

Таким образом, мы получили аналитические выражения как для периода автоколебаний, так и для определения формы осциллограммы. Осциллограмма автоколебаний напряжения на конденсаторе C состоит из кусков экспонент (см. уравнения (4.33) и (4.37)) и по форме весьма отлична от синусоидальной. Период автоколебаний пропорционален емкости конденсатора C и зависит более сложным образом от остальных параметров схемы и неоновой лампы. На рис. 205 изображена качественная зависимость периода автоколебаний τ от напряжения батареи E при постоянных прочих параметрах. Автоколебания существуют только при $U_1 < E < E_{kp} = U_2 + RI_2$. При E , приближающемся как к U_1 , так и к E_{kp} , $\tau \rightarrow +\infty$ (в первом случае к бесконечности стремится τ_1 , во втором — τ_2).

В заключение еще раз напомним, что рассмотренная нами динамическая система первого порядка удовлетворительно отражает процессы в схеме релаксационного генератора с неоновой лампой только при достаточно больших емкостях C , т. е. при не очень быстрых колебаниях, при которых не оказывается инерционность ионных процессов в неоновой лампе.

§ 7. Мультивибратор с одной RC -цепью

Другим примером электрической автоколебательной системы может служить так называемый мультивибратор (с одной RC -цепью), схема которого изображена на рис. 206. Такой мультивибратор генерирует колебания напряжения, по форме близкие к «прямоугольным», — периодическую последовательность почти прямоугольных импульсов напряжения.

Уравнения колебаний мультивибратора, если учитывать только те элементы схемы, которые изображены на рис. 206, и пренебречь сеточным током лампы L_2 , запишутся в виде:

$$i + C \frac{dv}{dt} + \frac{u + v - E_a}{R_a} = 0, \\ C \frac{dv}{dt} = \frac{u}{R_g}. \quad (4.40)$$

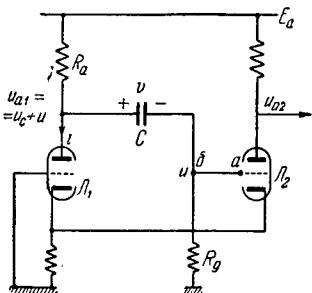


Рис. 206.

Пренебрегая анодной реакцией, мы можем считать анодные токи ламп однозначными функциями сеточного напряжения u на лампе L_2 . В частности, зависимость анодного тока i лампы L_1 от этого напряжения

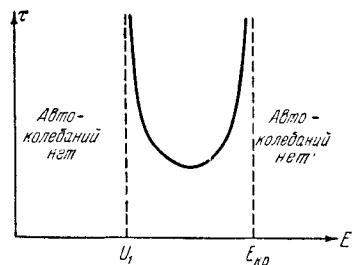


Рис. 205.

дается характеристикой ламповой группы $i = \varphi(u)$, которая, как мы видели в п. 3 § 6 настоящей главы, имеет вид, изображенный на рис. 207. Ниже, для некоторого упрощения рассмотрения колебаний схемы, будем считать, что середина падающего участка — место наибольшей крутизны — лежит при напряжении $u = 0$ (будем обозначать через S_0 наибольшее абсолютное значение крутизны характеристики на падающем участке: $S_0 = -\varphi'(0)$, тогда $|\varphi'(u)| \leq S_0$)¹⁾.

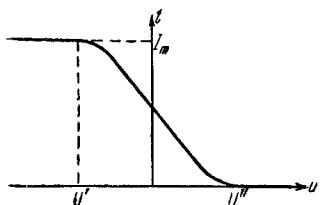


Рис. 207.

Исключая v (напряжение на конденсаторе C) из уравнений (4.40), мы получим

дифференциальное уравнение первого порядка для напряжения u на сетке лампы L_2 :

$$C(R_a + R_g) \left[1 + \frac{R_a R_g}{R_a + R_g} \varphi'(u) \right] \frac{du}{dt} + u = 0. \quad (4.41)$$

Поскольку ток i является однозначной функцией напряжения u , задание u однозначно определяет $\frac{du}{dt}$, т. е. состояние рассматриваемой нами динамической модели мультивибратора. Поэтому мы можем взять в качестве фазовой линии системы прямую u .

