ГЛАВА IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА [1])

Мы приступим сейчас к систематическому изложению теории нелинейных систем и методов исследования и решения нелинейных дифференциальных уравнений, обратив особое внимание на вопросы так называемого качественного интегрирования, о важности которого мы уже упоминали. Однако наша задача будет заключаться не столько в том, чтобы дать математически безупречные доказательства всем высказываемым утверждениям, или в том, чтобы дать исчерпывающую классификацию всех возможных случаев, сколько в том, чтобы пояснить идею качественного интегрирования и развить существующие методы в связи с их применениями к теории колебаний и к некоторым другим вопросам.

Наиболее общим случаем среди тех, которыми мы ограничили наше рассмотрение, является нелинейная система, описываемая одним нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, или, что то же самое, двумя дифференциальными уравнениями первого порядка. Однако мы начнем изложение общей теории не с этого общего случая, а с более простого случая нелинейных систем первого порядка (систем с $^1/_2$ степени свободы), т. е. таких динамических моделей, движение которых описывается одним нелинейным дифференциальным уравнением *первого порядка:*

$$\frac{dx}{dt}=f(x). \tag{4.1}$$

К таким динамическим моделям приводит при соответствующих упрощающих предположениях рассмотрение ряда задач, имеющих определенный физический интерес.

Прежде всего мы рассмотрим системы, движение которых с достаточной точностью определяется уравнением (4.1) с правой частью $f(x)$, являющейся аналитической функцией на всей прямой x, за исключением, может быть, некоторого конечного числа точек.

---

[1]) § 6 п. 2 данной главы переработан Н. А. Железцовым, § 5 (пп. 2—4, 6), § 6 п. 1 и § 7 написаны им заново.

Общая теория, которую мы будем излагать, имеет конечной целью установление зависимости координаты системы от времени, т. е. вида функции $x(t)$, установление же картины в одномерном фазовом «пространстве», т. е. на фазовой прямой, играет лишь вспомогательную, хотя и весьма существенную роль.

§ 1. Теорема существования и единственности

Рассмотрим плоскость t, x. Решениями нашего уравнения $x=\varphi(t)$ являются кривые на плоскости t, x. Эти кривые мы также будем называть интегральными кривыми (их не следует, однако, смешивать с фазовыми траекториями и интегральными кривыми на фазовой плоскости).

Пусть нам даны начальные условия: $x=x_0$ при $t=t_0$, или, иначе, пусть на плоскости t, x дана точка с координатами (t_0, x_0). Если для уравнения (4.1) выполнены условия теоремы Коши [1]) (например, если функция $f(x)$ является аналитической на некотором интервале,

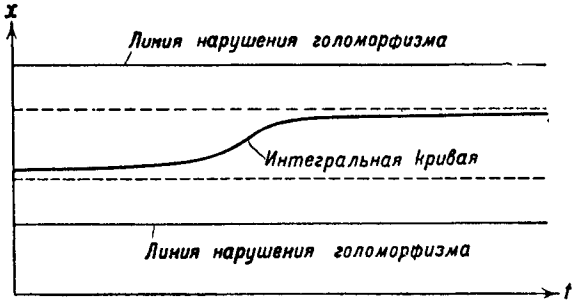

Рис. 157.

включающем x_0), то имеется единственное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее этим начальным условиям, или, иначе, через точку (t_0, x_0) проходит единственная интегральная кривая. Эта интегральная кривая продолжается во всяком случае до тех пор, пока x не дойдет до того значения, при котором $f(x)$ неголоморфна. Если функция $f(x)$ аналитическая на всей прямой, то решение продолжаемо до тех пор, пока x не уходит в бесконечность [2]). Если же x не уходит в бесконечность, то решение продолжаемо от $t=-\infty$ до $t=+\infty$.

Даже тогда, когда существуют точки нарушения голоморфизма, возможны случаи продолжаемости решения от $t=-\infty$ до $t=+\infty$. В этих случаях решение, например, протекает между двумя прямыми, параллельными оси t, ординаты которых являются точками нарушения голоморфизма для функции $f(x)$ (рис. 157).

---

[1]) См. Дополнение I.

[2]) Заметим, что это может случиться в конечное время. Тогда решение продолжаемо (в указанном здесь смысле) вплоть до этого момента. В качестве простого примера можно указать на уравнение $\frac{dx}{dt}=1+x^2$.

Резюмируя, можно сказать следующее. Вся плоскость t, x может быть разбита на полосы, границы которых представляют собой прямые, параллельные оси t, такие, что их ординаты являются точками нарушения голоморфизма функции $f(x)$. В каждой такой полосе через каждую точку проходит единственная интегральная кривая. Эти кривые аналитические и не пересекаются друг с другом внутри полосы.

