

ГЛАВА V

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹⁾

Мы будем рассматривать в этой главе автономные динамические системы второго порядка (с одной степенью свободы), т. е. такие динамические системы (динамические модели реальных физических систем), движение которых отображается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Такие системы представляют собой наиболее общий случай среди тех, которые составляют сейчас предмет нашего рассмотрения. Как уже было сказано, к двум уравнениям первого порядка приводит (при соответствующих упрощающих предположениях), например, исследование различных электротехнических и радиотехнических схем, в частности, рассмотрение лампового генератора при обычных упрощающих предположениях; к таким же задачам приводит исследование многих механических систем, исследование ряда вопросов динамики полета и т. д.

Следует подчеркнуть, что для математического изучения движений подобных физических систем еще недостаточно систем дифференциальных уравнений (5.1): кроме закона движения, выражаемого системой уравнений (5.1), необходимо знать еще многообразие возможных состояний рассматриваемой системы, иначе говоря, фазовое пространство динамической системы, точки которого *взаимно однозначно и непрерывно* соответствуют состояниям системы²⁾.

Но характер фазового пространства должен точно так же быть выведен из физической задачи, как и вид дифференциальных уравнений. Если, например, мы знаем, что наша система приходит к прежнему состоянию при изменении x на 2π , то этим самым имеем

¹⁾ §§ 5 и 12 переработаны Н. А. Железовым, § 1, § 3 (п. 1), § 7 (пп. 2, 3), §§ 9 и 11 написаны им заново.

²⁾ Конечно, в рассматриваемом сейчас случае динамических систем второго порядка (с одной степенью свободы) фазовое пространство является двумерным, т. е. некоторой поверхностью, так как состояние системы полностью задается парой чисел x, y .

указания о характере фазового пространства, о его связности, о его «цилиндричности». Дифференциальные уравнения сами по себе еще не определяют характера возможных движений системы, характера возможных фазовых траекторий в фазовом пространстве, пока это пространство еще не выбрано. Чтобы пояснить это, рассмотрим простейшую линейную систему:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b.$$

Если x и y — обычные декартовы координаты на фазовой плоскости, то фазовые траектории суть прямые линии. На фазовой плоскости мы имеем континуум «убегающих» движений. Если же x и y — ортогональные криволинейные координаты на торе (например, x — азимут меридиональной плоскости, а y — полярный угол с вершиной на оси тора), то фазовые траектории для той же системы дифференциальных уравнений образуют либо континуум замкнутых кривых (если a и b соизмеримы), т. е. континуум периодических решений, либо континуум траекторий, всюду плотно заполняющих поверхность тора (если a и b не соизмеримы), т. е. континуум так называемых квазипериодических решений. Этот пример показывает значение природы фазового пространства, его связности, для картины поведения фазовых траекторий. Общие законы поведения, определяемые одним и тем же уравнением интегральных кривых, будут различны в случае плоскости и тора.

В настоящей главе мы ограничимся наиболее важным для применений случаем, когда фазовая поверхность представляет собой обычную плоскость. Позже, в гл. VII, на примерах мы коснемся имеющего существенное значение для механики случая цилиндрической фазовой поверхности, а в гл. VIII рассмотрим также несколько систем с многолистной фазовой поверхностью.

§ 1. Фазовые траектории и интегральные кривые на фазовой плоскости

Итак, будем рассматривать систему двух автономных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

описывающих движения некоторой динамической системы второго порядка¹⁾, предполагая, что состояния этой динамической системы взаимно однозначно и непрерывно соответствуют точкам фазовой

¹⁾ Заметим, что если бы мы имели одно уравнение второго порядка $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, то заменой $\dot{x} = y$ мы всегда могли бы привести его к виду $\ddot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, y)$, т. е. к виду (5.1).

плоскости x, y . Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ будем полагать аналитическими (на всей фазовой плоскости)¹⁾.

Условия теоремы Коши о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений (см. Дополнение I) для уравнений (5.1), очевидно, выполнены, и поэтому существует единственная система функций: $x = x(t)$, $y = y(t)$, удовлетворяющая уравнениям (5.1) и заданным начальным условиям: $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$. Так как решение зависит от начальных условий, то иногда, для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем записывать такое решение в следующем виде:

$$x = \varphi(t - t_0; x_0, y_0), \quad y = \psi(t - t_0; x_0, y_0)^2). \quad (5.2)$$

Отметим, что φ и ψ являются аналитическими функциями не только времени t , но и координат начального состояния системы x_0, y_0 .

