

Для рассматриваемого случая условия устойчивости можно сформулировать еще более кратко. Перенесем начало координат в точку x_0 . Тогда для устойчивости необходимо, чтобы x и f по обе стороны от положения равновесия были разных знаков, так как в противном случае, т. е. когда $\frac{dx}{dt}$ и x одного знака, раз возникшее отклонение от положения равновесия будет возрастать, т. е. состояние равновесия будет неустойчиво.

Все эти случаи могут быть исследованы и аналитически.

Если $a_1 \neq 0$, мы получим тогда как раз то, что мы нашли, следя Ляпунову.

§ 5. Зависимость характера движений от параметра

Во всякой реальной системе на связь между скоростью и координатой, определяемую уравнением (4.1), в той или иной степени влияет ряд факторов. Так, например, если мы рассматриваем механическую систему и эта связь обусловлена наличием сухого трения, то величина трения зависит от ряда факторов: давления между трущимися поверхностями, их температуры и т. д. Эти факторы часто считают неизменными, хотя, строго говоря, они никогда не бывают абсолютно постоянными. Поэтому небольшие изменения этих факторов неизбежны во всякой реальной системе, и с этим всегда необходимо считаться; значит, необходимо знать, как изменяется характер движения при небольших изменениях этих факторов. Кроме того, в ряде случаев нас специально интересует вопрос о том, как изменяется характер движения в системе при изменении того или другого фактора. На математическом языке мы можем сформулировать эту задачу следующим образом: правая часть нашего дифференциального уравнения зависит от некоторого параметра λ :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda); \quad (4.7)$$

нас интересует вопрос, как изменяется характер движений в системе при изменении этого параметра λ . Как мы уже говорили, основными элементами, которые полностью определяют характер движений на фазовой прямой, являются состояния равновесия.

Состояние равновесия рассматриваемой системы дается уравнением

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (4.8)$$

Это уравнение определит на плоскости λ, x некоторую кривую (рис. 166), выражющую зависимость координат состояний равновесия от параметра λ .

По предыдущему, состояние равновесия $x = \bar{x}$ устойчиво, если

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) < 0, \quad (4.9)$$

и неустойчиво, если

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) > 0. \quad (4.10)$$

Мы видим, таким образом, что теория зависимости состояний равновесия динамической системы первого порядка от параметра в точности копирует теорию зависимости состояний равновесия простейшей консервативной системы с одной степенью свободы от параметра. Совершенно так же, как и раньше, мы имеем здесь дело с бифуркационными значениями параметра, сменой устойчивости и т. д.

Мы не будем повторять уже изложенную теорию бифуркации (см. гл. II, § 5) и перейдем к рассмотрению

нескольких физических систем, приводящему при соответствующих упрощающих предположениях относительно их свойств к динамическим системам (моделям) первого порядка.

1. Вольтова дуга в цепи с сопротивлением и самоиндукцией. К числу таких систем относится схема вольтовой дуги, включенной на батарею с э. д. с. E через сопротивление R и самоиндукцию L (рис. 167). Эта схема приводит к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка, если мы будем учитывать только те элементы схемы, которые изображены на рис. 167, и пренебрежем всеми паразитными параметрами, которые имеются в любой реальной схеме, считая, что скорости колебательных процессов в схеме малы по сравнению со скоростями установления ионных процессов, обусловливающих ток в вольтовой дуге. Нелинейность этого уравнения обусловлена тем, что дуга представляет собой проводник, не подчиняющийся закону Ома, т. е. тем, что сила тока, текущего через дугу, представляет собой нелинейную функцию напряжения на зажимах дуги. Связь напряжения на зажимах дуги с силой тока, текущего через дугу, может быть задана графически так называемой статической характеристикой

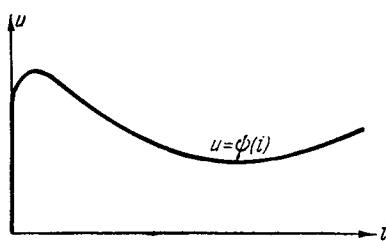


Рис. 168.

дуги $i = \varphi(u)$ или $u = \psi(i)$, где u — напряжение, а i — сила тока (рис. 168).

При сделанных предположениях из второго закона Кирхгофа получим для рассматриваемой схемы следующее дифференциальное

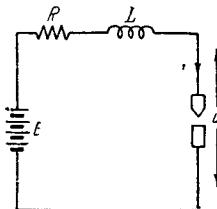


Рис. 167.

уравнение первого порядка:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \psi(i) = E,$$

или

$$\frac{di}{dt} = f(i) = \frac{E - Ri - \psi(i)}{L}. \quad (4.11)$$

Состояния равновесия ($i = I$) определяются условием $f(i) = 0$, т. е. уравнением

$$E - Ri - \psi(i) = 0. \quad (4.12)$$

Чтобы найти корни этого уравнения, построим, как это обычно делают в электротехнике, на одной плоскости характеристику дуги $u = \psi(i)$ и так называемую «нагрузочную» прямую $u = E - Ri$; их точки пересечения дадут нам значения тока I в состояниях равновесия (рис. 169). Там же отложена и кривая $u = E - Ri - \psi(i)$, которая в некотором масштабе изображает функцию $f(i)$, а зная $f(i)$, можно сразу построить траектории на фазовой прямой (рис. 170)¹.

