(в силу теоремы Коши), то каждая интегральная кривая должна целиком заключаться в одной из таких полос и, следовательно, быть монотонной, так как внутри полосы $f(x)$ не меняет знака. Более того, нетрудно видеть, что если интегральная кривая заключена в полосе между двумя параллельными оси t прямыми ($x=x_i$, $x=x_{i+1}$), являющимися решениями нашего дифференциального уравнения, то она асимптотически приближается к одной из этих прямых при $t\to+\infty$, к другой при $t\to-\infty$. Если же интегральная кривая заключена в части плоскости, ограниченной такой прямой, параллельной оси t, только с одной стороны, то эта интегральная кривая либо при возрастании t, либо при убывании t уходит в бесконечность; в другую же сторону она стремится к граничной прямой.

Таким образом, зная $f(x)$, нетрудно выяснить качественный характер кривых на плоскости t, x.

Очевидно, что эти кривые, если только $f(x)$ — аналитическая функция, не могут быть периодическими, так как они монотонны. Это замечание впоследствии окажется существенным.

§ 3. Представление движения на фазовой прямой

Рассмотрим теперь представление исследуемых движений в одномерном пространстве, в частности на фазовой прямой. Метод отображения движения при этом применяется тот же самый, как и в случае двумерной фазовой плоскости. Рассматриваемый случай, однако, более прост, так как здесь мы имеем дело с одномерным движением изображающей точки (рис. 160).

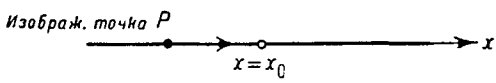

Рис. 160.

Пусть для данного x изображающая точка имеет скорость $f(x)$, т. е. ее движение подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt}=f(x). \tag{4.1}$$

Предположим, как мы уже делали, что на всей прямой, кроме, может быть, конечного числа точек, $f(x)$ — аналитическая функция. Тогда в силу теоремы Коши задание начального значения $x=x_0$ в начальный момент времени $t=t_0$ однозначно определит дальнейшее движение изображающей точки, по крайней мере до тех пор, пока изображающая точка не подойдет к границе области аналитичности.

Проследим движение во времени изображающей точки, находившейся в момент $t=t_0$ в области аналитичности. Проследим это движение в пределах от $t=-\infty$ до $t=+\infty$, если во время движе-

ния изображающая точка не выйдет из области аналитичности, и в пределах от $t=\tau_1$ до $t=\tau_2$ ($\tau_1<t_0<\tau_2$), если изображающая точка к моментам τ_1, τ_2 подходит к границе области аналитичности. При этом движении изображающая точка опишет или точку (в частном случае покоя), или отрезок прямой, или полупрямую, или, наконец, всю прямую, которые таким образом являются возможными *траекториями* движений на фазовой прямой. Характер движения изображающей точки по фазовой прямой не зависит от того, в какой момент это движение началось, так как уравнения движения не зависят явно от времени. С этим связано то обстоятельство, что каждая отдельная траектория на фазовой прямой соответствует не одному движению, а бесконечному множеству движений, начинающихся в различные времена.

Каждым двум точкам A и B, расположенным на одной и той же траектории, соответствует определенный (конечный) промежуток времени, в течение которого изображающая точка проходит расстояние от A до B. Заметим, что изображающая точка, двигающаяся по траектории, не может достигнуть точки равновесия (точки равновесия, как мы знаем, определяются уравнением $f(x)=0$) в конечный промежуток времени. Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы Коши. Действительно, если бы изображающая точка, двигающаяся по закону $x=\varphi(t)$, достигла при каком-то конечном $t=t_0$ состояния равновесия $x=x_0$, то мы имели бы два *различных* решения дифференциального уравнения (первое $x=\varphi(t)$ и второе $x=x_0$), принимающих одно и то же значение при $t=t_0$, что противоречит теореме Коши. Траектория изображающей точки, которая в этом случае асимптотически стремится к состоянию равновесия, не достигая его в конечное время, будет представлять собой или отрезок или полупрямую, концом которой является точка $x=x_0$ (рис. 160). Существенным здесь является то обстоятельство, что сама точка $x=x_0$ не принадлежит к рассматриваемой траектории, а является самостоятельной траекторией. Это ясно в силу того, что какой бы конечный момент времени мы ни взяли, изображающая точка будет находиться на конечном расстоянии от точки $x=x_0$, хотя, может быть, это расстояние и будет очень мало. Сформулируем теперь для фазовой прямой теорему о непрерывной зависимости решения от начальных условий[1]).

Рассмотрим движение двух изображающих точек $P_1\{x=x_1(t)\}$ и $P_2\{x=x_2(t)\}$, начавших двигаться в один и тот же момент времени $t=t_0$, и проследим их в течение некоторого конечного промежутка времени T, в течение которого изображающая точка P_1 не выходит из области аналитичности. Тогда теорема о непрерывной

---

[1]) Мы даем теперь несколько иную формулировку этой теоремы по сравнению с даваемой в Дополнении I — формулировку, которая приспособлена к одномерному фазовому пространству.

