бражающей точки по траекториям[1]). Пример такого построения приведен на рис. 161. Разбитая на траектории фазовая прямая дает наглядное отображение возможных движений рассматриваемой динамической системы, описываемой одним дифференциальным уравнением первого порядка. Очевидно, что основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия. Зная состояния равновесия и их устойчивость, мы можем нарисовать себе качественную картину возможных движений. В частности, отсюда сразу видно, что в случае аналитичности $f(x)$ на всей прямой в системе невозможны периодические движения. Поведение интегральных кривых на плоскости t, x можно установить, если известен характер движений изображающей точки на фазовой прямой. Рассмотрим плоскость t, x, причем фазовую прямую совместим с осью x. Пусть изображающая точка двигается по фазовой прямой. Построим на плоскости t, x точку с абсциссой t и с ординатой, равной смещению изображающей точки по оси x в данный момент t. Абсцисса этой точки есть время и поэтому меняется; ордината, вообще говоря, тоже меняется, так как изображающая точка

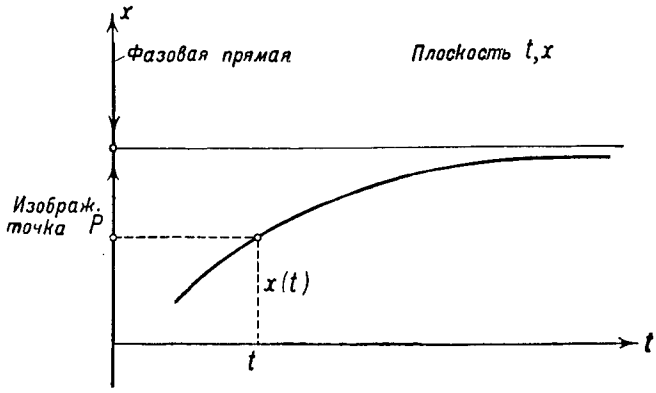

Рис. 162.

двигается. Следовательно, точка будет двигаться на плоскости t, x, описывая какую-то кривую. Эта кривая и будет интегральной кривой нашего уравнения (рис. 162).

§ 4. Устойчивость состояний равновесия

В свое время мы дали уже определение устойчивости состояния равновесия, следуя Ляпунову. Посмотрим, как выглядит это определение для рассматриваемого случая и каким образом возможно

[1]) Стрелками на фазовой прямой указывается направление движения изображающей точки.

аналитически распознавать устойчивость или неустойчивость состояний равновесия.

В нашем случае состояние равновесия $x = x_0$ будет устойчиво по Ляпунову, если, задав сколь угодно малое положительное ε, можно всегда найти такое δ, что

$$|x(t) - x_0| < \varepsilon \quad \text{для} \quad t_0 \leqslant t < +\infty, \quad \text{если} \quad |x(t_0) - x_0| < \delta.$$

Ляпунов дает аналитический рецепт исследования устойчивости состояний равновесия. Мы изложим сперва самый рецепт, а затем дадим его обоснование.

Пусть нас интересует устойчивость состояния равновесия $x = x_0$. Так как мы подразумеваем при этом устойчивость по Ляпунову, то мы интересуемся малыми отклонениями от состояния равновесия. Положим $x = x_0 + \xi$; тогда ξ — отклонение от состояния равновесия. По нашему предположению $f(x)$ — аналитическая функция. Переходя от переменной x к переменной ξ в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{4.1}$$

получим:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + \frac{1}{1 \cdot 2} f''(x_0)\xi^2 + \ldots$$

или, так как $f(x_0) = 0$, то уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots, \tag{4.3}$$

где

$$a_1 = f'(x_0); \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \quad \text{и т. д.}$$

Данный Ляпуновым рецепт исследования устойчивости сводится к следующему. Отбросим в уравнении (4.3) нелинейные члены. Мы получим тогда *линейное* уравнение:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi, \tag{4.4}$$