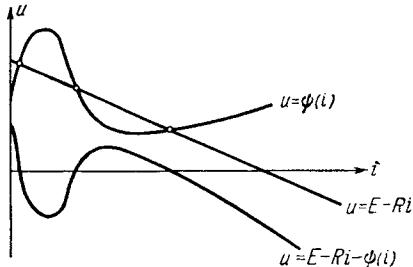


Рис. 169.

В рассматриваемом случае существуют три состояния равновесия: $i = I_1$, $i = I_2$, $i = I_3$, из которых, как это вытекает из приведенных выше признаков устойчивости, первое и последнее устойчивы, а среднее неустойчиво.

Установим, как зависит характер движения в нашей динамической системе от параметров, например от E или R .

Пусть E будет переменный параметр. В согласии с общими правилами строим на плоскости E , I кривую $f(I, E) = 0$ или

$$E - RI - \psi(I) = 0$$

¹⁾ Поскольку за координату системы мы выбрали ток i , который однозначно определяет u и $\frac{di}{dt}$, фазовой линией будет прямая i . Заметим, что прямая u не может служить фазовой линией, так как ток i не является однозначной функцией напряжения на дуге u и поэтому задание u еще не определяет однозначно состояния системы.

(рис. 171). Эта кривая, как видно из чертежа, имеет две точки бифуркации и, следовательно, два бифуркационных значения параметра E : $E=E_1$ и $E=E_2$. Бифуркационное значение параметра $E=E_2$ соответствует столь большому напряжению батареи (при заданном R), при котором состояния равновесия I_1 и I_3 сливаются и исчезают, так

что при дальнейшем увеличении E остается только одно устойчивое состояние равновесия $i=I_3$, соответствующее значительному току. Бифуркационное значение параметра $E=E_1$ соответствует столь малому напряжению батареи (при заданном R), что состояния равновесия $i=I_3$ и $i=I_1$ сливаются и исчезают, и мы имеем при дальнейшем уменьшении E лишь одно устойчивое состояние равновесия I_1 , соответствующее незначительному току. Из этой диаграммы следует, что если мы будем медленно и непрерывно

изменять E , то в бифуркационных точках мы будем иметь скачкообразные переходы системы из одного состояния равновесия в другое. Сила тока в цепи дуги будет в соответствии с уравнением (4.11) увеличиваться от I_6 до I_7 (при $E=E_2$) и падать от I_4 до I_5 (при $E=E_1$). Картина зависимости стационарного тока I от напряжения батареи E имеет гистерезисный характер (рис. 172). Аналогично можно построить бифуркационную картину при заданом E и изменяющемся R .

Мы рассмотрели случай достаточно малых сопротивлений в цепи дуги — случай $R < |\psi|_{\max}$, где $|\psi|_{\max}$ — наибольшее абсолютное значение наклона характеристики дуги $v=\psi(i)$ на падающем участке. Если же

$$R > |\psi|_{\max}, \quad (4.13)$$

то при любых E имеется только одно состояние равновесия и при том устойчивое (рис. 173). Устойчивость состояния равновесия получается при любых L , в частности при сколь угодно малых L . Этот вывод находится в определенном противоречии с экспериментальными данными: оказывается, условие (4.13) не является достаточным для устойчивости состояния равновесия на падающем участке характе-

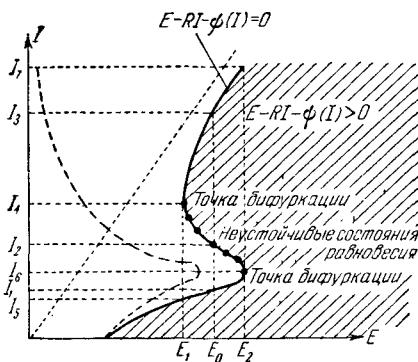


Рис. 171.

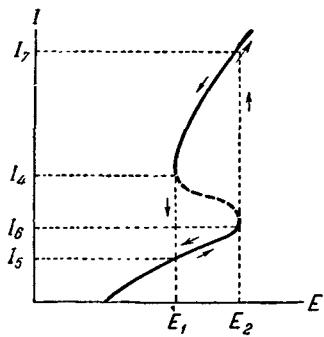


Рис. 172.

ристики. Это говорит о том, что, рассматривая схему с вольтовой дугой в виде динамической системы первого порядка (с $\frac{1}{2}$ степени свободы), мы не учли каких-то параметров схемы, существенных для рассматриваемого случая. Такими существенными параметрами в случае больших R и малых L являются малая паразитная емкость дуги и инерционность ионных процессов в дуге. Эту задачу о режимах горения вольтовой дуги, в цепи которой имеются не только сопротивление и самоиндукция, но и емкость, мы рассмотрим в § 5 гл. V¹⁾.

2. Диодрон в цепи с сопротивлением и емкостью. В качестве второго примера электрической системы с $\frac{1}{2}$ степени свободы мы рассмотрим схему, изображенную на рис. 174²⁾.