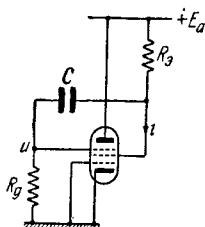


Рис. 208.

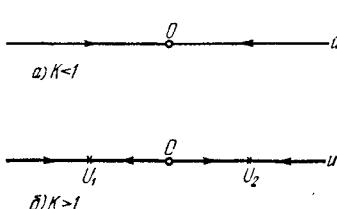


Рис. 209.

Единственным состоянием равновесия, как это следует из уравнения (4.41), является состояние $u = 0$. Его устойчивость, очевидно, определяется следующим линеаризованным уравнением (уравнением

¹⁾ С динамикой рассматриваемой схемы сходна динамика мультивибратора с лампой в «транзитронном» режиме (рис. 208). Уравнения колебаний в такой схеме совпадают с уравнениями (4.40), а зависимость тока i экранной сетки от напряжения u на третьей сетке дается характеристикой, сходной с изображенной на рис. 207. Падающий участок на ней обусловлен перераспределением электронного потока с катода лампы между экранной сеткой и анодом при изменении напряжения u на третьей сетке (при уменьшении этого напряжения большая часть электронного потока с катода идет на экранную сетку, т. е. ток i растет, а анодный ток падает).

первого приближения):

$$C(R_a + R_g)[1 - K] \frac{du}{dt} + u = 0, \quad (4.42)$$

где

$$K = \frac{S_0 R_a R_g}{R_a + R_g}$$

— коэффициент, имеющий смысл коэффициента передачи усилителя, который получается из мультивибратора размыканием цепи сетки лампы L_2 (разрывом соединения точек a и b на рис. 206; точка a — вход и точка b — выход усилителя).

Если $K < 1$, то состояние равновесия $u = 0$ устойчиво и устанавливается в системе при любых начальных условиях, так как в силу неравенства $|\varphi'(u)| \leq S_0$ $\frac{du}{dt} > 0$ при $u < 0$ и $\frac{du}{dt} < 0$ при $u > 0$.

Разбиение фазовой прямой на фазовые траектории для этого случая неизвуждающегося мультивибратора дано на рис. 209, а.

Иная картина получается при $K > 1$ (рис. 209, б), когда состояние равновесия $u = 0$ неустойчиво (мультивибратор самовозбуждается). Обозначим через U_1 и U_2 те значения u , при которых коэффициент при $\frac{du}{dt}$ в уравнении (4.41) обращается в нуль (т. е. $\frac{du}{dt}$ обращается в бесконечность). Очевидно, U_1 и U_2 определяются уравнением

$$\frac{R_a R_g}{R_a + R_g} \varphi'(u) = -1$$

и $U' < U_1 < 0 < U_2 < U''$. При переходе через $u = U_1$ или $u = U_2$ $\frac{du}{dt}$ меняет знак, поэтому $\frac{du}{dt} > 0$ при $u < U_1$, $\frac{du}{dt} < 0$ при $U_1 < u < 0$, $\frac{du}{dt} > 0$ при $0 < u < U_2$ и, наконец, $\frac{du}{dt} < 0$ при $u > U_2$.

Следовательно, изображающая точка при любых начальных условиях приходит или в точку $u = U_1$, или в точку $u = U_2$, которые, однако, не являются состояниями равновесия и из которых нет выходящих фазовых траекторий.

Таким образом, уравнение примененной нами динамической модели мультивибратора — уравнение (4.41) — приводит систему в такие состояния ($u = U_1$ или $u = U_2$), из которых с точки зрения этого уравнения нет выхода. Наша динамическая модель мультивибратора, полученная в результате учета только некоторых свойств реального мультивибратора и описываемая уравнением (4.41), оказалась неудовлетворительной, противоречивой и не может отображать колебания в реальном мультивибраторе.

Дело здесь, конечно, в том, что при построении динамической модели мультивибратора не учли каких-то существенных

факторов, коренным образом определяющими закономерности колебательных процессов в мультивибраторе на некоторых этапах движения.