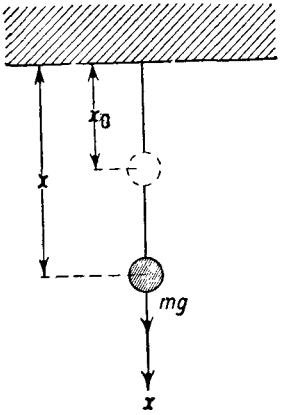

Рис. 158.

Из сформулированной теоремы мы ничего не можем заключить о том, что́ происходит на границах этих полос. Там может быть как непрерывный переход интегральной кривой через границу, так и всевозможные случаи нарушения непрерывности.

Рассмотрим пример, имеющий физический интерес, когда условия теоремы Коши не выполнены. Именно, рассмотрим равноускоренное падение тела массы m с ускорением g в случае, когда начальная скорость равна нулю (рис. 158).

На основании закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(x - x_0),$$

откуда, беря корень с положительным знаком (мы ограничиваемся рассмотрением движения в одном направлении), получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{2g(x - x_0)}. \tag{4.2}$$

Найдем решение этого уравнения, соответствующее начальным условиям $t = t_0$; $x = x_0$. Нетрудно видеть, что при этом значении x функция $f(x) = \sqrt{2g(x - x_0)}$ неголоморфна, так как производная $f'(x)$ обращается в бесконечность при $x = x_0$ и, следовательно, в этой точке не существует разложения в ряд Тейлора. Таким образом, на плоскости t, x вдоль прямой $x = x_0$ условия теоремы Коши не соблюдены. Отсюда мы можем заключить, что в точках этой прямой возможны случаи неединственности решений, случаи несуществования и т. д.

В рассматриваемом примере можно решить этот вопрос непосредственным интегрированием. Именно, уравнение (4.2) имеет при рассматриваемых начальных условиях решение:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2$$

(заметим, что у этих парабол мы должны рассматривать только их

правые от оси симметрии части, так как $\frac{dx}{dt} \geqslant 0$ в силу условия, наложенного на знак корня).

Кроме этого решения уравнение имеет еще одно решение, удовлетворяющее тем же начальным условиям:

$$x = x_0.$$

Это решение может быть получено по обычным правилам как огибающая семейства парабол $x - x_0 = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$ с переменным параметром t_0. Таким образом, мы видим (рис. 159), что через каждую точку прямой $x = x_0$ проходит не одна, а две интегральные кривые, т. е. условия единственности решения нарушены.

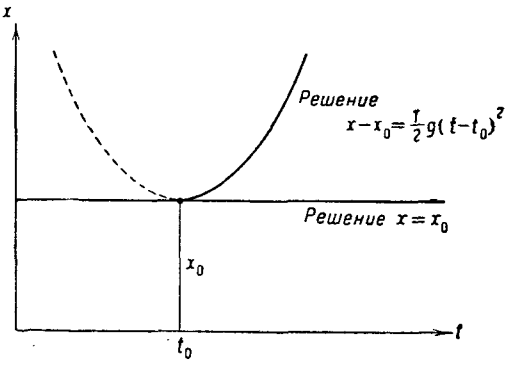

Рис. 159.

Нетрудно указать физический смысл неединственности решения. Мы исходили при исследовании падения тела не из ньютоновского закона движения $m\frac{d^2x}{dt^2} = f$, а из закона сохранения энергии. С точки зрения закона сохранения энергии тело может при выбранных нами начальных условиях как падать равноускоренно, так и находиться в покое. Этим еще раз иллюстрируется, даже для случая одной степени свободы, хорошо известное обстоятельство, что закон сохранения энергии является недостаточным для установления законов движения.

§ 2. Качественный характер кривых на плоскости t, x в зависимости от вида функции $f(x)$

Предположим, что $f(x)$ — функция, аналитическая для всякого значения x. Посмотрим, какие существуют при этом возможные решения. Пусть уравнение $f(x) = 0$ не имеет действительных корней. Тогда $\frac{dx}{dt}$ сохраняет все время один и тот же знак, и все решения суть монотонные функции, возрастающие или убывающие от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет действительные корни $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_k$, которые, очевидно, соответствуют состояниям равновесия. Соответствующие интегральные кривые на плоскости t, x — прямые, параллельные оси t и разбивающие плоскость t, x на полосы. Так как интегральные кривые не могут пересекаться