

значении момента M система имеет единственный и притом устойчивый режим равномерного вращения, или же имеет S-образную форму (рис. 190, б). В последнем случае при $M_1 < M < M_2$ система имеет три режима равномерного вращения со скоростями Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 , два из которых ($\Omega = \Omega_1$ и $\Omega = \Omega_3$) устойчивы и один ($\Omega = \Omega_2$) неустойчив. Значения $M = M_1$ и $M = M_2$ являются бифуркационными. При переходе момента M через них в системе имеют место переходы из одного режима равномерного вращения в другой¹⁾.

§ 6. Периодические движения

В рассмотренных нами динамических системах первого порядка единственными стационарными движениями были состояния равновесия. В них не было никаких периодических движений. Это понятно, так как мы ограничивались рассмотрением систем, движение которых подчинялось уравнениям первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (4.1)$$

с однозначными правыми частями (с однозначными функциями $f(x)$) — уравнениям, которые вообще не допускают периодических решений. Действительно, если бы такое периодическое движение происходило, то система должна была бы дважды проходить через одно и то же значение x в противоположных направлениях, т. е. с двумя различными значениями скорости $\frac{dx}{dt}$, что невозможно в силу однозначности функции $f(x)$.

Периодические движения в системах первого порядка становятся возможными только в тех случаях, когда правая часть уравнения (4.1) — функция $f(x)$ — неоднозначна хотя бы на некотором интервале изменения x .

Примером может служить уравнение движения гармонического осциллятора с заданной полной энергией h :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = h \quad (= \text{const})$$

¹⁾ Наша динамическая модель фрикционного регулятора не имеет никаких периодических колебаний, любое ее движение заканчивается приходом в устойчивый режим равномерного вращения. Между тем при некоторых условиях в реальных фрикционных регуляторах не имеется устойчивого режима равномерного вращения и в них возникают автоколебания [132, 9]. Для объяснения самовозбуждения регулятора и установления автоколебаний необходимо отказаться от предположения, что все части регулятора являются абсолютно жесткими, и учесть большую, но конечную жесткость плоских пружин, на которых укреплены тормозные колодки. Это приведет к рассмотрению динамической модели с полутора степенями свободы (ее движение будет описываться системой дифференциальных уравнений третьего порядка). Это рассмотрение выходит за пределы настоящей книги.

или после приведения к виду (4.1)

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{h - \frac{kx^2}{2}},$$

которое, как известно, имеет периодическое решение

$$x = \sqrt{\frac{2h}{k}} \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и α — произвольная постоянная. Заметим, что для этой системы первого порядка фазовой линией не может служить отрезок прямой $x: -A \leq x \leq +A$, где $A = +\sqrt{\frac{2h}{k}}$ — заданная амплитуда колебаний, так как задание x еще не определяет однозначно скорости системы \dot{x} (каждому значению x на интервале $-A < x < +A$ соответствуют *два* различных значения \dot{x}). В качестве фазовой линии мы можем взять любую простую (без самопересечений) замкнутую кривую, например окружность (рис. 191). Каждому значению x соответствуют *две* точки окружности, что дает возможность установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие точек этой окружности и состояний гармонического осциллятора с заданной энергией. Например, мы можем считать, что на

верхней полуокружности $\dot{x} = +\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{h - \frac{kx^2}{2}}$ и на нижней $\dot{x} = -\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{h - \frac{kx^2}{2}}$; тогда задание точки окружности однозначно определяет x и \dot{x} , т. е. однозначно определяет состояние системы.

Это положение является общим для динамических систем первого порядка: периодические движения возможны только в таких системах, фазовые линии которых имеют замкнутые участки (только такие фазовые линии допускают замкнутые фазовые траектории, соответствующие периодическим движениям). Поэтому *неоднозначность правой части уравнения (4.1) на некотором интервале изменения x является необходимым условием существования периодических решений этого уравнения*.

Ниже мы рассмотрим два примера физических систем, которые при определенных упрощающих предположениях относительно их свойств приводят к динамическим системам первого порядка с *двумя* правой частью уравнения (4.1).

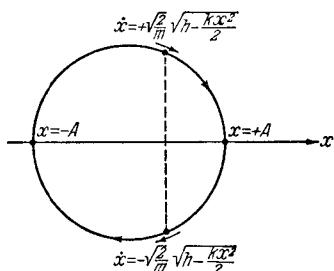


Рис. 191.