Уравнение такой схемы (при учете только тех элементов, которые изображены на рис. 174) запишется на основании законов Кирхгофа в следующем виде:

$$RC \frac{du}{dt} + u + Ri = E. \quad (4.14)$$

Здесь $i = \varphi(u)$ — анодный ток тетрода, являющийся нелинейной, но однозначной функцией анодного напряжения u . График этой зависимости (анодная характеристика тетрода), как мы уже указывали в § 7 гл. I, имеет падающий участок (рис. 175).

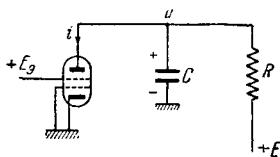


Рис. 174.

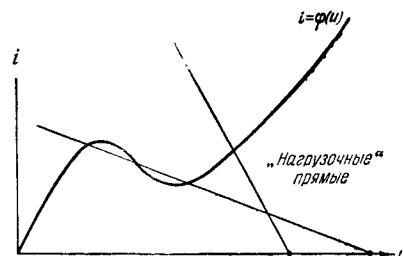


Рис. 175.

Состояния равновесия $u = U$ определяются уравнением

$$E - u - Ri = 0 \quad (4.15)$$

¹⁾ Как мы там увидим, инерционность ионных процессов в дуге может быть приближенно заменена некоторой «эквивалентной» самоиндукцией, включенной последовательно с дугой.

²⁾ Если анодная цепь тетрода не содержит специально включенной емкости, то под емкостью C следует понимать малую паразитную емкость анодного узла, составляемую из емкости между анодом тетрода и другими его электродами, а также из паразитной емкости сопротивления R .

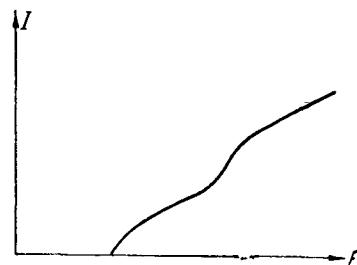


Рис. 173.

и могут быть найдены графически как точки пересечения характеристики $i = \varphi(u)$ и «нагрузочной» прямой $E - u - Ri = 0$ (см. рис. 175). Очевидно, при заданной характеристике тетрода $i = \varphi(u)$ в зависимости от значений E и R имеется либо одно, либо три состояния равновесия. Если считать параметром схемы напряжение анодного питания E , а сопротивление R считать фиксированным, то можно на плоскости E, U построить кривую (4.15), выражющую зависимость координат состояний равновесия U от параметра E (при фиксированном R). Такое построение выполнено на рис. 176. Здесь воз-

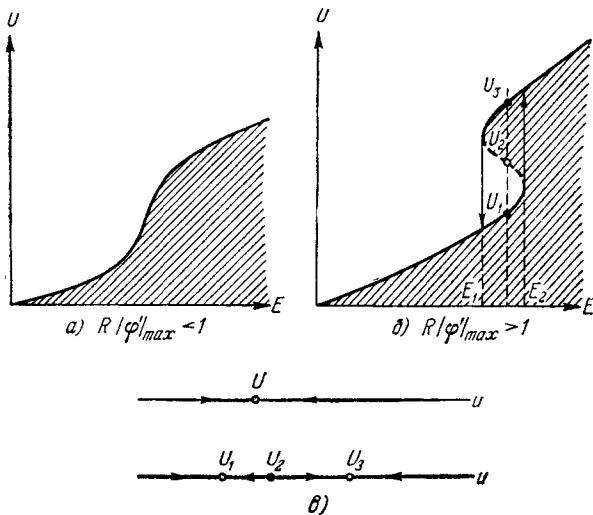


Рис. 176.

можны два случая. Если сопротивление R достаточно мало ($R|\varphi'|_{\max} < 1$, где $|\varphi'|_{\max}$ — наибольшее абсолютное значение крутизны характеристики на падающем участке), то при любых E имеется одно состояние равновесия (рис. 176, а). Если же $R|\varphi'|_{\max} > 1$, то на некотором интервале напряжений E имеется три состояния равновесия (рис. 176, б). В последнем случае значения E_1 и E_2 являются бифуркационными.

Заштриховав область, в которой

$$E - u - Ri > 0$$

или $\frac{du}{dt} > 0$, нетрудно определить устойчивость состояний равновесия. Именно, точки кривой (4.15), лежащие над этой областью, соответствуют устойчивым, а точки под ней — неустойчивым равновесным состояниям. Таким образом, в тех случаях, когда имеется одно состояние равновесия, оно всегда устойчиво; если же имеется три

состояния равновесия, то крайние состояния ($u = U_1$ и $u = U_3$ на рис. 176, б) устойчивы, а среднее ($u = U_2$) неустойчиво. Фазовые прямые при наличии одного и трех состояний равновесия изображены на рис. 176, в; при любых начальных условиях система приближается к одному из состояний равновесия.

3. Ламповое реле. К динамической системе первого порядка приводит также рассмотрение лампового реле, схема которого изображена на рис. 177 (на этой схеме емкость C_a изображает малую, паразитную емкость анодного узла лампы L_1)¹⁾.

