

§ 4. Состояния равновесия. Устойчивость состояний равновесия

От частного случая линейной системы вернемся снова к общему случаю динамической системы, описываемой двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Пусть соответствующее фазовое пространство является плоскостью x, y , где x и y — декартовы координаты.

Чтобы отыскать на фазовой плоскости состояния равновесия, нужно найти те точки фазовой плоскости, где фазовая скорость равняется нулю, или, иначе, нужно найти точки пересечения кривых

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (5.34)$$

Как мы уже знаем, эти точки будут *особыми* точками дифференциального уравнения первого порядка, определяющего интегральные кривые:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (5.3)$$

В этом смысле мы будем говорить, что состояния равновесия нашей динамической системы суть особые точки семейства интегральных кривых на фазовой плоскости.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости состояний равновесия. Напомним определение устойчивости и неустойчивости для этого общего случая. Состояние равновесия называется устойчивым, если, задав вокруг состояния равновесия любую область ϵ , всегда можно найти соответствующую область $\delta(\epsilon)$ такую, что помещенная в область $\delta(\epsilon)$ (при $t = t_0$) изображающая точка *никогда* (при $t > t_0$) не выйдет из области ϵ . Состояние равновесия называется неустойчивым, если существует такая область ϵ вокруг состояния равновесия, что для нее нельзя подобрать область $\delta(\epsilon)$, обладающую только что указанным свойством. Пуанкаре [185] и Ляпунов [84] дали аналитический метод исследования устойчивости состояний равновесия. Мы изложим этот метод и дадим его обоснование.

Мы интересуемся устойчивостью состояния равновесия x_0, y_0 (x_0, y_0 — точки пересечения кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$). Так как это значит, что мы интересуемся характером движений при наличии некоторых отклонений от состояния равновесия, то для удобства выкладок мы введем вместо переменных x, y новые зависимые переменные ξ, η , определив их как смещения относительно положения равновесия (на фазовой плоскости):

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta. \quad (5.35)$$

По нашему предположению $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — аналитические функции. Переходя от переменных x , y к переменным ξ , η в уравнениях (5.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta + [p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \dots], \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta + [q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \dots], \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

где

$$\begin{aligned} a &= P'_x(x_0, y_0), & b &= P'_y(x_0, y_0), \\ c &= Q'_x(x_0, y_0), & d &= Q'_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

и т. д.

Обоснованный Ляпуновым метод исследования устойчивости сводится к следующему. Отбросим в уравнениях (5.34) нелинейные члены. Мы получим тогда систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, так называемую систему уравнений первого приближения:

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \quad (5.37)$$

Решение этой системы уравнений напишется сразу, коль скоро нам известны корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ляпунов показал, что в случае, если оба корня этого уравнения имеют отличные от нуля действительные части, то исследование уравнений первого приближения, полученных путем отбрасывания нелинейных членов, всегда дает правильный ответ на вопрос об устойчивости состояния равновесия в системе (5.1). Именно, если оба корня имеют отрицательную действительную часть и если, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то состояние равновесия будет устойчивым; если же хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, т. е. если система уравнений первого приближения имеет нарастающие решения, то состояние равновесия неустойчиво.

Перейдем к доказательству этих утверждений Ляпунова. При этом рассмотрим отдельно случай действительных λ и случай комплексных λ .

1. Случай действительных корней характеристического уравнения. В этом случае, как мы знаем, систему уравнений первого приближения можно путем линейного однородного преобразования¹⁾

$$u = \alpha\xi + \beta\eta, \quad v = \gamma\xi + \delta\eta \quad (5.38)$$

¹⁾ См. § 2. Здесь лишь изменены буквенные обозначения переменных.

привести к так называемому «каноническому» виду:

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 u;$$

$$\frac{dv}{dt} = \lambda_2 v,$$

где λ_1 и λ_2 — как раз корни характеристического уравнения. Применим то же преобразование к системе (5.1). Мы получим тогда опять нелинейную систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lambda_1 u + (\bar{p}_{11}u^2 + 2\bar{p}_{12}uv + \bar{p}_{22}v^2) + \dots, \\ \frac{dv}{dt} &= \lambda_2 v + (\bar{q}_{11}u^2 + 2\bar{q}_{12}uv + \bar{q}_{22}v^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Умножая первое уравнение на u , второе на v и складывая, получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \dots = \Phi(u, v), \quad (5.40)$$

где $\rho = u^2 + v^2$.