1. Двухпозиционный регулятор температуры. Первым примером будет двухпозиционный (релейный) регулятор температуры, схема которого изображена на рис. 192. Для температуры печи θ (мы будем считать ее одинаковой по всему объему печи и будем отсчитывать от температуры окружающей среды) имеем следующее уравнение теплового баланса:

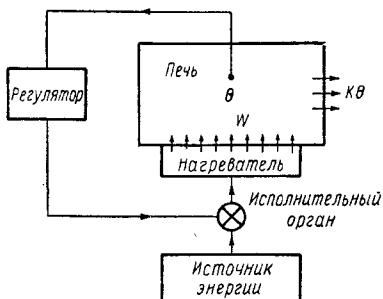


Рис. 192.

женно можно считать, что мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур печи и внешней среды, т. е. что справедлив так называемый закон теплоотдачи Ньютона; коэффициент K называется коэффициентом теплоотдачи). Температура печи измеряется термопарой (или каким-либо другим измерителем температуры), которая через регулятор и исполнительный орган управляет мощностью, подводимой к печи.

Рассмотрим двухпозиционный регулятор, т. е. регулятор типа «включено — выключено», который в зависимости от температуры печи θ или полностью выключает нагреватель ($W = 0$), или включает его на определенную мощность ($W = W_0$). Характеристика такого регулятора изображена на рис. 193. Она всегда имеет гистерезисный характер: если включение нагревателя происходит при температуре печи θ_1 , то его выключение происходит при температуре $\theta_2 > \theta_1$; на интервале температур $\theta_1 < \theta < \theta_2$ характеристика регулятора $W = W(\theta)$ двузначна¹.

где C — теплоемкость печи (мы будем считать ее не зависящей от температуры), W — мощность, подводимая к печи со стороны нагревателя, $K\theta$ — мощность теплоотдачи печи во внешнюю среду (прибли-

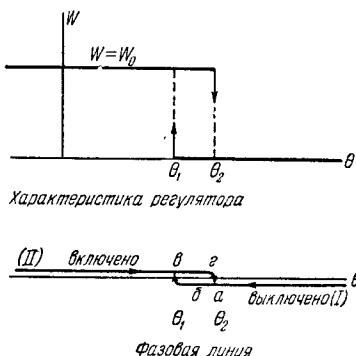


Рис. 193.

¹⁾ Один из распространенных в настоящее время двухпозиционных регуляторов температуры регулятор ЭРМ-47 устроен следующим образом. Термопара, измеряющая температуру печи, подключена к гальванометру, на стрелке которого укреплен алюминиевый листочек («флажок»), входящий в зазор между контурной катушкой и катушкой обратной связи лампового генератора. При изменении температуры флажок перемещается и изменяет коэффициент взаи-

В соответствии с этой двузначностью характеристики регулятора фазовой линией системы (печи с регулятором) будет линия «с наложением» (рис. 193), состоящая из двух полупрямых, одна из которых (I) ($\theta > \theta_1$) соответствует выключенному, а другая (II) ($\theta < \theta_2$) включенному нагревателю. При этом переход изображающей точки с полупрямой (I) на полупрямую (II) происходит только в точке b (при $\theta = \theta_1$), а обратный — только в точке a (при $\theta = \theta_2$). Фазовая линия имеет замкнутый участок $abga$, и если система имеет периодическое движение, то фазовой траекторией, соответствующей этому движению, может быть только замкнутая кривая $abga$ (так как других замкнутых фазовых траекторий фазовая линия не допускает).

Решение уравнения (4.25) при выключенном нагревателе ($W = 0$, изображающая точка находится на полупрямой (I)), очевидно, записывается в виде

$$\theta = Ae^{-\frac{K}{C}t}, \quad (4.26)$$

а при включенном нагревателе ($W = W_0$, изображающая точка находится на полупрямой (II)) — в виде

$$\theta = \frac{W_0}{K} + Be^{-\frac{K}{C}t}. \quad (4.27)$$

При $\theta_\infty = \frac{W_0}{K} < \theta_2$ (θ_∞ — это та температура, которая установилась бы в печи при всегда включенном нагревателе) система имеет единственное состояние равновесия

$$\theta_0 = \frac{W_0}{K}$$

(оно лежит на полупрямой (II)). В этом случае, как нетрудно убедиться, при любых начальных условиях в системе установится это состояние равновесия. Равновесная температура θ_0 будет зависеть как от мощности нагревателя (от W_0), так и от условий теплоотдачи