Для анодного узла лампы L_1 на основании законов Кирхгофа получаем уравнение

$$C_a \frac{du_{a1}}{dt} + i_1 + \frac{u_{a1} - E_a}{R_{a1}} + \frac{u_{a2}}{R_1 + R_2} = 0 \quad (4.16)$$

(при составлении этого уравнения мы пренебрегли сеточным током лампы L_2 , так как обычно рассматриваемая схема работает практически

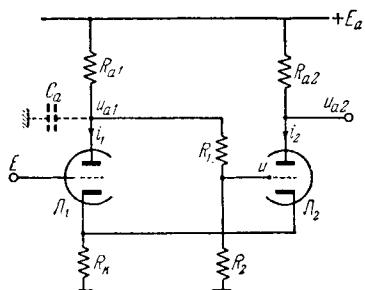


Рис. 177.

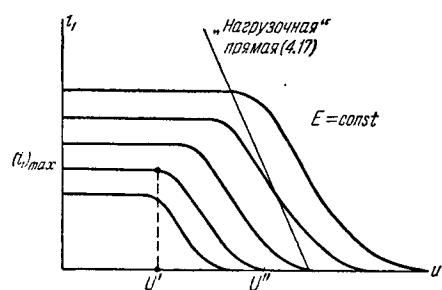


Рис. 178.

без сеточных токов ламп). Пренебрегая паразитной емкостью катодного узла, мы можем считать, что анодные токи ламп являются функциями напряжений E и u на сетках ламп L_1 и L_2 (u является координатой состояния схемы, E мы будем рассматривать как параметр; напряжения u и E , равно как и i_{a1} , отсчитываются от заземленного узла схемы).

На рис. 178 изображено семейство характеристик ламповой группы (ламп L_1 и L_2 с общим катодным сопротивлением), дающих зависимость анодного тока i_1 лампы L_1 от напряжения u (при различных, но постоянных напряжениях E). При достаточно малых u ($u \leq U'$) лампа L_2 заперта ($i_2 = 0$) и анодный ток i_1 лампы L_1 не зависит от

¹⁾ Мы не будем учитывать других паразитных емкостей и параметров. Заметим, что паразитную емкость сеточного узла лампы L_2 в схемах обычно компенсируют включением соответствующей емкости параллельно сопротивлению R_1 .

$i_1 = (i_1)_{\max} = \text{const}$). При $u > U'$ анодный ток лампы L_2 отличен от нуля, причем увеличение u вызывает увеличение i_2 и напряжения на катодном узле u_k и, следовательно, уменьшение i_1 , пока, наконец, при $u = U''$ лампа L_1 не запрется. При $u > U''$ лампа L_1 заперта, $i_1 = 0$. Напряжения U' и U'' , при которых запираются соответственно лампы L_2 и L_1 , а также максимальный ток $(i_1)_{\max}$, конечно, зависят от напряжения E (с ростом E они увеличиваются). В то же время мы будем считать, что наибольшая крутизна характеристики на падающем участке (ее абсолютное значение мы будем обозначать через S_0) не зависит от E .

Далее, напряжение на сетке лампы L_2

$$u = \beta u_{a1},$$

где $\beta = \frac{R_s}{R_1 + R_s}$ — коэффициент передачи делителя напряжений, состоящего из сопротивлений R_1 и R_s ¹⁾. Исключая с помощью этого соотношения u_{a1} из уравнения (4.16), получим следующее дифференциальное уравнение первого порядка для напряжения u :

$$\frac{C_a}{\beta} \frac{du}{dt} = \frac{E_a}{R_{a1}} - i_1(u, E) - \frac{u}{\beta} \left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_s} \right). \quad (4.16a)$$

Состояния равновесия определяются уравнением

$$\frac{E_a}{R_{a1}} - i_1 - \frac{u}{\beta} \left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_s} \right) = 0 \quad (4.17)$$

и могут быть найдены графически как точки пересечения характеристики ламповой группы $i_1 = i_1(u, E)$ с «нагрузочной» прямой (4.17). В зависимости от напряжения E на сетке лампы L_1 , а также от других параметров схемы имеется либо одно, либо три состояния равновесия.

Если наклон «нагрузочной» прямой (4.17) $\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_s} \right)$ больше наибольшего наклона падающего участка характеристики S_0 , что имеет место при

$$\beta \frac{\frac{S_0 R_{a1}}{R_{a1}}}{1 + \frac{R_{a1}}{R_1 + R_s}} < 1,$$

¹⁾ Напомним, что мы пренебрегаем паразитной емкостью сеточного узла лампы L_2 . Если паразитная емкость этого узла равна C_2 , то выражение для коэффициента передачи делителя напряжений, приведенное в тексте, остается справедливым, если сопротивление R_1 зашунтировано емкостью, равной $\frac{R_s C_2}{R_1}$.

то при каждом E имеется единственное состояние равновесия и при этом, как нетрудно убедиться, устойчивое. В этом случае (см. рис. 178) равновесное значение напряжения U на сетке лампы L_3 монотонно и непрерывно убывает с ростом E , и зависимость выходного напряжения U_{a2} на аноде лампы L_2 от E имеет вид, изображенный на рис. 179. Выходное напряжение U_{a2} является непрерывной функцией входного напряжения E (при условии, что E изменяется достаточно медленно), и наша схема работает как обычный усилитель напряжений (с большим коэффициентом усиления из-за наличия в схеме положительной обратной связи).

