

точки плоскости σ, Δ , для которых $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, т. е. точки, лежащие между ветвями параболы $\sigma^2 = 4\Delta$. Точки полуоси $\sigma = 0, \Delta > 0$ соответствуют состояниям равновесия типа центра. Аналогично λ_1 и λ_2 будут действительны, но разных знаков, т. е. особая точка будет типа седла, если $\Delta < 0$, и т. д. В итоге мы получим диаграмму разбиения плоскости параметров σ, Δ на области, соответствующие различным типам состояний равновесия (рис. 223). Если коэффициенты линейной системы a, b, c, d зависят от некоторого параметра, то при изменении этого параметра будут меняться соответственно σ и Δ . На плоскости σ, Δ мы будем иметь, таким образом, некоторую кривую, переходящую при некоторых бифуркационных значениях параметра из одной области в другую. На диаграмме видно, как могут происходить такие переходы. Если исключить особые случаи (прохождение через начало координат), то нетрудно видеть, что седло может перейти в узел, устойчивый или неустойчивый; устойчивый узел может перейти либо в седло, либо в устойчивый фокус, и т. д. Заметим (это нам понадобится в дальнейшем), что случай равных корней ($\sigma^2 - 4\Delta = 0$) соответствует границе между узлами и фокусами. Если коэффициенты линейной системы зависят от двух параметров, то обычно бывает целесообразно построить плоскость этих параметров и на ней построить диаграмму, соответствующую только что рассмотренной.

§ 3. Примеры линейных систем

Для иллюстрации всего сказанного выше относительно типов состояний равновесия линейных систем мы рассмотрим две схемы, которые при соответствующих упрощающих предположениях описываются линейными дифференциальными уравнениями и в которых путем изменения параметров может быть получен любой тип равновесных состояний.

1. Малые колебания динатронного генератора. Эту схему мы уже рассматривали в гл. I (§ 7, п. 2) как пример системы с «отталкивающей» (при $RS_0 > 1$) силой. Рассмотрим теперь малые колебания вблизи состояния равновесия динатронного генератора, когда рабочая точка лежит на падающем участке характеристики тетрода. Для этой схемы было получено (см. уравнение (1.76)) следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + [RC - LS_0] \frac{du}{dt} + [1 - RS_0] u = 0$$

или, если ввести безразмерное время $t_{\text{нов}} = \omega_0 t$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, и безразмерные параметры $r = \omega_0 RC$, $s = \omega_0 LS_0$,

$$\ddot{u} + (r - s)\dot{u} + (1 - rs)u = 0 \quad (5.25)$$

(здесь точкой вверху обозначено дифференцирование по новому безразмерному времени).

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (r - s)\lambda + (1 - rs) = 0, \quad (5.26)$$

а следовательно, и тип рассматриваемого состояния равновесия зависят от параметров схемы r и s . Для отображения этой зависимости мы построим на плоскости этих двух безразмерных параметров (в ее первой четверти) области, соответствующие различным типам состояния равновесия динатронного генератора на падающем участке характеристики (рис. 224).

При $rs > 1$, т. е. над гиперболой $rs = 1$, корни характеристического уравнения (5.26) действительны и разных знаков, т. е. состояние равновесия является седлом. Корни характеристического уравнения комплексны при

$$(r - s)^2 < 4(1 - rs)$$

или $(r + s)^2 < 4$,

т. е. под прямой $r + s = 2$ лежит область значений параметров, при которых состояние равновесия — фокус. В области значений параметров между этой прямой и гиперболой $rs = 1$ состояние равновесия — узел. Устойчивость узла или фокуса, как мы видели, определяется знаком коэффициента характеристического уравнения при λ в первой степени: именно, при $r > s$ узел или фокус устойчив, а при $r < s$ неустойчив. Таким образом, отрезок прямой $r = s$ до пересечения с гиперболой $rs = 1$ и затем участок гиперболы справа от этой точки пересечения составляют границу области устойчивости генератора. Если состояние равновесия неустойчиво, то динатронный генератор уйдет из окрестности этого состояния равновесия. Однако, пользуясь линейным уравнением, мы ничего не сможем сказать о режимах, которые установятся в генераторе.

2. «Универсальная» схема. Вторым примером общей линейной системы может служить так называемая «универсальная» схема [125], приведенная на рис. 225, или ей эквивалентная (рис. 226), конечно, при условии соответствующей ее идеализации и в частности «линейаризации». Именно, мы будем считать, что характеристики как первой, так и второй лампы прямолинейны. Это предположение, как мы уже неоднократно указывали, имеет смысл только для небольших областей

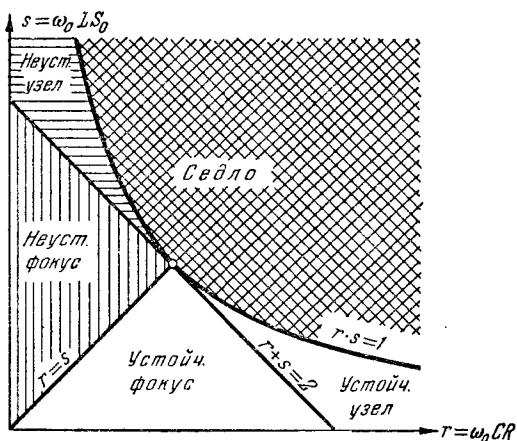


Рис. 224.