Рассмотрим отдельно три случая: λ_1 и λ_2 оба отрицательны, λ_1 и λ_2 оба положительны, λ_1 и λ_2 разных знаков.

1. Если λ_1 и λ_2 оба отрицательны, то, как нетрудно показать, кривая $\Phi(u, v) = 0$ имеет в начале координат изолированную точку, а поверхность $z = \Phi(u, v)$ имеет максимум в начале координат. Отсюда следует, что существует область (область S) вокруг начала координат, в которой $\Phi(u, v) < 0$ (за исключением точки $u = 0, v = 0$, так как $\Phi(0, 0) = 0$). Наличие такой области сразу позволяет нам доказать устойчивость состояния равновесия.

Пусть вокруг начала координат нам задана какая-то область ϵ . Выберем в качестве области δ область, ограниченную окружностью с центром в начале координат, целиком лежащую как в области S , так и в области ϵ (рис. 228). Нетрудно видеть, что если мы поместим изображающую точку где-нибудь внутри области $\delta(\epsilon)$, то она никогда не уйдет из этой области и, следовательно, не сможет достичь границы области ϵ . Действительно, $\frac{d\rho}{dt} < 0$ для всех точек области δ ¹; следовательно, изоб-

¹) Кроме точки $u = 0, v = 0$; но изображающая точка, попавшая в начало координат, останется там в покое.

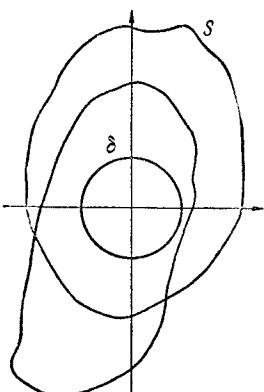


Рис. 228.

ражающая точка с течением времени может только приближаться к началу координат. Таким образом, исследуемое состояние равновесия устойчиво по Ляпунову. Больше того, можно показать, что в этом случае состояние равновесия асимптотически устойчиво, т. е. при неограниченном возрастании времени изображающая точка асимптотически стремится к состоянию равновесия. Действительно, так как $\rho = u^2 + v^2$ монотонно убывает с течением времени, начиная от начального значения $\rho = \rho_0$, то при $t \rightarrow \infty$ ρ стремится либо к нулю, либо к какому-нибудь пределу ρ_1 ($\rho_1 > 0$). Нетрудно видеть, что стремление к пределу, отличному от нуля, исключено, так как при конечной скорости ($\left| \frac{d\rho}{dt} \right| > \gamma > 0$, если $\rho_0 \geq \rho > \rho_1$) за неограниченное время ρ должно было бы уменьшиться на сколь угодно большую величину и не смогло бы оставаться положительным. Очевидно, что эти утверждения не нарушаются при обратном возвращении на плоскость ξ, η . Соответствующее состояние равновесия устойчиво по Ляпунову, и изображающая точка, помещенная вблизи состояния равновесия на плоскости ξ, η , также будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия.

Сделаем в связи с этим одно замечание, которое нам пригодится впоследствии. Каждая окружность на плоскости u, v , целиком лежащая внутри области S , является «циклом без прикосновения» (или «циклом без контакта»; cycle sans contact по Пуанкаре), так как все интегральные кривые пересекают ее (при отрицательных S_1 и S_2 все кривые входят внутрь) и ни одна не касается. Мы можем построить целое семейство таких окружностей, вложенных друг в друга и стягивающихся к началу координат; такое семейство можно назвать семейством циклов без прикосновения. Посмотрим, как будет выглядеть эта картина на плоскости ξ, η . Так как круги на плоскости u, v соответствуют эллипсам на плоскости ξ, η , то состояние равновесия на плоскости ξ, η может быть окружено семейством эллипсов, вложенных друг в друга, стягивающихся к началу координат и являющихся циклами без прикосновения (рис. 229). Если изображающая точка пересечет граничный цикл без прикосновения (самый большой из этих эллипсов), то она необходимо начнет пересекать все остальные, асимптотически стремясь к особой точке.

2. Если λ_1 и λ_2 оба положительны, то кривая $\Phi(u, v) = 0$ опять имеет в начале координат изолированную точку, а поверхность $z = \Phi(u, v)$ теперь уже имеет не максимум, а минимум в начале координат. Отсюда следует, что существует область (область S)

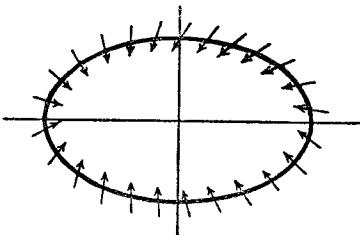


Рис. 229.

