

§ 5. Пример: состояния равновесия в цепи вольтовой дуги

В качестве примера, иллюстрирующего применение методов Ляпунова для определения устойчивости состояний равновесия, рассмотрим состояние равновесия в цепи вольтовой дуги, включенной последовательно с индуктивностью и защущированной емкостью (рис. 233). Эта схема представляет собой некоторое видоизменение схемы дугового генератора; рассмотренная выше нами схема вольтовой дуги с одной индуктивностью (гл. IV, § 5) получается из этой схемы в предположении, что она не содержит емкости ($C = 0$). Предполагая, что ток через дуговой промежуток является функцией напряжения на дуге, т. е. снова пренебрегая инерционностью ионных процессов в дуге, нетрудно при помощи законов Кирхгофа получить следующие уравнения колебаний в схеме (они записаны в обозначениях, приведенных на рис. 233):

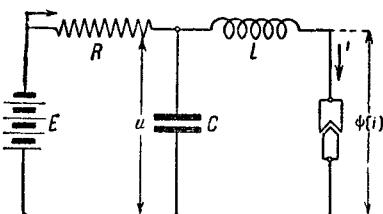


Рис. 233.

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= u - \psi(i), \\ C \frac{du}{dt} &= \frac{E - u}{R} - i, \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

где $\psi(i) = v$ — напряжение на дуге, являющееся однозначной функцией силы тока i , протекающего через дугу (графически мы изобра-

жали эту зависимость — статическую характеристику дуги — так, как это указано на рис. 234).

Состояния равновесия системы определяются из условий $\frac{du}{dt} = 0$ и $\frac{di}{dt} = 0$, из которых получаются уравнения:

$$u = E - Ri, \quad u = \psi(i). \quad (5.44)$$

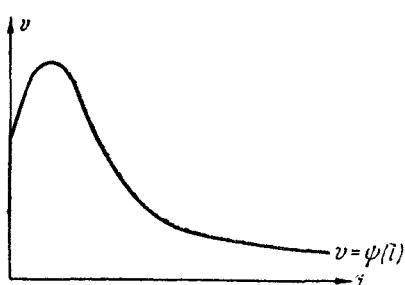


Рис. 234.

Следовательно, состояниями равновесия являются точки пересече-

ния этих прямой и кривой. В зависимости от величин E и R этих точек может быть либо одна (рис. 235), либо три (рис. 236). Для анализа устойчивости состояний равновесия мы по методу Ляпунова подставляем в уравнения (5.43) $u = u_0 + \eta$ и $i = i_0 + \xi$, где u_0 и i_0 — значения, соответствующие какому-либо из состояний равновесия. Далее, разлагая характеристику дуги $\psi(i_0 + \xi)$ в ряд $\psi(i_0 + \xi) = \psi(i_0) + \psi'(i_0) + \dots$

и ограничиваясь первым членом ряда, мы получим два уже линейных дифференциальных уравнения для ξ и η (так как i_0 и u_0 удовлетворяют условиям (5.44) и все члены, их содержащие, вместе дадут нуль):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\eta}{RC} - \frac{\xi}{C}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\eta}{L} - \frac{\rho\xi}{L}, \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

где $\rho = \psi'(i_0)$ — тангенс угла наклона характеристики дуги в точке, соответствующей данному состоянию равновесия (величина размерности

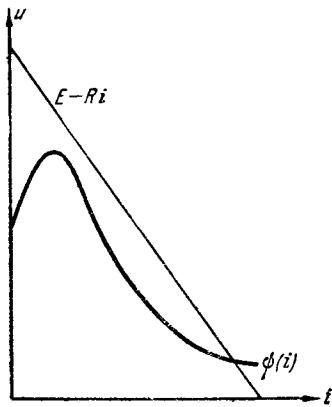


Рис. 235.