Если же

$$\beta \frac{S_0 R_{a1}}{1 + \frac{R_{a1}}{R_1 + R_2}} > 1,$$

т. е. наклон прямой (4.17) меньше наибольшего наклона падающего участка характеристики ламповой группы (рис. 180), то на некотором интервале напряжений $E_1 < E < E_2$ схема имеет три состояния равновесия U_1 , U_2 и U_3 , из которых два (U_1 и U_3) являются устойчивыми и одно (U_2) — неустойчивым¹). Поэтому теперь

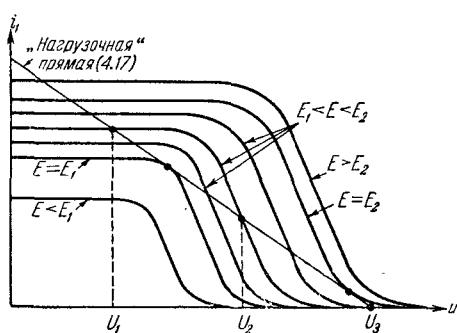


Рис. 180.

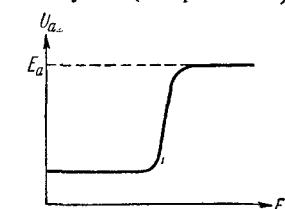


Рис. 179.

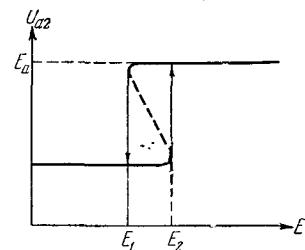


Рис. 181.

зависимость выходного напряжения U_{a2} от E будет изображаться кривой S-образной формы (рис. 181); пунктирный участок соответствует неустойчивым состояниям равновесия. Напряжения $E = E_1$ и $E = E_2$, при

¹⁾ Действительно, линеаризованное уравнение, справедливое вблизи состояния равновесия $u = U$, имеет вид:

$$\frac{C_a}{\beta} \frac{du}{dt} = -A \cdot \xi,$$

где

$$\xi = u - U \text{ и } A = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) + \left(\frac{di_1}{du} \right)_{u=U} = v.$$

Для состояний равновесия $u = U_1$ и $u = U_3$ $A > 0$ и для $u = U_2$ $A < 0$; поэтому первые два равновесных состояния устойчивы, а последнее неустойчиво.

которых происходят слияние состояний равновесия и изменение их числа, являются бифуркационными. Строго говоря, характеристика схемы, приведенная на рис. 181, является *статической*: она дает зависимость *равновесных* значений выходного напряжения U_{α_2} от *постоянных* во времени значений напряжения E на сетке лампы L_1 . Однако эта характеристика верна с некоторой степенью точности и для переменных E (тем точнее, чем медленнее изменяется E). Поэтому, если мы будем достаточно медленно (и непрерывно) изменять входное напряжение E , то в точках бифуркации (при $E=E_2$, $\dot{E}>0$ и при $E=E_1$, $\dot{E}<0$) будут иметь место быстрые (тем более быстрые, чем меньше паразитные емкости схемы) изменения выходного напряжения, происходящие в соответствии с уравнением (4.16а).

Таким образом, в этом случае рассматриваемая схема работает как ламповое реле, обладая основными характерными свойствами релейных устройств (наличие быстрых переходов из одного состояния равновесия в другое, «гистерезисная» характеристика).

4. Движение глиссирующего судна. Рассмотрим теперь несколько примеров механических систем, движение которых может быть удобно описано одним дифференциальным уравнением первого порядка. В качестве первого примера рассмотрим прямолинейное движение глиссирующего судна (без учета кильевой и бортовой качки). Уравнение его движения согласно второму закону Ньютона может быть записано в виде:

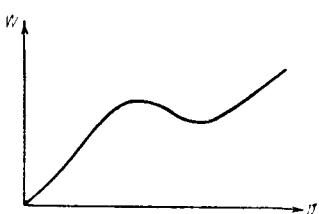


Рис. 182.

где v — скорость судна, m — его масса, T и W — силы упора (тяги) винта и сопротивления судна. T и W являются функциями скорости v , при этом, сила упора

винта монотонно убывает с увеличением скорости (при заданном режиме работы двигателя судна), а характеристика сопротивления глиссирующего судна имеет на некотором интервале скоростей падающий участок (она изображена на рис. 182) ¹⁾.

¹⁾ При достаточно малых скоростях движения глиссирующее судно находится в «режиме плавания», когда его вес уравновешивается гидростатическими силами; при увеличении скорости сопротивление движению возрастает. По мере увеличения скорости все большая и большая доля веса судна уравновешивается гидродинамической подъемной силой, действующей на днище корпуса, корпус судна все больше и больше выходит из воды, в результате чего происходит значительное уменьшение погруженной поверхности судна, и на некотором интервале скоростей сила сопротивления уменьшается при увеличении скорости. При больших скоростях движения судно находится в «режиме глиссирования», погруженная поверхность с ростом скорости уменьшается незначительно, и сопротивление снова возрастает с увеличением скорости.