Всякое решение (5.2) (с заданными x_0, y_0, t_0) мы можем рассматривать как параметрическое уравнение некоторой кривой на фазовой плоскости x, y , которая пробегается изображающей точкой при заданном движении системы. По принятой нами терминологии такие кривые носят название *фазовых траекторий*.

С другой стороны, решение (5.2) мы можем рассматривать и как уравнения кривых в пространстве x, y, t — как уравнения интегральных кривых системы уравнений (5.1). Ясно, что каждая фазовая траектория является проекцией на фазовую плоскость некоторой интегральной кривой в пространстве x, y, t ³⁾. Более того, в силу автономности уравнений (5.1) все их интегральные кривые (5.2) с одинаковыми x_0, y_0 , но с различными t_0 образуют в пространстве x, y, t цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси t , и, следовательно, проектируются на одну и ту же фазовую траекторию на фазовой плоскости (рис. 213). Иными словами, каждая фазовая траектория соответствует совокупности движений динамической системы, проходящих через одно и те же состояния и отличающихся друг от друга лишь началом отсчета времени.

¹⁾ Требование аналитичности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ введено лишь ради некоторого упрощения доказательств и может быть заменено более слабым требованием существования у этих функций непрерывных частных производных тех или иных порядков (в ряде случаев — первого порядка).

²⁾ Такая форма записи решения возможна только в силу автономности рассматриваемых уравнений (5.1). Действительно, пусть $x = \varphi(t; x_0, y_0)$, $y = \psi(t; x_0, y_0)$ — решение уравнений (5.1), удовлетворяющее начальным условиям: $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$; очевидно, функции φ и ψ таковы, что $\varphi(0; x_0, y_0) \equiv x_0$ и $\psi(0; x_0, y_0) \equiv y_0$. Так как уравнения (5.1) автономны (их правые части — функции P и Q — не зависят явно от времени t), то их решением будет и система функций (5.2), которая будет (в силу теоремы Коши) единственным решением, удовлетворяющим начальным условиям: $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$.

³⁾ Две другие проекции интегральной кривой (5.2) на плоскости x, t и y, t являются, очевидно, обычными осциллограммами изменений x и y при заданном движении системы.

Так как условия теоремы Коши для системы уравнений (5.1) выполнены, то через каждую точку пространства x, y, t проходит единственная интегральная кривая этой системы уравнений, т. е.

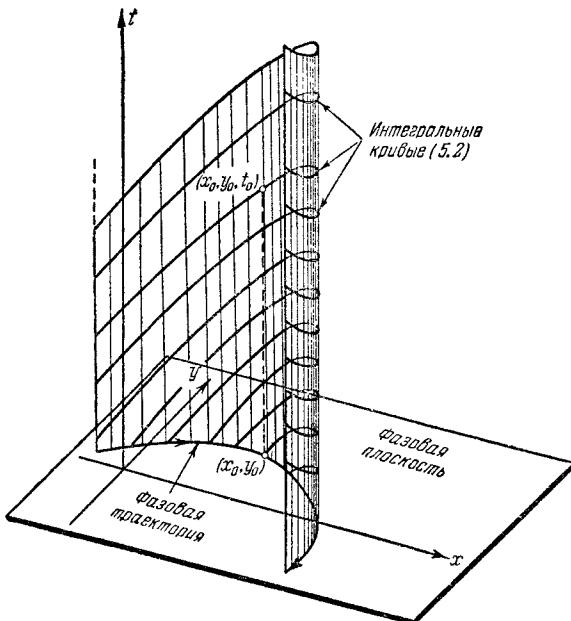


Рис. 213.

интегральные кривые в пространстве x, y, t пересекаться не могут. То же самое благодаря автономности уравнений (5.1) можно сказать и о фазовых траекториях: они также не могут пересекаться, так как через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная фазовая траектория¹⁾.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример. Если в некоторой точке (\bar{x}, \bar{y}) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ обращаются в нули, то уравнения (5.1) имеют своим решением: $x \equiv \bar{x}$, $y \equiv \bar{y}$ (а в пространстве x, y, t — интегральную прямую, параллельную

¹⁾ В самом деле, если бы, например, через некоторую точку (x^*, y^*) фазовой плоскости проходили две фазовые траектории, то тогда и через каждую точку прямой $x = x^*$, $y = y^*$ в пространстве x, y, t проходили бы по две различные интегральные кривые уравнений (5.1), что противоречит теореме Коши.