вокруг начала координат, в которой $\Phi(u, v) > 0$ (за исключением точки $u = 0, v = 0$, так как $\Phi(0, 0) = 0$).

Докажем, что в этом случае состояние равновесия неустойчиво. Возьмем в качестве области ϵ область, ограниченную кругом, целиком лежащим в области S (рис. 230).

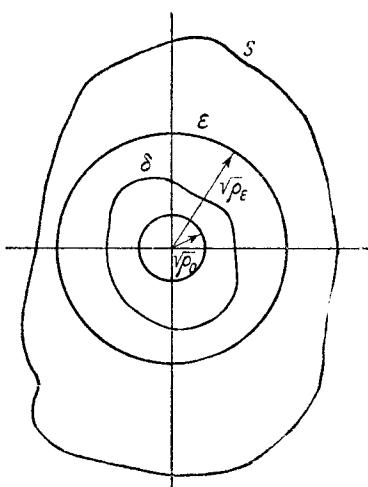


Рис. 230.

Можно показать, что нельзя выбрать область δ , охватывающую начало, такой, чтобы изображающая точка, помещенная в любую точку этой области, никогда не достигла границы области ϵ . Применим доказательство от противного. Положим, что такая область существует. Поместим тогда изображающую точку в момент $t = t_0$ в какую-нибудь из точек этой области, не являющуюся началом координат. Так как для всей области S (кроме начала координат) $\Phi(u, v) = \frac{dp}{dt} > 0$,

то изображающая точка с возрастанием времени монотонно удаляется от начала; это может нарушиться лишь при выходе изображающей

точки из области S . Обозначим через ρ_0 значение $u^2 + v^2$ в момент времени $t = t_0$ и через ρ_ϵ значение $u^2 + v^2$ для границы области ϵ . Очевидно, что в кольце между окружностями $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_\epsilon$ $\Phi(u, v)$ или, что то же самое, $\frac{dp}{dt}$ имеет некоторый положительный нижний предел. Поэтому изображающая точка будет удаляться от начала координат со скоростью, отличной от нуля, и в конечное время дойдет до границы области ϵ ¹⁾. Мы пришли таким образом к противоречию, и значит, нужной области δ отыскать нельзя. Состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

Как и в предшествующем случае, все качественные утверждения без изменения переносятся на плоскость ξ, η . Заметим, что в этом случае на плоскости ξ, η также существует семейство вложенных друг в друга эллипсов, служащих циклами без прикосновения. Изображающая точка, помещенная в достаточной близости к состоянию равновесия, неизбежно будет удаляться от него, пересекая все циклы без прикосновения.

¹⁾ Если нижний предел функции $\Phi(u, v)$ в кольце $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_\epsilon$ равен γ ($\gamma > 0$), то время прохождения кольца $\tau < \frac{\rho_\epsilon - \rho_0}{\gamma}$.

3. Если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то кривая $\Phi(u, v) = 0$ имеет в начале координат узловую точку, а поверхность $z = \Phi(u, v)$ имеет в начале координат седлообразный экстремум. Отсюда следует, что вокруг начала чередуются области, в которых $\Phi(u, v) > 0$, с областями, в которых $\Phi(u, v) < 0$, причем границей раздела служит

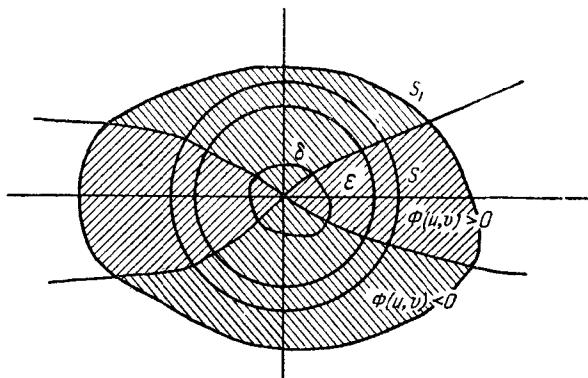


Рис. 231.

кривая $\Phi(u, v) = 0$ с простой узловой точкой в начале координат (рис. 231).