изменения напряжений на сетках ламп, и поэтому линеаризация лишает нас возможности рассматривать поведение системы во всей области изменения переменных. Но в известной, ограниченной области мы

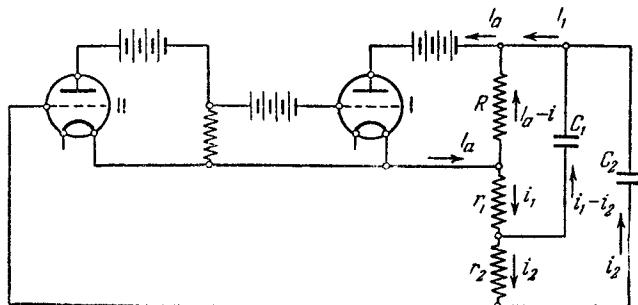


Рис. 225.

можем считать систему линейной и правильно описать ее поведение в этой области.

Кроме того, мы будем, как делали это и прежде, пренебречь сеточными токами и анодной реакцией. В результате этих упрощаю-

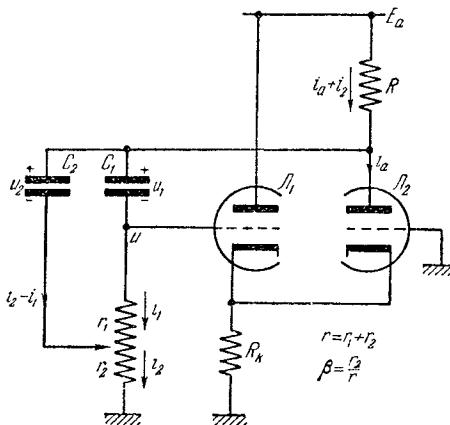


Рис. 226.

щих предположений мы, исходя из уравнений Кирхгофа, получим для рассматриваемой схемы (в обозначениях рис. 226) следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 &= u_2 - u_1, \quad R(i_a + i_2) + u_2 + r_2 i_2 = E_a, \\ C_1 \frac{du_1}{dt} &= i_1, \quad C_2 \frac{du_2}{dt} = i_2 - i_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

причем в линейном приближении (для состояний, близких к состоянию равновесия: $i_1 = i_2 = 0$, $u = 0$)

$$i_a = i_{a0} - Su = i_{a0} - S(r_1 i_1 + r_2 i_2),$$

где S — абсолютное значение крутизны падающего участка характеристики ламповой группы (ламп L_1 и L_2 с общим катодным сопротивлением R_k) в рабочей точке (в состоянии равновесия). Дифференцируя первые два уравнения по времени и используя последние два, а также выражение для анодного тока лампы L_2 , получаем два дифференциальных (линейных) уравнения первого порядка для токов i_1 и i_2 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i_1 + \frac{1}{C_2}i_2}{r_1}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{\left[\frac{1}{C_2} - RS\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right]i_1 + (RS-1)\frac{1}{C_2}i_2}{R + r_2(1-RS)} \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

или, если ввести $k = RS \geq 0$, $r = r_1 + r_2$ и $\beta = \frac{r_2}{r}$ ($0 \leq \beta \leq 1$),

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i_1 + \frac{1}{C_2}i_2}{(1-\beta)r}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{\left[\frac{1}{C^2}(1-k) - \frac{1}{C_1}k\right]i_1 + (k-1)\frac{1}{C_2}i_2}{R - \beta r(k-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Чтобы определить характер особой точки (состояния равновесия $i_1 = i_2 = 0$), составим характеристическое уравнение системы линейных дифференциальных уравнений (5.29):

$$C_1 C_2 (1 - \beta) r [R - \beta r(k-1)] \lambda^2 + \\ + [R(C_1 + C_2) - (k-1)r(C_1 + \beta C_2)] \lambda + 1 = 0. \quad (5.30)$$

Характер корней λ уравнения (5.30), а следовательно и характер особой точки, зависит от четырех безразмерных параметров схемы k , β , $\frac{R}{r}$ и $\frac{C_2}{C_1}$. Выбирая различные значения этих параметров, можно получить все рассмотренные выше типы особых точек. В дальнейшем мы будем считать переменными параметрами только k и β (первый из них может меняться путем изменения S , второй — путем изменения положения движка потенциометра r), а параметры $\frac{R}{r}$ и $\frac{C_2}{C_1}$ — фиксированными.