Заметим для сравнения, что интегральные кривые *неавтономной* системы $\dot{x} = P(x, y, t)$, $\dot{y} = Q(x, y, t)$ по-прежнему не пересекаются в пространстве x, y, t , если выполнены условия теоремы Коши, но их проекции на плоскость x, y , вообще говоря, будут пересекаться.

оси t); фазовая траектория, соответствующая этому состоянию равновесия, состоит из одной (изолированной) точки. В силу только что указанного свойства фазовых траекторий изображающая точка, двигаясь по другим фазовым траекториям, не может прийти в состояние равновесия ни при каком конечном t . Точно так же изображающая точка, не находящаяся на предельном цикле, не может прийти на него за какой-либо конечный интервал времени. Таким образом, установление состояний равновесия или периодических колебаний в динамических системах, описываемых уравнениями (5.1) с правыми частями, удовлетворяющими условиям теоремы Коши, происходит только асимптотически (только при $t \rightarrow +\infty$).

Если разделить одно из уравнений (5.1) на другое, то мы исключим время и получим одно уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (5.3)$$

которое во многих случаях более легко интегрируется, чем система второго порядка (5.1). Решение этого уравнения $y = y(x; C)$ (или в неявной форме $F(x, y) = C$), где C — постоянная интегрирования, дает нам семейство его интегральных кривых, т. е. таких кривых на плоскости x, y , которые в каждой своей точке имеют наклон касательной, определяемый уравнением (5.3)¹⁾. Применяя теорему Коши к уравнению (5.3), можно доказать, что вследствие аналитичности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ через каждую точку плоскости x, y проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (5.3), за исключением, быть может, особых точек этого уравнения, где оно теряет смысл. В рассматриваемом нами случае особыми точками являются только те точки, в которых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$, т. е. только состояния равновесия системы (5.1)²⁾. В них интегральные кривые могут пересекаться.

Как легко видеть, каждая фазовая траектория является интегральной кривой или, по крайней мере, ее частью, а интегральная кривая (или ее дуга), не проходящая через особую точку, непременно является фазовой траекторией. С другой стороны, интегральная кривая, проходящая через особую точку, всегда состоит из нескольких фазовых траекторий. Тем не менее, интегрируя более простое

¹⁾ В дальнейшем под интегральными кривыми мы будем понимать только интегральные кривые уравнения (5.3).

Заметим также, что обычно две кривые, являющиеся решением дифференциального уравнения (5.3) и составляющие аналитическое продолжение друг друга, называют одной интегральной кривой, хотя бы такая кривая и проходила через точку, где это уравнение теряет смысл. Решения, соответствующие так понимаемым интегральным кривым, мы автоматически получаем, например, в тех случаях, когда уравнение (5.3) интегрируется в квадратурах.

²⁾ Доказательство полностью аналогично тому, которое было проведено для простейших консервативных систем (см. гл. II, § 2).

уравнение (5.3) и находя его интегральные кривые, мы получаем одновременно и разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории: фазовыми траекториями будут особые точки (состояния равновесия), интегральные кривые, не проходящие через особые точки, и дуги интегральных кривых, заключенные между двумя особыми точками (или между особыми точками и бесконечностью). Конечно, уравнение интегральных кривых (5.3) не дает нам никаких указаний о направлении движения изображающей точки по найденным фазовым траекториям, так как время из него исключено. Направление движения изображающей точки определяется из уравнений (5.1).

§ 2. Линейные системы общего типа

Рассмотрим сначала простейшие динамические системы вида (5.1), а именно те, которые отображаются системой двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by; \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (5.4)$$

где a, b, c, d — константы, причем x и y мы будем считать декартовыми координатами на фазовой плоскости.

Как известно, общее решение системы (5.4) имеет вид¹⁾

$$\left. \begin{array}{l} x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = C_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 x_2 e^{\lambda_2 t}, \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0, \quad (5.6)$$

а так называемые «коэффициенты распределения» x_1 и x_2 определяются соотношениями:

$$\left. \begin{array}{l} a - \lambda_k + bx_k = 0, \\ c + (d - \lambda_k)x_k = 0 \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

(они составляют совместную систему уравнений, поскольку λ_k — корни характеристического уравнения) или

$$x_1 = \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_1 - d}, \quad x_2 = \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_2 - d}. \quad (5.8)$$

Отметим также, что

$$x_1 + x_2 = \frac{\lambda_1 - a}{b} + \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{d - a}{b} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{\lambda_1 - a}{b} \cdot \frac{\lambda_2 - a}{b} = -\frac{c}{b}.$$

¹⁾ Мы предполагаем, что оба корня имеют отличные от нулей действительные части и что нет кратных корней.