моиндукции между катушками генератора (при введении флагка в зазор между катушками он экранирует катушки друг от друга и коэффициент взаимоиндукции падает). Ламповый генератор находится в жестком режиме возбуждения автоколебаний (см. гл. IX), поэтому изменение коэффициента взаимоиндукции приводит при определенных положениях флагка к возникновению автоколебаний конечной амплитуды или к их срыву. Поскольку средний анодный ток лампы генератора при отсутствии автоколебаний гораздо больше, чем при наличии их (генератор имеет автоматическое смещение в цепи сетки), реле, обмотка управления которого включена в анодную цепь лампы, будет включать или выключать нагреватель в зависимости от положения флагка, т. е. в зависимости от температуры печи. Как известно, при жестком режиме возбуждение и срыв автоколебаний происходят при различных значениях коэффициента взаимоиндукции между катушками генератора (срыв происходит при меньшем коэффициенте взаимоиндукции, чем возникновение автоколебаний). Это и обуславливает гистерезисный характер характеристики регулятора.

(от K), и будет изменяться при их изменении, так как нагреватель при температурах, близких к θ_0 , всегда включен.

Пусть теперь

$$\theta_\infty = \frac{W_0}{K} > \theta_2. \quad (4.28)$$

В этом случае на *всей* полуправой (II) $\frac{d\theta}{dt} > 0$, а на полуправой (I) $\frac{d\theta}{dt} < 0$ (последнее, конечно, имеет место всегда). Поэтому на фазовой линии нет никаких состояний равновесия и изображающая точка *после первого же переключения регулятора* будет описывать *замкнутую* фазовую траекторию *авгага*. В системе установится *автоколебательный режим*. Температура печи при этих колебаниях будет колебаться в пределах от θ_1 до θ_2 , т. е. в пределах зоны двузначности характеристики регулятора. В таком автоколебательном режиме температура печи не выходит за пределы этой зоны (а она может быть сделана достаточно узкой), несмотря на возможные изменения мощности нагревателя W_0 или изменение условий теплоотдачи.

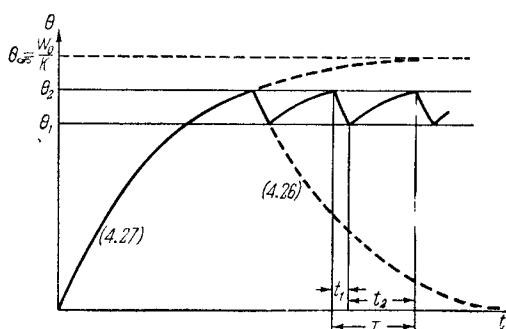


Рис. 194.

из кусков экспонент (4.26) и (4.27), «шитых» так, чтобы температура θ была непрерывной функцией времени. Периодические колебания являются «релаксационными», т. е. сильно отличающимися по своей форме от гармонических, и носят «пилообразный» характер.

Найдем период автоколебаний. Интервал времени t_1 , в течение которого нагреватель выключен и температура изменяется от θ_2 до θ_1 , определяется согласно (4.26) соотношением

$$\theta_1 = \theta_2 e^{-\frac{K}{C} t_1},$$

откуда

$$t_1 = \frac{C}{K} \ln \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

Аналогично интервал времени t_2 , в течение которого нагреватель

включен и температура возрастает от θ_1 до θ_2 , определяется в согласии с (4.27) выражением

$$\theta_2 = \frac{W_0}{K} + \left(\theta_1 - \frac{W_0}{K} \right) e^{-\frac{K}{C} t_2}$$

или

$$t_2 = \frac{C}{K} \ln \frac{\frac{W_0}{K} - \theta_1}{\frac{W_0}{K} - \theta_2}.$$

Таким образом, период автоколебаний

$$T = t_1 + t_2 = \frac{C}{K} \left\{ \ln \frac{\theta_2}{\theta_1} + \ln \frac{\frac{W_0}{K} - \theta_1}{\frac{W_0}{K} - \theta_2} \right\}$$

или

$$T = \frac{C}{K} \ln \frac{\frac{\theta_\infty}{\theta_1} - 1}{\frac{\theta_\infty}{\theta_2} - 1}. \quad (4.29)$$

Ясно, что чем уже зона двузначности характеристики регулятора (чем ближе θ_1 к θ_2), тем меньше период автоколебаний, тем чаще происходят переключения регулятора (включения и выключения нагревателя печи)¹⁾.