Такими существенными параметрами, определяющими закономерности колебаний в мультивибраторе на этих этапах движения, являются *малые паразитные емкости* в схеме (емкости C_a и C_g анодного узла лампы L_1 и сеточного узла лампы L_3 или же емкость C_k катодного узла). Эти емкости, несмотря на их малость, играют определяющую роль во время быстрых изменений напряжения u на сетке лампы L_2 , составляющих одну из характерных особенностей колебаний мультивибратора. При учете паразитных емкостей C_a и C_g или емкости C_k мы приедем к динамической модели второго порядка (с одной степенью свободы), которая будет достаточно удовлетворительно отображать колебания, происходящие в мультивибраторе. Такая динамическая модель мультивибратора будет рассмотрена в § 5 гл. VIII и в § 4 гл. X.

Другой путь, дающий возможность рассмотреть колебания в мультивибраторе, состоит в «исправлении» динамической модели первого порядка путем введения некоторых *дополнительных постулатов*, которые указывали бы закон движения системы из состояний $u = U_1$ и $u = U_2$, заменяя уравнение (4.41) на определенных этапах колебаний. Эти дополнительные постулаты устанавливаются или на основании экспериментальных данных о колебательных процессах в мультивибраторе и некоторых дополнительных физических соображений, или же путем рассмотрения «более полной» динамической модели с фактическим учетом существенных паразитных параметров, но полагая их достаточно малыми (точнее, стремящимися к нулю). Последний метод будет нами использован в гл. X при рассмотрении ряда колебательных систем с «разрывными» колебаниями¹⁾.

Сейчас же мы рассмотрим колебания мультивибратора, пользуясь динамической моделью первого порядка, дополненной *постулатом о скачках напряжения* u на сетке лампы L_2 . Известно, что мультивибратор при $K > 1$ совершает автоколебания, которые носят «разрывный» характер: сравнительно медленные изменения напряжения u периодически сменяются весьма быстрыми. Скорости последних определяются скоростями перезаряда паразитных емкостей схемы и тем больше, чем меньше паразитные емкости (наиболее существенными из них являются емкости C_a и C_g). При достаточно малых паразитных емкостях мы можем рассматривать эти быстрые изменения напряжения как бесконечно быстрые, как мгновенные, скачкообразные.

В соответствии с этим мы дополним нашу динамическую модель мультивибратора постулатом о том, что в модели наряду с движениями,

¹⁾ Разрывными колебаниями называются такие колебания, при которых наряду с сравнительно медленными изменениями состояния имеются и весьма быстрые изменения состояния системы. Мультивибратор является типичным представителем генераторов разрывных колебаний.

подчиняющимися уравнению (4.41), могут иметь место мгновенные, скачкообразные изменения напряжения u , которые, конечно, уравнению (4.41) не подчиняются. Уравнение (4.41) заведомо не пригодно для описания движения системы после того, как последняя пришла в состояние $u = U_1$ или в состояние $u = U_2$; поэтому мы предположим, что из этих состояний система выходит путем скачка в такие состояния, в которых уравнение (4.41) снова определяет закон движения. Для определения состояний, в которые система перескакивает, необходимо привлечь дополнительные физические соображения. Предположим, что в схеме не может быть бесконечных напряжений и токов. Тогда в силу нашего предположения ток заряда конденсатора $C \frac{dv}{dt}$ всегда ограничен; следовательно, при скачках напряжения u напряжение v на конденсаторе C изменяться не будет, так как иначе $\frac{dv}{dt} = \infty$, что невозможно. Этого условия непрерывности напряжения на конденсаторе C («условия скачка») в рассматриваемой задаче достаточно для однозначного определения состояния, в которое приходит система в результате скачка¹⁾.

Исключая из уравнений (4.40) $C \frac{dv}{dt}$, мы получим v как функцию напряжения u :

$$v = F(u) = E_a - R_a \varphi(u) - \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) u \quad (4.43)$$

(само собой разумеется, что это соотношение справедливо только для тех состояний мультивибратора, для которых соблюдается уравнение (4.41) или, что то же самое, уравнения (4.40)). Очевидно, что v является однозначной и непрерывной функцией u . Ее график при $K > 1$ приведен на рис. 210, а (нетрудно видеть, что при $u = U_1$ и $u = U_2$ $F'(u) = 0$). Поскольку состояния мультивибратора непосредственно перед скачком ($u = U_1$ или $u = U_2$) и после скачка ($u = U'_1$ или соответственно $u = U'_2$) таковы, что для них справедливо уравнение (4.41), а следовательно и соотношение (4.43), и при скачке v

¹⁾ В других задачах, например в задаче о колебаниях двух связанных между собой мультивибраторов [37], условия непрерывности напряжений на конденсаторах при скачках недостаточно для однозначного определения состояний системы после скачков. В этих случаях приходится делать некоторые дополнительные предположения для однозначного определения этих состояний.