Мы можем это обстоятельство сформулировать еще и так: вокруг начала координат существует окружность с центром в начале координат и с радиусом, отличным от нуля, которая пересекает кривую $\Phi(u, v) = 0$ четыре раза. Назовем область внутри этой окружности областью S ; эта область S разбивается кривой $\Phi(u, v) = 0$ на четыре внутренние области таким образом, что в двух из них $\Phi(u, v) > 0$, а в двух других $\Phi(u, v) < 0$. Докажем, что в этом случае состояние равновесия неустойчиво. Это можно сделать, если обратить внимание на знак $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ вблизи начала координат. Дифференцируя еще раз $\frac{d\rho}{dt}$ и заменяя $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ их значениями из дифференциальных уравнений, имеем:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2\rho}{dt^2} = \lambda_1^2 u^2 + \lambda_2^2 v^2 + \dots = \Phi_1(u, v).$$

Поверхность $z = \Phi_1(u, v)$, как нетрудно убедиться, имеет минимум в начале координат. Следовательно, вокруг начала координат существует область S_1 , внутри которой $\Phi_1(u, v) > 0$ (за исключением точки $u = 0, v = 0$, так как $\Phi_1(0, 0) = 0$) или, что все равно, $\frac{d^2\rho}{dt^2} > 0$.

Перейдем теперь к самому доказательству. Возьмем в качестве области ϵ область, ограниченную окружностью, целиком лежащую

как в области S , так и в области S_1 ¹⁾). Нетрудно показать, что нельзя выбрать такую область δ , охватывающую начало, чтобы изображающая точка, помещенная в любую точку области δ , никогда не достигла границы области ϵ .

Действительно, предположим, что такая область δ существует. Так как она должна охватить начало, то в ней необходимо должны найтись точки, для которых $\Phi(u, v) > 0$. Поместим тогда изображающую точку в момент $t = t_0$ в какую-нибудь из таких точек области δ , где $\Phi(u, v) > 0$ или, что все равно, $\frac{d\rho}{dt} > 0$. Так как при $t = t_0$ $\frac{d\rho}{dt} > 0$ и так как во всей области S_1 $\frac{d^2\rho}{dt^2} > 0$ (область ϵ выбрана внутри области S_1 , а область δ не может иметь частей, лежащих вне ϵ), то наша изображающая точка начнет удаляться от начала координат с возрастающей скоростью и в конечное время достигнет границы области ϵ ²⁾. Мы пришли, таким образом, к противоречию. Нужной области δ выбрать нельзя. Состояние равновесия является неустойчивым по Ляпунову. Ясно, что то же самое относится к соответствующему состоянию равновесия на плоскости ξ, η .

2. Случай комплексных корней характеристического уравнения. В этом случае, как мы знаем, линейную систему можно путем действительного линейного однородного преобразования привести к виду

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1,$$

где a_1 и b_1 — действительная и мнимая части λ ($\lambda_1 = a + jb$, $\lambda_2 = a - jb$). Применим те же преобразования к нелинейной системе. Мы получим тогда снова нелинейную систему:

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1 + \dots; \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1 + \dots \quad (5.41)$$

Умножая первое уравнение на u_1 , второе на v_1 и складывая, получаем следующее выражение для квадрата радиуса-вектора $\rho = u_1^2 + v_1^2$:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = a_1 (u_1^2 + v_1^2) + \dots = \psi(u_1, v_1).$$

¹⁾ Областью ϵ , в частности, может служить область S , которую всегда можно выбрать так, чтобы она была целиком расположена внутри области S_1 .

²⁾ Нетрудно оценить это время τ . Пусть r_0 — квадрат радиуса круга, ограничивающего область ϵ . Пусть γ ($\gamma > 0$) — значение $\frac{d\rho}{dt}$ в момент $t = t_0$.

Тогда в течение всего времени движения внутри области S_1 $\frac{d\rho}{dt} \geq \gamma$; отсюда следует, что $\tau < \frac{r_0 - r_0}{\gamma}$.

Так как здесь точками обозначены члены третьей степени и выше, то нетрудно показать обычным путем, что $\psi(u_1, v_1)$ имеет максимум или минимум в начале координат в зависимости от знака a_1 . Повторяя в точности рассуждения, которые мы приводили в случае действительных корней, имеющих одинаковые знаки, мы найдем, что в случае $a_1 < 0$ состояние равновесия устойчиво по Ляпунову и даже асимптотически устойчиво, а в случае $a_1 > 0$ состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову. В обоих случаях достаточно малые окружности вблизи начала служат циклами без прикосновения. При переходе к плоскости ξ, η это семейство окружностей превратится в семейство эллипсов без контакта, в которые интегральные кривые входят или выходят в зависимости от знака a_1 .