2. Колебания в схеме с неоновой лампой. В качестве второго примера динамической системы с 1/2 степени свободы, колебания

¹⁾ При постановке рассмотренной задачи о двухпозиционном регуляторе температуры мы считали, что температура в печи в каждый момент времени одинакова по *всему* объему печи. Это, конечно, справедливо только при достаточно медленных колебаниях температуры (настолько медленных, что в каждый момент времени распределение температуры по объему печи достаточно мало отличается от равномерного). Если учесть конечную скорость теплообмена между отдельными частями объема печи, то мы придем к динамической системе более высокого порядка или даже к распределенной системе. Температура печи в автоколебательном режиме будет несколько выходить за пределы зоны двузначности характеристики регулятора, а период автоколебаний не будет стремиться к нулю при приближении θ_1 к θ_2 , что находится в полном соответствии с экспериментальными данными о работе двухпозиционных регуляторов.

Рассмотренная нами динамическая модель двухпозиционного регулятора температуры дает удовлетворительное согласие с экспериментальными результатами только при достаточно широкой зоне двузначности и при наличии достаточно интенсивного теплообмена между отдельными частями объема печи.

которой описываются дифференциальным уравнением первого порядка (4.1) с двузначной правой частью, мы рассмотрим схему релаксационного генератора с неоновой лампой (рис. 195)¹⁾. Подобная схема рассматривалась Ван-дер-Полем, Фридлендером и др. [152, 153, 188, 146, 143].

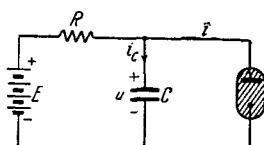


Рис. 195.

При рассмотрении этой схемы мы не будем учитывать никаких паразитных параметров элементов схемы и будем считать, что сила тока i через неоновую лампу является *функцией* напряжения u на ней и определяется *статической* характеристикой лампы

$i = \varphi(u)$ ²⁾. В результате этого мы придем к динамической системе с $1/2$ степени свободы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$C \frac{du}{dt} + i = \frac{E - u}{R}$$

или

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{RC} \{E - u - R\varphi(u)\} = f(u). \quad (4.30)$$

Нелинейность этой схемы обусловлена присутствием в ней неоновой лампы, для которой связь между током i и напряжением u не определяется законом Ома, а выражается нелинейной зависимостью $i = \varphi(u)$, имеющей гистерезисный характер. Наиболее типичные черты статической характеристики неоновой лампы, которые играют существенную роль в рассматриваемых нами процессах и которые мы будем учитывать, таковы: при малых напряжениях лампа совсем не пропускает тока («не горит»), ток в лампе возникает только при определенном напряжении U_1 —напряжении зажигания. При этом сразу устанавливается некоторая сила тока I_1 , отличная от нуля. При дальнейшем увеличении напряжения u сила тока возрастает по закону, близкому к линейному. При уменьшении напряжения, когда напряжение достигает значения U_1 (при «горящей» лампе), лампа еще не гаснет. При дальнейшем уменьшении u сила тока через лампу по-

¹⁾ Заметим, что рассмотрение тиаратронного генератора пилообразных напряжений аналогично рассмотрению схемы с неоновой лампой.

²⁾ Таким образом, мы предполагаем, что в каждый момент времени состояние неоновой лампы не отличается от *статического* (от установленвшегося режима при соответствующем *постоянном* напряжении u на неоновой лампе). Это, очевидно, можно делать только при достаточно медленных процессах в схеме, когда скорости изменения u значительно меньше скоростей установления газового разряда в неоновой лампе. Время установления газового разряда в неоновой лампе имеет величину порядка сотен микросекунд. Поэтому результаты, которые будут получены ниже для периодических колебаний в рассматриваемой схеме, будут справедливы только для схем, частоты колебаний которых не превышают (по порядку величины) десятка тысяч колебаний в секунду.

степенно уменьшается, наконец, лампа сразу гаснет при некотором напряжении U_2 — напряжении гашения и при токе I_2 , причем $U_2 < U_1$ и $I_2 < I_1$. Все эти существенные для рассматриваемого генератора с неоновой лампой черты статической характеристики $i = \varphi(u)$ передаются кривой, изображенной на рис. 196, а.