которое носит название линеаризованного уравнения или уравнения первого приближения. Интеграл этого уравнения находится сразу:

$$\xi = ce^{\lambda t}, \quad \text{где} \quad \lambda = a_1 = f'(x_0).$$

Ляпунов утверждает, что если $\lambda < 0$, то решение $x = x_0$ уравнения (4.1) устойчиво, т. е. что состояние равновесия устойчиво; если $\lambda > 0$, то состояние равновесия неустойчиво; если $\lambda = 0$, то уравнение первого приближения, вообще говоря, не может дать ответа на вопрос об устойчивости. Таким образом, Ляпунов утверждает, что в известных случаях уравнения, полученные путем отбрасывания не-

линейных членов, могут дать правильный ответ на вопрос об устойчивости решений нелинейных уравнений.

В рассматриваемом простом случае весьма нетрудно обосновать этот рецепт исследования устойчивости. Умножая обе части уравнения (4.3) на ξ, будем иметь:

$$\frac{1}{2}\frac{d(\xi^2)}{dt}=a_1\xi^2+a_2\xi^3+\ldots=F(\xi). \tag{4.5}$$

Представим $F(\xi)$ при помощи теоремы Тейлора, замечая, что

$$F(0)=0,\quad F'(0)=0,\quad F''(0)=2a_1,$$

$$F(\xi)=\frac{\xi^2}{1\cdot 2}F''(\vartheta\xi)\qquad (\text{где } 0<\vartheta<1),$$

и положим $\rho=\frac{1}{2}\xi^2$; тогда уравнение (4.5) примет вид

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\xi^2}{1\cdot 2}F''(\vartheta\xi). \tag{4.6}$$

Если $F''(0)<0$ (или, что то же самое, $a_1<0$), то в силу непрерывности функции $F''(\xi)$ и $F''(\vartheta\xi)<0$ для достаточно малых $|\xi|$. Отсюда следует по (4.6), что и $\frac{d\rho}{dt}<0$ для тех же $|\xi|$. Если $\rho=\frac{1}{2}\xi^2$ уменьшается, то уменьшается и $|\xi|$ и никогда не сможет начать увеличиваться. Отсюда следует, что условие $a_1=f'(x_0)<0$ достаточно для устойчивости по Ляпунову рассматриваемого состояния равновесия $x=x_0$, так как в этом случае вокруг $x=x_0$ всегда существует такая область начальных значений, из которой наша изображающая точка будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия.

Совершенно таким же образом можно показать, что при $a_1=f'(x_0)>0$ состояние равновесия $x=x_0$ неустойчиво по Ляпунову.

Таким образом, рецепт Ляпунова оправдывается, так как результат исследования устойчивости состояния равновесия при помощи полного нелинейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt}=a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+\ldots$$

совпадает с результатом исследования устойчивости при помощи линейного уравнения

$$\frac{d\xi}{dt}=a_1\xi,$$

если $a_1\neq 0$. Основание для указанного отбрасывания нелинейных членов, таким образом, состоит в том, что нелинейные члены при малых значениях ξ весьма малы по сравнению с основным линейным членом; когда же линейный член равен нулю, то вопрос требует особого исследования.

Мы привели рассуждения, связанные с отбрасыванием нелинейных членов, поскольку аналогичные рассуждения нам будут встречаться при рассмотрении более сложных динамических систем и поскольку в нашем простейшем случае особенно отчетливо вырисовывается идея, лежащая в основе метода Ляпунова. Но, с другой стороны, в нашем конкретном случае одного уравнения первого порядка нетрудно непосредственно, исследуя характер функции $f(x)$ вблизи состояния равновесия $x=x_0$, однозначным образом заключить об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия.