Если же закон скачков в системе получается на основании предельного рассмотрения «более полной» динамической модели (с учетом существенных паразитных параметров, но считая их стремящимися к нулю), то состояния системы после скачков всегда определяются однозначно без каких-либо дополнительных условий (см. гл. X). Заметим, что подобное предельное рассмотрение «более полной» динамической модели мультивибратора (см. § 4 гл. X) показывает, что при скачках напряжение v действительно не изменяется, а скачки начинаются не только при $u = U_1$ и $u = U_2$, но и при любых u на интервале $U_1 < u < U_2$.

не изменяется, состояние мультивибратора ($n = U'_j$) непосредственно после скачка из состояния U_j ($j = 1, 2$) определяется уравнением

$$F(U_j) = F(U'_j)$$

или

$$R_a \varphi(U'_j) + \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) U'_j = R_a \varphi(U_j) + \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) U_j. \quad (4.44)$$

Графическое решение этого уравнения дано на рис. 210, а. Очевидно, состояние мультивибратора после скачка однозначно определяется

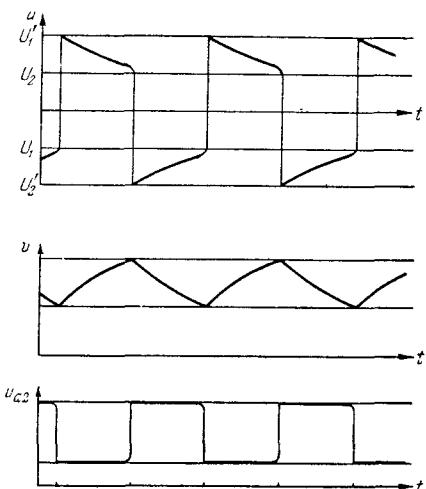
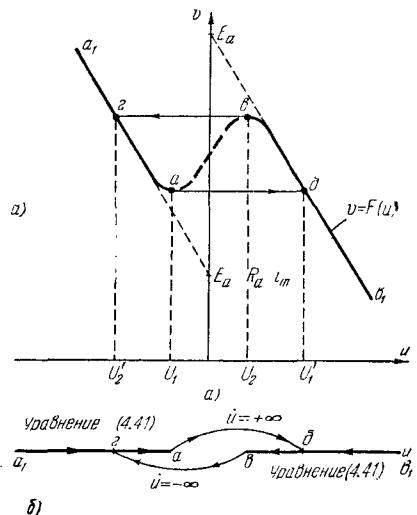


Рис. 210.

Рис. 211.

его состоянием перед скачком (U'_1 и U'_2 однозначно определяются соответственно по U_1 и U_2).

Таким образом, колебания в мультивибраторе оказываются периодическими и состоят из медленных изменений напряжения u (с конечной скоростью) от U'_1 до U_2 и от U'_2 до U_1 , подчиняющихся уравнению (4.41), и скачкообразных изменений от U_1 до U'_1 и от U_2 до U'_2 , определяемых условиями скачка. На рис. 210, а этому периодическому движению соответствует замкнутая кривая $ab\bar{v}ga$ (участки ab и ga соответствуют «медленным», с конечной скоростью, а участки ab и ga — «быстрым», скачкообразным изменениям напряжения u). Осциллографы колебаний напряжений u , v и u_{a2} приведены на рис. 211. Колебания напряжения v на конденсаторе C непрерывны и имеют «пилюобразную» форму, а колебания анодного напряжения u_{a2} лампы L_2 близки к «прямоугольным».