Конечно, в действительности цепь неоновой лампы обладает некоторой малой паразитной самоиндукцией и установление газового разряда требует малого, но все же конечного промежутка времени;

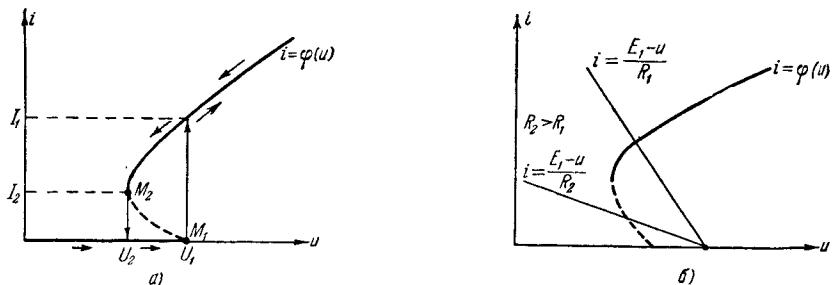


Рис. 196.

поэтому изменение тока через неоновую лампу не может совершаться мгновенно. Но поскольку мы пренебрегаем этими факторами, мы будем считать, что ток через неоновую лампу при ее зажигании и гашении изменяется от 0 до I_1 и от I_2 до 0 мгновенно, скачком.

В то же время, несмотря на скачки тока, напряжение u изменяется *непрерывно*, так как скачкообразные изменения этого напряжения ($\frac{du}{dt} = \infty$) связаны с бесконечными токами (ток заряда конденсатора $i_c = C \frac{du}{dt}$) и напряжениями, чтобы мы считаем в нашей схеме невозможным. Поэтому изменения тока i через неоновую лампу при ее зажигании (при $u = U_1$) и при ее гашении (при $u = U_2$) происходят так, как указано на рис. 196, а стрелками¹). Пунктирный участок $M_1 M_2$ статической характеристики неоновой лампы, «мимо» которого проскаивает изображающая точка, обычно не осуществляется в статическом режиме из-за его неустойчивости. Характеристика, приведенная на рис. 196, а, в основных чертах совпадает с той характеристикой, которая может быть снята экспериментально.

Состояния равновесия системы определяются из условия $f(u) = 0$, т. е. из уравнения

$$\frac{E - u}{R} = \varphi(u). \quad (4.31)$$

¹⁾ Тем самым мы считаем, что во время этих быстрых (скаккообразных) изменений тока i через неоновую лампу ток i уже не определяется статической характеристикой $i = \varphi(u)$, а система не подчиняется уравнению (4.30).

Чтобы найти корни этого уравнения, строим кривую $i = \varphi(u)$ и прямую $i = \frac{E-u}{R}$ и находим их точки пересечения. В том случае, когда $E > U_1$, т. е. когда напряжение батареи больше напряжения зажигания лампы (а мы этим одним случаем и ограничим наше рассмотрение), существует только одна точка пересечения статической характеристики $i = \varphi(u)$ и «нагрузочной» прямой $i = \frac{E-u}{R}$,

причем положение этой точки пересечения зависит от значений параметров E и R (рис. 196, б). Устойчивость этого состояния равновесия $u = U$ определяется, как мы уже знаем, знаком $f'(u)$. Легко убедиться, что если состояние равновесия лежит на восходящем участке характеристики, то оно устойчиво, если же оно лежит на падающем участке, то неустойчиво¹⁾. Следовательно, для каждого $E > U_1$ мы можем, увеличивая R , перейти от устойчивого состояния равновесия к неустойчивому, причем чем больше E , тем больше должно быть то критическое сопротивление R_{kp} , при котором точка пересечения переходит на нижний, падающий участок характеристики, и единственное состояние равновесия становится неустойчивым.

Ограничимся рассмотрением колебаний в схеме с неоновой лампой, начинающихся из таких начальных состояний, для которых точка (u, i) , изображающая состояние неоновой лампы, лежит или на участке $i = 0$, или на восходящем участке статической характеристики²⁾. В этом случае мы можем совсем не принимать во внимание падающего участка характеристики, так как неоновая лампа

¹⁾ Последний результат находится в некотором противоречии с экспериментальными данными. Оказывается, состояние равновесия на падающем участке будет устойчивым, если сопротивление R будет достаточно большим, а емкость C — достаточно малой (см. § 5 гл. V). Это обусловлено стабилизирующим действием инерционности газового разряда, конечными скоростями установления стационарных состояний в неоновой лампе. Вывод о неустойчивости состояния равновесия на падающем участке характеристики, равно как и все наше рассмотрение задачи о колебаниях в схеме с неоновой лампой, справедлив только при достаточно больших емкостях C , при которых колебания в схеме достаточно медленны.