Построим разбиение плоскости параметров k , β на области, каждой из которых соответствует определенный тип особой точки

(рис. 227). Прежде всего при $k=0$ мы получим два действительных отрицательных корня, т. е. особую точку типа устойчивого узла¹⁾. Этого и следовало ожидать, так как при $k=0$ ламповая группа не

играет никакой роли, а в отсутствии электронных ламп в схеме, состоящей из емкостей и сопротивлений, могут происходить только затухающие апериодические движения, т. е. могут существовать только состояния равновесия типа устойчивого узла. Далее, при

$$k > 1 + \frac{R}{r\beta} \quad (5.31)$$

коэффициент при λ^2 является отрицательным, и следовательно, мы имеем дело с особой точкой типа седла (границей области седла является гипербола $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$). Точкам, лежащим

под гиперболой $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$, соответствует особая точка типа узла или фокуса. Устойчивость особой точки в этом случае определяется

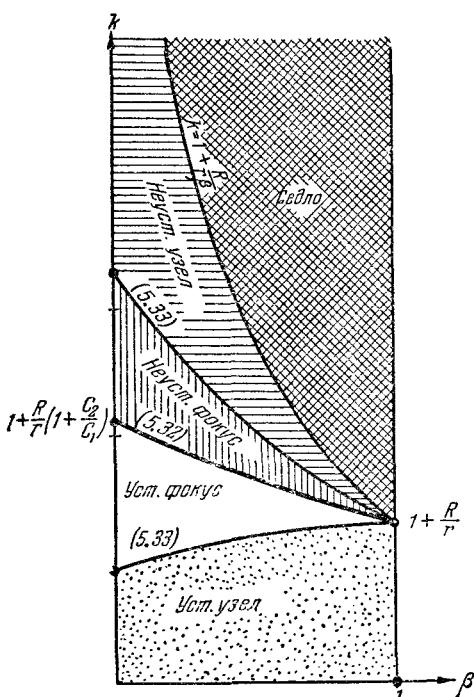


Рис. 227.

знаком коэффициента при γ . Этот коэффициент обращается в нуль на гиперболе

$$k = 1 + \frac{R}{r} \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \beta C_2}, \quad (5.32)$$

положителен под ней и отрицателен над ней. Поскольку $0 \leq \beta \leq 1$,

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \beta C_2}$$

и гипербола (5.32) лежит под гиперболой $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$ и, следовательно, является границей самовозбуждения схемы.

¹⁾ Действительно, при $k=0$ коэффициенты при λ^2 и λ положительны, положительным является и дискриминант уравнения

$$\begin{aligned} [R(C_1 + C_2) + r(C_1 + \beta C_2)]^2 - 4C_1C_2(1 - \beta)r[R + \beta r] = \\ = [C_1(R + r) - C_2(R + \beta r)]^2 + 4C_1C_2[R + \beta r]^2 > 0. \end{aligned}$$

Граница, разделяющая области действительных и комплексных корней (разделяющая области узла и фокуса), определяется условием равенства нулю дискриминанта характеристического уравнения (5.30), т. е. условием

$$\begin{aligned} [R(C_1 + C_2) - (k - 1)r(C_1 + \beta C_2)]^2 - \\ - 4C_1C_2(1 - \beta)r[R - \beta r(k - 1)] = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Кривая, определяемая на плоскости параметров k, β уравнением (5.33), как нетрудно видеть, имеет две ветви, одна из которых (граница неустойчивых узлов и неустойчивых фокусов) проходит между гиперболами (5.32) и $k = 1 + \frac{R}{\beta r}$, а другая — под гиперболой (5.32), но над осью $k = 0$ ¹⁾.

Если условие самовозбуждения соблюдено и особая точка является неустойчивой, то мы можем лишь утверждать, что система уходит из состояния равновесия, и можем определить характер этого движения, но ничего не можем сказать о дальнейшей судьбе системы, так как мы ограничились линейными уравнениями. Анализ нелинейных уравнений «универсальной» схемы (см. гл. X, § 10) показывает, что при выполнении условий самовозбуждения в схеме устанавливаются автоколебания: непрерывные при $k < k_{kp} = 1 + \frac{R}{r\beta}$ (или, что то же самое, при $\beta < \beta_{kp} = \frac{R}{r(k-1)}$) и разрывные при $k > k_{kp}$ (или при $\beta > \beta_{kp}$)²⁾. Заметим, что в последнем случае рассмотренная нами упрощенная модель не отображает законов движения реальной схемы: вблизи состояния равновесия в этом случае происходят «быстрые» движения, скорости которых определяются не уравнениями (5.29), а малыми паразитными емкостями схемы, и тем больше, чем меньше эти емкости. Поэтому было бы более правильным назвать область $k > 1 + \frac{R}{\beta r}$ на диаграмме рис. 227 не областью «седла», а областью «быстрых» движений (скакков), уводящих систему от состояния равновесия.

¹⁾ В самом деле, дискриминант уравнения является полиномом второй степени относительно k , положителен на оси $k = 0$ и на гиперболе $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$ и отрицателен на гиперболе (5.32). В силу непрерывности зависимости дискриминанта от k между гиперболами (5.32) и $k = 1 + \frac{R}{r\beta}$, а также между гиперболой (5.32) и осью $k = 0$ должны проходить ветви кривой (5.33). В каждой из этих областей проходит по одной ветви кривой (5.33), так как уравнение (5.33) по каждому β определяет только два корня для k .

²⁾ Именно из-за того, что в схеме возможны как непрерывные, так и разрывные автоколебания, она и была названа «универсальной».