Так как $f(x_0)=0$, то здесь могут быть три существенно различных случая:

1) $f(x)$ меняет знак вблизи состояния равновесия $x=x_0$ с плюса на минус при возрастании x (рис. 163). Отсюда следует на основании предыдущего, что изображающая точка, находящаяся в доста-

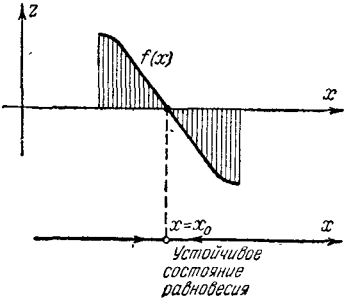

Рис. 163.

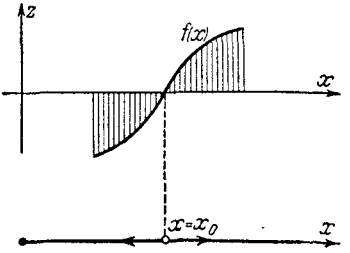

Рис. 164.

точной близости к состоянию равновесия $x=x_0$, будет асимптотически к нему приближаться при возрастании t. Ясно, что в этом случае состояние равновесия устойчиво по Ляпунову.

2) $f(x)$ меняет знак вблизи состояния равновесия $x=x_0$ с минуса на плюс при возрастании x (рис. 164). Это значит, что изображающая точка, помещенная в достаточной близости к состоянию равновесия, будет удаляться от состояния равновесия; отсюда следует, что состояние равновесия неустойчиво в смысле Ляпунова.

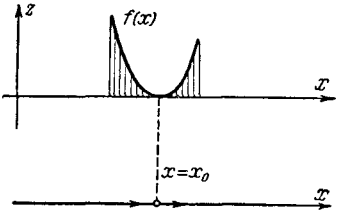

Рис. 165.

3) $f(x)$ не меняет знака вблизи состояния равновесия $x=x_0$ при возрастании x (рис. 165). Это значит, что изображающая точка, помещенная достаточно близко к положению равновесия с одной стороны, будет приближаться к нему, помещенная с другой — удаляться. Ясно, что состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

Для рассматриваемого случая условия устойчивости можно сформулировать еще более кратко. Перенесем начало координат в точку x_0. Тогда для устойчивости необходимо, чтобы x и f по обе стороны от положения равновесия были разных знаков, так как в противном случае, т. е. когда $\frac{dx}{dt}$ и x одного знака, раз возникшее отклонение от положения равновесия будет возрастать, т. е. состояние равновесия будет неустойчиво.

Все эти случаи могут быть исследованы и аналитически.

Если $a_1 \neq 0$, мы получим тогда как раз то, что мы нашли, следуя Ляпунову.

§ 5. Зависимость характера движений от параметра

Во всякой реальной системе на связь между скоростью и координатой, определяемую уравнением (4.1), в той или иной степени влияет ряд факторов. Так, например, если мы рассматриваем механическую систему и эта связь обусловлена наличием сухого трения, то величина трения зависит от ряда факторов: давления между трущимися поверхностями, их температуры и т. д. Эти факторы часто считают неизменными, хотя, строго говоря, они никогда не бывают абсолютно постоянными. Поэтому небольшие изменения этих факторов неизбежны во всякой реальной системе, и с этим всегда необходимо считаться; значит, необходимо знать, как изменяется характер движения при небольших изменениях этих факторов. Кроме того, в ряде случаев нас специально интересует вопрос о том, как изменяется характер движения в системе при изменении того или другого фактора. На математическом языке мы можем сформулировать эту задачу следующим образом: правая часть нашего дифференциального уравнения зависит от некоторого параметра λ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda); \tag{4.7}$$

нас интересует вопрос, как изменяется характер движений в системе при изменении этого параметра λ. Как мы уже говорили, основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия.

Состояние равновесия рассматриваемой системы дается уравнением

$$f(x, \lambda) = 0. \tag{4.8}$$

Это уравнение определит на плоскости λ, x некоторую кривую (рис. 166), выражающую зависимость координат состояний равновесия от параметра λ.

По предыдущему, состояние равновесия $x = \bar{x}$ устойчиво, если

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0, \tag{4.9}$$