²⁾ Если бы нас интересовали колебания, начинающиеся из других начальных состояний (даже из тех, которые лежат на падающем участке характеристики), то для их рассмотрения наша динамическая система первого порядка непригодна. Мы должны выйти за ее пределы и учесть существенные малые паразитные параметры из числа тех, которыми мы сейчас пренебрегаем (необходимо, в частности, учесть инерционность газового разряда и вместо статической характеристики неоновой лампы взять дифференциальное уравнение, отображающее динамику газового разряда). Однако это не представляет особого интереса, так как весьма быстро (через несколько сотен микросекунд) схема придет в состояние, соответствующее какой-либо точке на участке $i = 0$ или на восходящем участке статической характеристики лампы, и дальнейшие колебания в ней будут описываться рассматриваемой здесь динамической системой первого порядка (см. § 7 п. 1 гл. X).

никогда не придет в состояния, изображаемые точками этого падающего участка.

Тогда ток i через неоновую лампу будет двузначной функцией напряжения u на интервале $U_2 < u < U_1$ и однозначной вне этого интервала (рис. 197, а). В соответствии с этим, как и в предыдущей задаче, фазовой линией будет линия «с наложением» (рис. 197, б), состоящая из двух полупрямых (I) $u < U_1$ и (II) $u > U_2$, первая из которых соответствует состояниям системы с погашенной, а вторая — состояниям с горящей неоновой лампой. При этом переход изображающей точки с одной полупрямой на другую (зажигание и гашение неоновой лампы) происходит соответственно при $u = U_1$ и $u = U_2$, т. е. в концевых точках этих полупрямых. Поскольку фазовая линия допускает единственную замкнутую фазовую траекторию *абвга*, в нашей системе возможен только единственный периодический процесс.

При помощи этой фазовой линии легко проследить за движением системы в разных случаях. В том случае, когда R достаточно мало и положение равновесия устойчиво (оно лежит при $E > U_1$ на полупрямой (II)), сразу после присоединения лампы к конденсатору она вспыхнет, и после этого напряжение на лампе и ток через нее начнут уменьшаться. Скорость изменения напряжения на зажимах лампы будет определяться параметрами схемы, т. е. уравнением (4.30), но во всяком случае она будет конечной. Уменьшение напряжения u будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто устойчивое состояние равновесия $u = U$

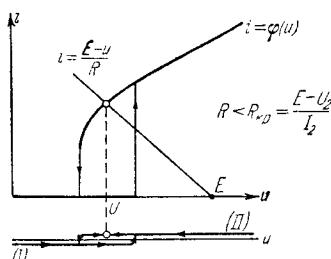


Рис. 197.

(рис. 198), в котором схема и останется (строго говоря, будет иметь место асимптотическое при $t \rightarrow +\infty$ приближение системы к этому состоянию равновесия).

Если же R настолько велико, что на полупрямой (II) нет состояния равновесия (напомним, что в этом случае состояние равновесия лежит на падающем участке характеристики лампы и неустойчиво), то теперь на всей полупрямой (II) $\frac{du}{dt} < 0$ и, поскольку на полупрямой (I) $\frac{du}{dt} > 0$ (ибо $E > U_1$), в схеме после первого же зажигания или

гашения неоновой лампы установится *периодический процесс*, изображаемый на фазовой линии замкнутой фазовой траекторией *абвга* или замкнутой кривой *АБВВ'ГА'А* на плоскости u , i (рис. 199). Участок *абв* этой замкнутой фазовой траектории соответствует процессу заряда конденсатора C через сопротивление R при погашенной лампе, участок *вга* — разряду конденсатора через горящую неоновую лампу.

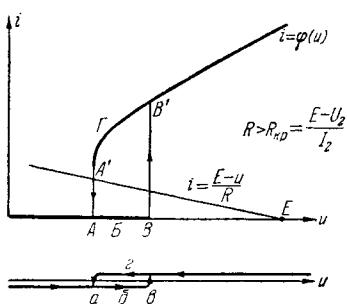


Рис. 199.