«Состояния равновесия» $v = V = \text{const}$ (здесь они соответствуют режимам равномерного движения судна), очевидно, определяются условием

$$T(v) = W(v).$$

В зависимости от характеристики сопротивления $W = W(v)$ и характеристики винта $T = T(v)$ обычно имеется либо один, либо три режима равномерного движения. Типичные случаи изображены на рис. 183, *а* и *б* (там же изображены и соответствующие разбиения фазовых прямых на фазовые траектории). Нетрудно видеть, что при наличии одного режима равномерного движения (рис. 183, *а*) этот режим всегда устойчив, а при наличии трех режимов равномерного движения (рис. 183, *б*) режимы со скоростями $v = V_1$ и $v = V_3$ устойчивы, а режим со средней скоростью ($v = V_2$) неустойчив. Случай трех режимов равномерного движения может иметь место при упоре винта $T = T(v)$, мало меняющемся с увеличением скорости, и в частности при буксировке моделей глиссеров в испытательных бассейнах, если при буксировке сила тяги T постоянна.

Очевидно, при любых начальных условиях глиссирующее судно приходит в один из устойчивых режимов равномерного движения.

5. Однофазный асинхронный мотор. В качестве второго примера рассмотрим задачу о вращении ротора однофазного асинхронного мотора. Некоторые недостатки этого типа моторов (в чем заключаются эти недостатки — выяснится при нашем рассмотрении) делают его мало пригодным для работы в обычных условиях, и поэтому асинхронные однофазные моторы изготавляются только очень небольших мощностей и используются только в тех случаях, когда при трогании с места и малых оборотах мотора нагрузка на него мала. Этими условиями определяется область применения однофазных асинхронных моторов — ими пользуются, например, для вращения небольших вентиляторов. При питании статора мотора однофазным переменным током получается зависимость вращающего момента от числа оборотов, примерно указанная на рис. 184. С другой стороны, вращению ротора препятствует трение (в подшипниках) и сопротивление воздуха (движению вентилятора); учитывая как первое («твердое»), так и второе («жидкое») трение, мы можем зависимость момента сил трения от скорости изобразить примерно так, как это указано на рис. 185.

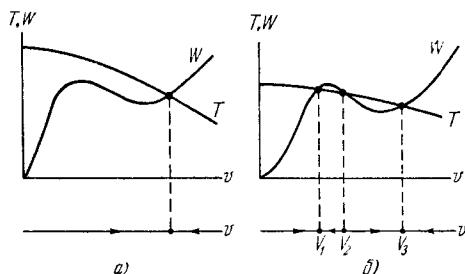


Рис. 183.

Обозначая вращающий момент через $M(\omega)$, момент сил трения через $m(\omega)$ и момент инерции через I , можно написать дифференциальное уравнение движения ротора:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M(\omega) - m(\omega).$$

Мы имеем дело, таким образом, с одной зависимой переменной — угловой скоростью ω .

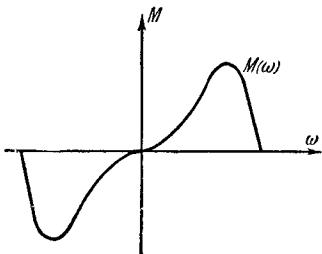


Рис. 184.

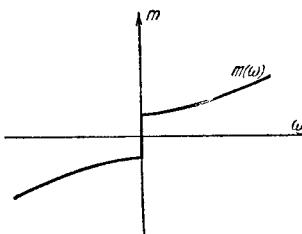


Рис. 185.

«Состояния равновесия» (они соответствуют как состоянию покоя ($\omega = 0$), так и режимам равномерного вращения мотора) даются уравнением

$$M(\omega) - m(\omega) = 0.$$

Чтобы найти корни этого уравнения, строим две вспомогательные кривые $z = M(\omega)$ и $z = m(\omega)$ и находим точки их пересечения (рис. 186). Далее, как в предыдущем примере, найдем функцию $f(\omega) = \frac{M(\omega) - m(\omega)}{I}$ и построим траектории на фазовой прямой (рис. 187).

В нашем случае имеются три устойчивых состояния равновесия: $\omega = \omega_0$; $\omega = \omega_2$; $\omega = \omega'_2$; и два неустойчивых: $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega'_1$. Из

устойчивости состояния $\omega = \omega_0 = 0$, соответствующего полному покоя (отсутствие вращения), следует, что ротор, вообще говоря, сам собой не приходит во вращение, его нужно каким-то образом «забросить» за состояния ω_1 или ω'_1 , т. е. раскрутить его до некоторого числа оборотов ω_1 , после чего он сам доходит до нормального числа оборотов ω_2 .

Мотор может вращаться как в

ту, так и в другую сторону (два устойчивых состояния равновесия ω_2 и ω'_2), и направление установленвшегося вращения зависит только от

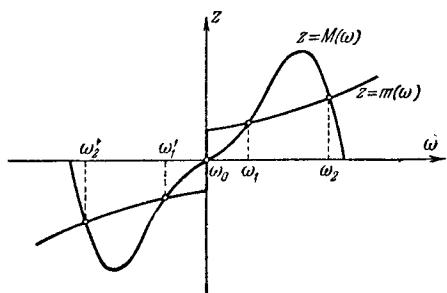


Рис. 186.