зависимости от начальных условий гласит: каково бы ни было T и каково бы ни было ε ($\varepsilon > 0$), всегда можно найти такое δ $\{\delta(\varepsilon, T) > 0\}$, чтобы

$$|x_1(t) - x_2(t)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T,$$

если

$$|x_1(t_0) - x_2(t_0)| < \delta,$$

т. е. всегда можно выбрать начальные значения настолько мало отличающимися друг от друга, чтобы движения изображающих точек за данный промежуток времени T как угодно мало отличались друг от друга.

Перейдем теперь к исследованию траекторий на фазовой прямой в зависимости от вида функции $f(x)$.

Предположим, что $f(x)$ — функция, аналитическая на всей прямой x. Если уравнение $f(x) = 0$ не имеет действительных корней, то все движения имеют одну и ту же траекторию, совпадающую со всей фазовой прямой. Если же $f(x)$ имеет действительные корни $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, ..., $x = x_k$, то могут быть траектории различных типов:

а) состояния равновесия;

б) интервалы между двумя корнями;

в) интервалы между одним из корней и бесконечностью (полупрямые).

На каждой траектории движение происходит в какую-нибудь определенную сторону, так как $f(x)$ не меняет знака на траектории. Если $f(x) > 0$, то изображающая точка движется вправо; если $f(x) < 0$,

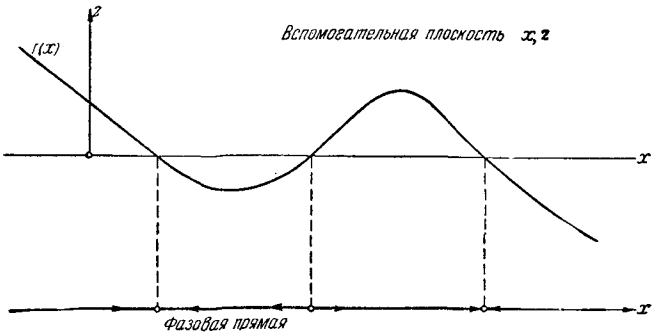

Рис. 161.

то изображающая точка движется влево; точки, где $f(x) = 0$, как мы уже говорили, соответствуют состояниям равновесия. Зная вид кривой $z = f(x)$ и пользуясь этими соображениями, можно разбить фазовую прямую на траектории и указать направление движения изо-

бражающей точки по траекториям[1]). Пример такого построения приведен на рис. 161. Разбитая на траектории фазовая прямая дает наглядное отображение возможных движений рассматриваемой динамической системы, описываемой одним дифференциальным уравнением первого порядка. Очевидно, что основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия. Зная состояния равновесия и их устойчивость, мы можем нарисовать себе качественную картину возможных движений. В частности, отсюда сразу видно, что в случае аналитичности $f(x)$ на всей прямой в системе невозможны периодические движения. Поведение интегральных кривых на плоскости t, x можно установить, если известен характер движений изображающей точки на фазовой прямой. Рассмотрим плоскость t, x, причем фазовую прямую совместим с осью x. Пусть изображающая точка двигается по фазовой прямой. Построим на плоскости t, x точку с абсциссой t и с ординатой, равной смещению изображающей точки по оси x в данный момент t. Абсцисса этой точки есть время и поэтому меняется; ордината, вообще говоря, тоже меняется, так как изображающая точка

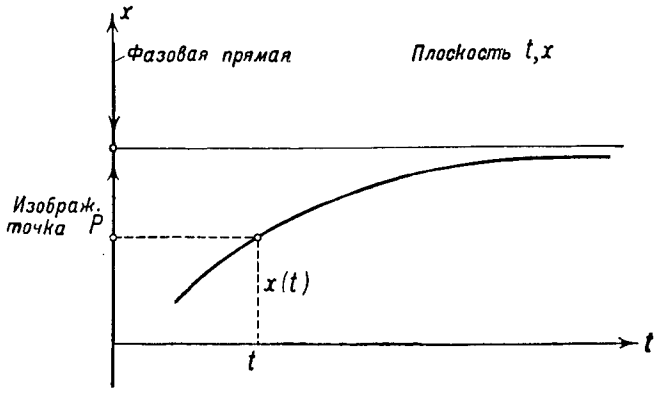

Рис. 162.

двигается. Следовательно, точка будет двигаться на плоскости t, x, описывая какую-то кривую. Эта кривая и будет интегральной кривой нашего уравнения (рис. 162).

§ 4. Устойчивость состояний равновесия

В свое время мы дали уже определение устойчивости состояния равновесия, следуя Ляпунову. Посмотрим, как выглядит это определение для рассматриваемого случая и каким образом возможно

[1]) Стрелками на фазовой прямой указывается направление движения изображающей точки.