Осциллограммы колебаний, т. е. вид кривых $u(t)$, $i(t)$ и $i_c = C \frac{du}{dt}$, даны на рис. 200. Вид этих кривых вначале, до установления периодического процесса, зависит от начальных условий. Так, например, если в начальный момент $u_0 = E$ (схема включается путем замыкания ключа B_2 на рис. 201;

ключ B_1 был замкнут раньше), то характер установления будет таким, как это изображено на рис. 202. Если же в начальный момент $u_0 = 0$ (ключ B_2 замкнут и схема включается замыканием ключа

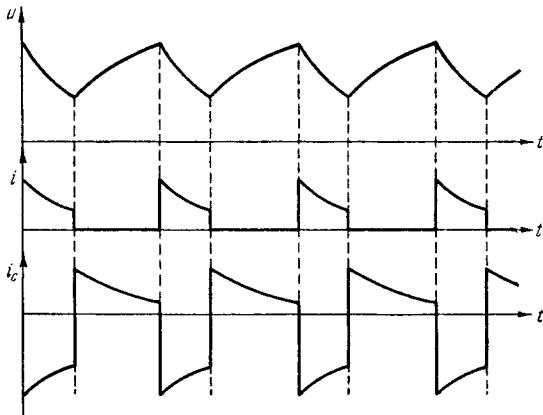


Рис. 200.

B_1 на рис. 201), то характер установления будет иной, изображенный на рис. 203.

Мы нарисовали качественную картину автоколебаний в схеме с неоновой лампой. Для того чтобы определить их количественные характеристики (период, амплитуду, вид осциллограмм), нужно задаться конкретным видом нелинейной функции $i = \varphi(u)$. Проведем вычисления для кусочно-линейной функции $\varphi(u)$, график которой

состоит из прямолинейных отрезков (рис. 204). Пусть устойчивые участки статической характеристики лампы (падающего участка

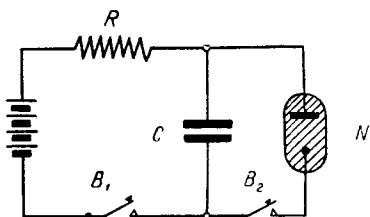


Рис. 201.

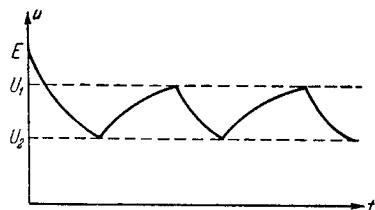


Рис. 202.

характеристики мы не будем рассматривать) заданы уравнением

$$i = \begin{cases} 0 & \text{на полуправой (I) (при погашенной лампе),} \\ \frac{u - U_0}{R_i} & \text{на полуправой (II) (при горящей лампе)} \end{cases}$$

(постоянные $U_0 = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2} < U_2$ и $R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_1 - I_2}$, имеющие соответственно размерности напряжения и сопротивления, характеризуют свойства горящей лампы).

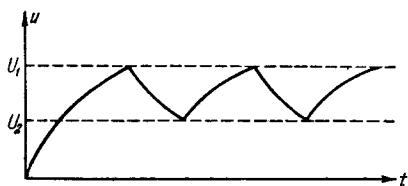


Рис. 203.

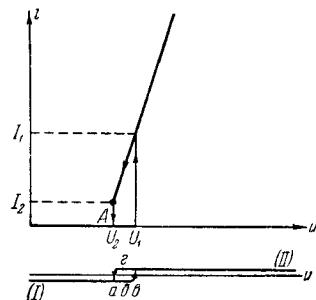


Рис. 204.

Начнем рассмотрение с того момента, когда лампа погасла и изображающая точка находится в положении a (рис. 204). На участке ab (лампа не горит, $i = 0$) имеем следующее уравнение движения:

$$RC \frac{du}{dt} = E - u. \quad (4.32)$$

Так как $E > U_1$, то напряжение u на конденсаторе будет увеличиваться (при $u < U_1$ $\frac{du}{dt} > 0$) и через некоторый интервал времени τ_1 достигнет напряжения зажигания U_1 . Поскольку решением уравнения (4.32), удовлетворяющим начальному условию $u = U_2$ при $t = 0$,

$$u = E - (E - U_2) e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (4.33)$$

является τ_1 определяется соотношением

$$U_1 = E - (E - U_0) e^{-\frac{\tau_1}{RC}}$$

или

$$\tau_1 = RC \ln \frac{E - U_0}{E - U_1}. \quad (4.34)$$

После того как лампа вспыхнет, уравнение движения примет вид

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E - u}{R} - \frac{u - U_0}{R_i}.$$

Вводя обозначение $\rho = \frac{R_i}{R + R_i}$, приведем это уравнение к виду

$$C \frac{du}{dt} = \frac{E}{R} + \frac{U_0}{R_i} - \frac{u}{\rho}. \quad (4.35)$$