того, в какую сторону был раскручен ротор. Для того чтобы избавиться от необходимости раскручивать ротор мотора, употребляют специальные приемы (добавочные обмотки, полюса и т. д.), нарушающие симметрию в картине вращения в обе стороны, вследствие чего появляется некоторый начальный вращающий момент и мотор сам трогается с места и, конечно, уже всегда в одну сторону.

Однако начальный вращающий момент с помощью нарушения симметрии нельзя сделать достаточно большим, и поэтому мотор все же плохо трогает с места. Этот недостаток мы и имели в виду выше — он очень сильно ограничивает область применения однофазных асинхронных моторов.

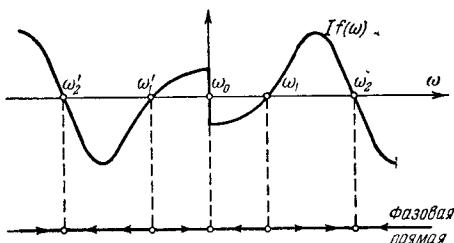


Рис. 187.

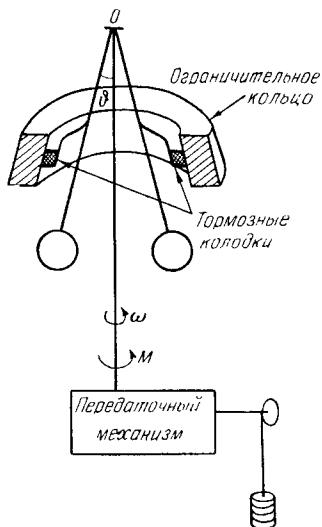


Рис. 188.

6. Фрикционный регулятор. Рассмотрим еще одну механическую систему, приводящую при определенных упрощающих предположениях к динамической системе первого порядка, — фрикционный регулятор, устройство которого схематически изображено на рис. 188. Такие фрикционные регуляторы применяются в ряде астрономических приборов, в телеграфных аппаратах, в патефонах и т. п. для стабилизации скорости вращения тех или иных осей. Их действие основано на том, что по мере увеличения скорости вращения оси регулятора шары регулятора расходятся и при некотором угле $\vartheta = \vartheta_0$ тормозные колодки начинают тереться об ограничительное кольцо, создавая тормозящий момент, который будет тем больше, чем больше скорость вращения (при росте возрастает сила нажима тормозных колодок на ограничительное кольцо). Этот тормозящий момент, резко возрастающий при увеличении скорости вращения, приводит систему в режим равномерного вращения, скорость которого оказывается сравнительно слабо зависящей от момента сил M , действующего на ось регулятора со стороны передающего механизма.

Считая все части регулятора идеально жесткими и предполагая, что во время процесса регулирования $\vartheta \equiv \vartheta_0$, мы получим

динамическую модель с $\frac{1}{2}$ степени свободы (ее движение будет описываться дифференциальным уравнением первого порядка).

Однако временно для получения выражения зависимости давления тормозных колодок на ограничительное кольцо мы не будем полагать, что $\vartheta \equiv \vartheta_0$, и будем рассматривать регулятор как систему с двумя степенями свободы (с обобщенными координатами φ и ϑ). Функция Лагранжа для такой системы запишется в виде

$$L = \frac{1}{2} I(\vartheta) \omega^2 + \frac{1}{2} J_\vartheta \dot{\vartheta}^2 - V(\vartheta),$$

где $I(\vartheta)$ — момент инерции регулятора относительно его оси, J_ϑ — момент инерции шаров регулятора относительно точки O и $V(\vartheta)$ — потенциальная энергия регулятора. Будем пренебречь всеми силами трения, кроме сил сухого трения тормозных колодок об ограничительное кольцо. Момент m этих сил трения (относительно оси регулятора) мы будем считать пропорциональным моменту N сил давления тормозных колодок на ограничительное кольцо (моменту относительно точки O), т. е. будем полагать, что

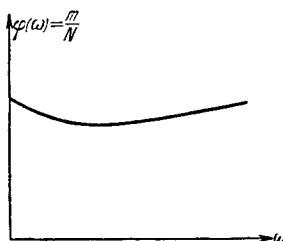


Рис. 189.

где $\varphi(\omega)$ — функция, пропорциональная коэффициенту трения и поэтому определяемая свойствами трущихся поверхностей тормозных колодок и ограничительного кольца (вид этой функции изображен на рис. 189).