Итак, мы обосновали метод Ляпунова, заключающийся в отбрасывании нелинейных членов для случая, когда корни характеристического уравнения не равны между собой и имеют отличные от нулей действительные части. Ограничение, связанное с отсутствием равных корней, несущественно, — мы его приняли лишь для упрощения доказательства. Ограничение, связанное с наличием действительных частей, отличных от нуля, у обоих корней характеристического уравнения, существенно. В предположении, что рассматриваемое уравнение — общего вида, оно не может быть устраниено. Таким образом, теорему Ляпунова об устойчивости состояний равновесия в нашем случае можно сформулировать так: *если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны, то состояние равновесия устойчиво; если хотя бы одна действительная часть положительна, то состояние равновесия неустойчиво.*

Если действительные части обоих корней характеристического уравнения равны нулю или если один корень равен нулю, а другой отрицателен, то уравнения первого приближения не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия.

Таким образом, устойчивость состояния равновесия системы (5.1) вполне определяется соответствующими уравнениями первого приближения (5.37) в том случае, когда оба корня характеристического уравнения имеют отличные от нуля действительные части. Можно показать (мы на этом здесь останавливаться не будем), что в этом случае уравнения первого приближения определяют не только устойчивость состояния равновесия, но и характер фазовых траекторий в достаточно малой его окрестности. Более того, состояния равновесия (особые точки), для которых действительные части обоих корней характеристического уравнения отличны от нуля, являются *грубыми*: их характер, т. е. характер фазовых траекторий в их достаточно малой окрестности, сохраняется при любых достаточно малых изменениях правых частей уравнения (5.1) — функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ (при условии, что достаточно малыми являются также и их производные первого порядка; подробнее см. гл. VI, § 4). Таким образом, совершенно так же, как и в § 2, мы имеем здесь пять типов

грубых состояний равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый фокус, неустойчивый фокус и седло. Для исследования характера грубых состояний равновесия удобно пользоваться диаграммой, приведенной на рис. 223. В нашем случае

$$\sigma = -[P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)]$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & Q'_x(x_0, y_0) \\ P'_y(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \quad (5.42)$$

Грубыем состояниям равновесия соответствуют все точки плоскости параметров σ , Δ , лежащие вне оси $\Delta = 0$ и полуоси $\sigma = 0$, $\Delta > 0$, которые на рис. 223 изображены жирной линией. В случае узла и седла, как мы знаем, интегральные кривые входят в особую точку по двум направлениям, которые, само собой разумеется, также могут быть определены из соответствующих линейных уравнений. Пользуясь результатами § 2, мы можем написать для определения угловых коэффициентов этих направлений следующее уравнение:

$$P'_y(x_0, y_0)x^2 + \{P'_x(x_0, y_0) - Q'_y(x_0, y_0)\}x - Q'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Точкам оси $\Delta = 0$ и полуоси $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ соответствуют *негрубые* состояния равновесия (негрубые особые точки), т. е. такие

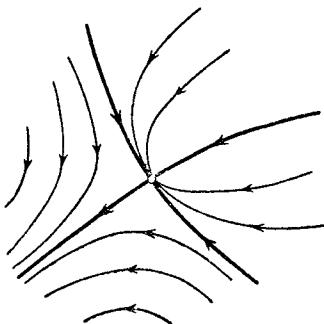


Рис. 232.

состояния равновесия, характер которых может быть изменен сколь угодно малыми изменениями правых частей уравнений (5.1) (при сколь угодно малых изменениях функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их производных). Именно поэтому их характер (и в частности, устойчивость) не определяется линеаризованными уравнениями — уравнениями первого приближения (5.37). Точкам полуоси $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ могут соответствовать состояния равновесия как типа центра, так и типа устойчивого или неустойчивого фокуса, точкам оси

$\Delta = 0$ — так называемые *сложные* особые точки, простейшая из которых (точка типа седло-узел) изображена на рис. 232¹).

¹) Сложные особые точки (сложные состояния равновесия), т. е. такие особые точки, для которых $\Delta = 0$, очевидно, являются точками *соприкосновения* кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$. В силу этого сложная особая точка при сколь угодно малых изменениях функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ может либо распасться на две (или даже на большее число) особых точек или исчезнуть. Особые точки, для которых $\Delta \neq 0$, носят название *простых*, их число не может изменяться при достаточно малых изменениях функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.