Пусть $\frac{U_0}{\rho} > \frac{E}{R} + \frac{U_0}{R_i}$, что имеет место при

$$R > R_{kp} = \frac{E - U_0}{I_s}. \quad (4.36)$$

Тогда при $U_0 < u < U_1$, $\frac{du}{dt} < 0$, напряжение на конденсаторе будет уменьшаться, так как ток разряда конденсатора через горящую неоновую лампу при $R > R_{kp}$ всегда больше тока заряда через сопротивление R ; через некоторый промежуток времени τ_2 конденсатор разрядится до напряжения U_0 и лампа погаснет. Решение уравнения (4.35) при начальном условии $u = U_1$ при $t = 0$ таково:

$$\frac{u}{\rho} = \frac{E}{R} + \frac{U_0}{R_i} + \left(\frac{U_1}{\rho} - \frac{E}{R} - \frac{U_0}{R_i} \right) e^{-\frac{t}{\rho C}}. \quad (4.37)$$

Подставляя $u = U_0$ при $t = \tau_2$ и разрешая относительно τ_2 , получим:

$$\tau_2 = \rho C \ln \frac{\frac{U_1}{\rho} - \frac{E}{R} - \frac{U_0}{R_i}}{\frac{U_0}{\rho} - \frac{E}{R} - \frac{U_0}{R_i}}$$

или, приняв во внимание, что $\frac{U_1 - U_0}{R_i} = I_1$ и $\frac{U_0 - U_0}{R_i} = I_2$,

$$\tau_2 = \rho C \ln \frac{RI_1 + U_1 - E}{RI_2 + U_0 - E}. \quad (4.38)$$

Период автоколебаний равен

$$\tau = \tau_1 + \tau_2. \quad (4.39)$$

Таким образом, мы получили аналитические выражения как для периода автоколебаний, так и для определения формы осциллограммы. Осциллограмма автоколебаний напряжения на конденсаторе C состоит из кусков экспонент (см. уравнения (4.33) и (4.37)) и по форме весьма отлична от синусоидальной. Период автоколебаний пропорционален емкости конденсатора C и зависит более сложным образом от остальных параметров схемы и неоновой лампы. На рис. 205 изображена качественная зависимость периода автоколебаний τ от напряжения батареи E при постоянных прочих параметрах. Автоколебания существуют только при $U_1 < E < E_{kp} = U_2 + RI_2$. При E , приближающемся как к U_1 , так и к E_{kp} , $\tau \rightarrow +\infty$ (в первом случае к бесконечности стремится τ_1 , во втором — τ_2).

В заключение еще раз напомним, что рассмотренная нами динамическая система первого порядка удовлетворительно отражает процессы в схеме релаксационного генератора с неоновой лампой только при достаточно больших емкостях C , т. е. при не очень быстрых колебаниях, при которых не оказывается инерционность ионных процессов в неоновой лампе.

§ 7. Мультивибратор с одной RC -цепью

Другим примером электрической автоколебательной системы может служить так называемый мультивибратор (с одной RC -цепью), схема которого изображена на рис. 206. Такой мультивибратор генерирует колебания напряжения, по форме близкие к «прямоугольным», — периодическую последовательность почти прямоугольных импульсов напряжения.

Уравнения колебаний мультивибратора, если учитывать только те элементы схемы, которые изображены на рис. 206, и пренебречь сеточным током лампы L_2 , запишутся в виде:

$$i + C \frac{dv}{dt} + \frac{u + v - E_a}{R_a} = 0, \\ C \frac{dv}{dt} = \frac{u}{R_g}. \quad (4.40)$$

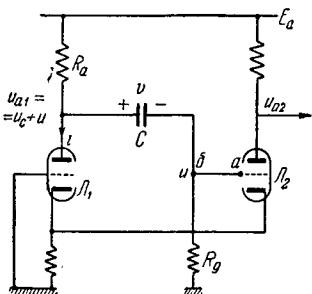


Рис. 206.

Пренебрегая анодной реакцией, мы можем считать анодные токи ламп однозначными функциями сеточного напряжения u на лампе L_2 . В частности, зависимость анодного тока i лампы L_1 от этого напряжения

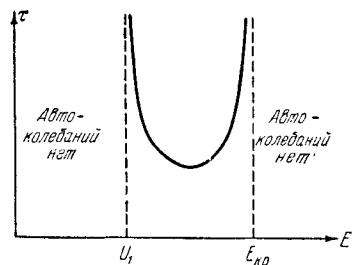


Рис. 205.