Тогда мы получим уравнения движения регулятора в виде следующих уравнений Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right) = M - m, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -N$$

или

$$I(\vartheta) \ddot{\vartheta} + I'(\vartheta) \omega \dot{\vartheta} = M - m, \quad J_\vartheta \ddot{\vartheta} - \frac{1}{2} I'(\vartheta) \omega^2 + V'(\vartheta) = -N. \quad (4.19)$$

Полагая в этих уравнениях $\vartheta \equiv \vartheta_0$, мы получим, во-первых, выражение для момента сил давления тормозных колодок на ограничительное кольцо:

$$N = \frac{1}{2} I'(\vartheta_0) \omega^2 - V'(\vartheta_0)$$

или

$$N = a(\omega^2 - \omega_0^2), \quad (4.20)$$

где $a = \frac{1}{2} I'(\vartheta_0)$ и $\omega_0^2 = \frac{2V'(\vartheta_0)}{I'(\vartheta_0)}$ — квадрат той скорости вращения регулятора, при которой положение $\vartheta = \vartheta_0$ было бы равновесным и без ограничительного кольца; мы получим, во-вторых, уравнение

движения динамической модели первого порядка:

$$I(\theta_0) \dot{\omega} = M - a\varphi(\omega)(\omega^2 - \omega_0^2). \quad (4.21)$$

Состояния равновесия (т. е. режимы равномерного вращения регулятора) $\omega = \Omega$, очевидно, определяются уравнением

$$a\varphi(\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2) = M. \quad (4.22)$$

Скорость равномерного вращения Ω , конечно, зависит от момента M , приложенного к оси регулятора со стороны передаточного механизма (эта зависимость, обычно называемая статической характеристикой регулятора, дается в неявном виде уравнением (4.22)). Локально мы можем эту зависимость характеризовать величиной производной¹⁾

$$\frac{d\Omega}{dM} = \frac{1}{2a\varphi(\Omega) + a\varphi'(\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (4.23)$$

Устойчивость режима равномерного вращения определяется уравнением первого приближения

$$I(\theta_0) \frac{d(\Delta\omega)}{dt} = -a \{2\Omega\varphi(\Omega) + \varphi'(\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2)\}$$

или

$$I(\theta_0) \frac{d(\Delta\omega)}{dt} + \frac{\Delta\omega}{\left(\frac{d\Omega}{dM}\right)} = 0. \quad (4.24)$$

Очевидно, режим равномерного вращения устойчив, если $\frac{d\Omega}{dM} > 0$, и неустойчив, если $\frac{d\Omega}{dM} < 0$.

Статическая характеристика регулятора $\Omega = \Omega(M)$ в зависимости от вида функции $\varphi(\omega)$ (от крутизны падающего участка характеристики

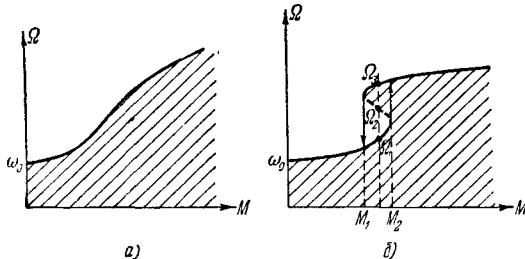


Рис. 190.

трения) и от величины параметра регулятора ω_0 ²⁾ является или однозначной монотонной кривой (рис. 190, а), когда при каждом

¹⁾ Во всех выражениях (4.20) — (4.23) и ниже мы должны считать, что $\omega > \omega_0$. Только в этом случае $N > 0$ и тормозные колодки поджаты к ограничительному кольцу.

²⁾ ω_0 можно в некоторых пределах изменять путем перемещения ограничительного кольца.

значении момента M система имеет единственный и притом устойчивый режим равномерного вращения, или же имеет S-образную форму (рис. 190, б). В последнем случае при $M_1 < M < M_2$ система имеет три режима равномерного вращения со скоростями Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 , два из которых ($\Omega = \Omega_1$ и $\Omega = \Omega_3$) устойчивы и один ($\Omega = \Omega_2$) неустойчив. Значения $M = M_1$ и $M = M_2$ являются бифуркационными. При переходе момента M через них в системе имеют место переходы из одного режима равномерного вращения в другой¹⁾.

§ 6. Периодические движения

В рассмотренных нами динамических системах первого порядка единственными стационарными движениями были состояния равновесия. В них не было никаких периодических движений. Это понятно, так как мы ограничивались рассмотрением систем, движение которых подчинялось уравнениям первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (4.1)$$

с однозначными правыми частями (с однозначными функциями $f(x)$) — уравнениям, которые вообще не допускают периодических решений. Действительно, если бы такое периодическое движение происходило, то система должна была бы дважды проходить через одно и то же значение x в противоположных направлениях, т. е. с двумя различными значениями скорости $\frac{dx}{dt}$, что невозможно в силу однозначности функции $f(x)$.

Периодические движения в системах первого порядка становятся возможными только в тех случаях, когда правая часть уравнения (4.1) — функция $f(x)$ — неоднозначна хотя бы на некотором интервале изменения x .

Примером может служить уравнение движения гармонического осциллятора с заданной полной энергией h :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = h \quad (= \text{const})$$

¹⁾ Наша динамическая модель фрикционного регулятора не имеет никаких периодических колебаний, любое ее движение заканчивается приходом в устойчивый режим равномерного вращения. Между тем при некоторых условиях в реальных фрикционных регуляторах не имеется устойчивого режима равномерного вращения и в них возникают автоколебания [132, 9]. Для объяснения самовозбуждения регулятора и установления автоколебаний необходимо отказаться от предположения, что все части регулятора являются абсолютно жесткими, и учесть большую, но конечную жесткость плоских пружин, на которых укреплены тормозные колодки. Это приведет к рассмотрению динамической модели с полутора степенями свободы (ее движение будет описываться системой дифференциальных уравнений третьего порядка). Это рассмотрение выходит за пределы настоящей книги.