правые от оси симметрии части, так как $\frac{dx}{dt} \geqslant 0$ в силу условия, наложенного на знак корня).

Кроме этого решения уравнение имеет еще одно решение, удовлетворяющее тем же начальным условиям:

$$x = x_0.$$

Это решение может быть получено по обычным правилам как огибающая семейства парабол $x - x_0 = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$ с переменным параметром t_0. Таким образом, мы видим (рис. 159), что через каждую точку прямой $x = x_0$ проходит не одна, а две интегральные кривые, т. е. условия единственности решения нарушены.

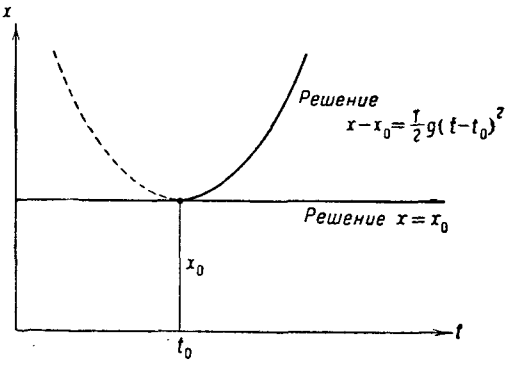

Рис. 159.

Нетрудно указать физический смысл неединственности решения. Мы исходили при исследовании падения тела не из ньютоновского закона движения $m\frac{d^2x}{dt^2} = f$, а из закона сохранения энергии. С точки зрения закона сохранения энергии тело может при выбранных нами начальных условиях как падать равноускоренно, так и находиться в покое. Этим еще раз иллюстрируется, даже для случая одной степени свободы, хорошо известное обстоятельство, что закон сохранения энергии является недостаточным для установления законов движения.

§ 2. Качественный характер кривых на плоскости t, x в зависимости от вида функции $f(x)$

Предположим, что $f(x)$ — функция, аналитическая для всякого значения x. Посмотрим, какие существуют при этом возможные решения. Пусть уравнение $f(x) = 0$ не имеет действительных корней. Тогда $\frac{dx}{dt}$ сохраняет все время один и тот же знак, и все решения суть монотонные функции, возрастающие или убывающие от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет действительные корни $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_k$, которые, очевидно, соответствуют состояниям равновесия. Соответствующие интегральные кривые на плоскости t, x — прямые, параллельные оси t и разбивающие плоскость t, x на полосы. Так как интегральные кривые не могут пересекаться

(в силу теоремы Коши), то каждая интегральная кривая должна целиком заключаться в одной из таких полос и, следовательно, быть монотонной, так как внутри полосы $f(x)$ не меняет знака. Более того, нетрудно видеть, что если интегральная кривая заключена в полосе между двумя параллельными оси t прямыми ($x=x_i$, $x=x_{i+1}$), являющимися решениями нашего дифференциального уравнения, то она асимптотически приближается к одной из этих прямых при $t\to+\infty$, к другой при $t\to-\infty$. Если же интегральная кривая заключена в части плоскости, ограниченной такой прямой, параллельной оси t, только с одной стороны, то эта интегральная кривая либо при возрастании t, либо при убывании t уходит в бесконечность; в другую же сторону она стремится к граничной прямой.

Таким образом, зная $f(x)$, нетрудно выяснить качественный характер кривых на плоскости t, x.

Очевидно, что эти кривые, если только $f(x)$ — аналитическая функция, не могут быть периодическими, так как они монотонны. Это замечание впоследствии окажется существенным.

§ 3. Представление движения на фазовой прямой

Рассмотрим теперь представление исследуемых движений в одномерном пространстве, в частности на фазовой прямой. Метод отображения движения при этом применяется тот же самый, как и в случае двумерной фазовой плоскости. Рассматриваемый случай, однако, более прост, так как здесь мы имеем дело с одномерным движением изображающей точки (рис. 160).

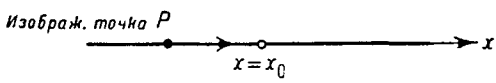

Рис. 160.

Пусть для данного x изображающая точка имеет скорость $f(x)$, т. е. ее движение подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt}=f(x). \tag{4.1}$$

Предположим, как мы уже делали, что на всей прямой, кроме, может быть, конечного числа точек, $f(x)$ — аналитическая функция. Тогда в силу теоремы Коши задание начального значения $x=x_0$ в начальный момент времени $t=t_0$ однозначно определит дальнейшее движение изображающей точки, по крайней мере до тех пор, пока изображающая точка не подойдет к границе области аналитичности.

Проследим движение во времени изображающей точки, находившейся в момент $t=t_0$ в области аналитичности. Проследим это движение в пределах от $t=-\infty$ до $t=+\infty$, если во время движе-