lambda}{\pi A}\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} = 1 + \frac{4r}{\pi}\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}.$$

Учитывая, что автоколебания рассматриваемых часов близки к синусоидальным только при $r, \lambda \ll 1$, получим:

$$\omega \approx 1 + \frac{2r}{\pi}\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi - 4r\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}.$$

Полученные соотношения, очевидно, совпадают с формулами (3.54) и (3.57), являющимися результатом строгого рассмотрения той же задачи для случая $r, \lambda \ll 1$.