Для определения периода автоколебаний нужно проинтегрировать уравнение (4.41) или

$$dt = -C(R_a + R_g) \left[1 + \frac{R_a R_g}{R_a + R_g} \varphi'(u) \right] \frac{du}{u} \quad (4.45)$$

в пределах от $u = U_2'$ до $u = U_1$ и от $u = U_1'$ до $u = U_2$, так как длительность скачкообразных изменений напряжения u предполагается равной нулю. Для вычисления периода можно ограничиться простейшей симметричной кусочно-линейной характеристикой ламповой группы (рис. 212, а). В областях, по которым нужно производить интегрирование, — в области отсутствия тока и в области тока насыщения ($i = I_m = 2S_0 U_0$) эта характеристика достаточно удовлетворительно отображает свойства реальной ламповой группы (ламп с общим катодным сопротивлением). В этих областях $\varphi'(0) = 0$, уравнение (4.41) является линейным:

$$C(R_a + R_g) \frac{du}{dt} + u = 0$$

и легко интегрируется. В результате интегрирования получается сравнительно простая, весьма характерная для процессов подобного рода формула для периода ¹⁾:

$$T = 2C(R_a + R_g) \ln(2K - 1), \quad (4.46)$$

где, как и раньше,

$$K = \frac{S_0 R_a}{1 + \frac{R_a}{R_g}}.$$

¹⁾ Зависимость напряжения u на конденсаторе C от напряжения u на сетке лампы L_2 во время «медленных» движений изображена на рис. 212, б. Согласно уравнению (4.44) для участка ba имеем:

$$\left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) U_1' = R_a I_m - \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right) U_0, \text{ т. е. } U_1' = U_0 (2K - 1).$$

Поэтому длительность «медленного» движения по участку ba равна

$$C(R_a + R_g) \ln(2K - 1).$$

В силу симметрии характеристики ламповой группы длительность «медленного» движения по участку ga будет такой же; поэтому для полного периода получается формула (4.46).

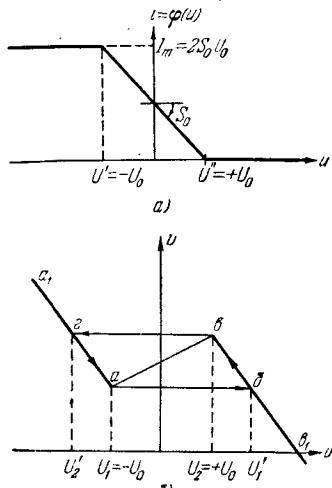


Рис. 212.

В эту формулу помимо постоянной времени $C(R_a + R_g)$ входит еще и логарифмическая зависимость от коэффициента K , из которой следует, что при приближении к границе возбуждения (при $K \rightarrow 1$) быстро возрастает частота колебаний. Частота колебаний возрастает также и при уменьшении емкости C . Однако, строго говоря, при больших частотах колебаний мы уже не можем рассматривать мультивибратор как систему с $1/2$ степени свободы (без фактического учета малых паразитных емкостей схемы), так как в этом случае их роль настолько существенна, что колебания перестают быть разрывными и приближаются по своей форме к синусоидальным.

Итак, мы смогли рассмотреть колебания в мультивибраторе, «дополнив» его динамическую модель первого порядка постулатом о скачках напряжения на сетке u и лампы L_2 . В такой «дополненной» динамической модели напряжение u на интервале $U'_2 < u < U'_1$ уже не определяет однозначно состояния системы, так как при этих напряжениях мы имеем различные законы движения в зависимости от того, какое движение («медленное» или «быстрое», скачкообразное) имеет место. В соответствии с этим фазовой линией для модели, дополненной постулатом о скачках, будет не прямая u , а линия «с наложениями», изображенная на рис. 210, б и топологически эквивалентная линии a_1ab и b_1bg на рис. 210, а. На участках a_1a и b_1b движение определяется уравнением (4.41), а скачки из a в b и из b в g , изображенные тонкими линиями, — постулатом о скачках напряжения u ($\frac{du}{dt} = +\infty$ на участке ab и $\frac{du}{dt} = -\infty$ на участке bg). Фазовая линия, как и в других примерах, разобранных в § 7 настоящей главы, допускает замкнутую фазовую траекторию, которая соответствует разрывным периодическим колебаниям мультивибратора.

На этом мы закончим рассмотрение динамических систем первого порядка (к рассмотрению разрывных колебаний в таких системах мы вернемся в гл. X) и перейдем к рассмотрению динамических систем второго порядка.