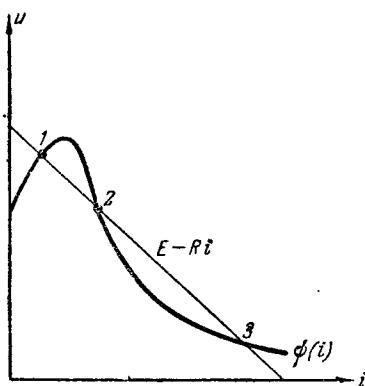


Рис. 236.

сопротивления). Сопротивление дуги ρ — величина переменная, которая при некоторых значениях i_0 может принимать отрицательные значения; однако, пользуясь этим понятием, нужно помнить все оговорки, которые мы сделали, когда впервые ввели термин «отрицательное сопротивление» (гл. I, § 6).

Характеристическое уравнение этой системы дифференциальных уравнений в виде детерминанта запишется так:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\rho}{L} - \lambda & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 + \lambda \left(\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L} \right) + \frac{1}{LC} \left(\frac{\rho}{R} + 1 \right) = 0. \quad (5.46)$$

Характер корней уравнения зависит от значений четырех параметров: R , C , L и ρ . Для того чтобы выяснить характер этих корней при всех возможных значениях параметров, мы построим три диаграммы: раз-

биение плоскостей параметров схемы на области, каждая из которых соответствует определенному типу состояний равновесия, именно, разбиение плоскостей R, ρ ; L, ρ ; C, ρ ; при этом нужно иметь в виду, что L , C и R могут принимать только положительные значения, в то время как ρ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Для построения первой диаграммы R, ρ приведем условие комплексности корней к виду

$$[L - RC\rho]^2 - [2R\sqrt{LC}]^2 < 0. \quad (5.47)$$

Граница области комплексных корней определяется уравнением четвертого порядка (относительно R и ρ), которое распадается на два уравнения второго порядка:

$$L - RC\rho + 2R\sqrt{LC} = 0;$$

$$L - RC\rho - 2R\sqrt{LC} = 0.$$

Каждое из этих уравнений определяет гиперболу; уравнения их относены к асимптотам, причем одной из асимптот для обеих кривых является ось ρ , а другой: для первой кривой — прямая $\rho = -2\sqrt{\frac{L}{C}}$

и для второй — прямая $\rho = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

«Кривой клин», образованный обеими гиперболами 1 и 2 (рис. 237), как легко видеть, и представляет собой область комплексных корней. Границей области корней с положительной действительной частью, т. е. границей области устойчивости узлов и фокусов, является кривая $L + RC\rho = 0$, т. е. гипербола 3 с осями ρ и R в качестве асимптот, расположенная в четвертом квадранте

и пересекающая гиперболу 1 в точке $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ и $\rho = -\sqrt{\frac{L}{C}}$ (см. рис. 237). Очевидно, что все узлы и фокусы, лежащие выше этой гиперболы, устойчивы, лежащие ниже — неустойчивы. Наконец, границей области седел является прямая 4, определяемая уравнением $R + \rho = 0$, так как при $R + \rho < 0$ корни уравнения (5.46), как известно, всегда будут разных знаков. Очевидно, что область, лежащая ниже прямой $\rho = -R$, является областью особых точек типа седла. Мы получаем в результате для параметров R и ρ диаграмму разбиения плоскости этих параметров на области различных типов особых точек, приведенную на рис. 237.

Как видно из этой диаграммы, при $\rho > 0$ (выше оси R) существуют только устойчивые особые точки. Эти точки будут фокусами, если ρ (сопротивление дуги, т. е. сопротивление в контуре) не слишком велико и сопротивление нагрузки, шунтирующей контур, не слишком мало. При $\rho < 0$ (падающие участки характеристики)

состояния равновесия могут быть устойчивы, только если $|\rho|$ не слишком велико и, с другой стороны, R не слишком мало и не слишком велико. При $\rho < 0$ возможны все три типа неустойчивости: неустойчивый узел, неустойчивый фокус и седло. Далее фокус

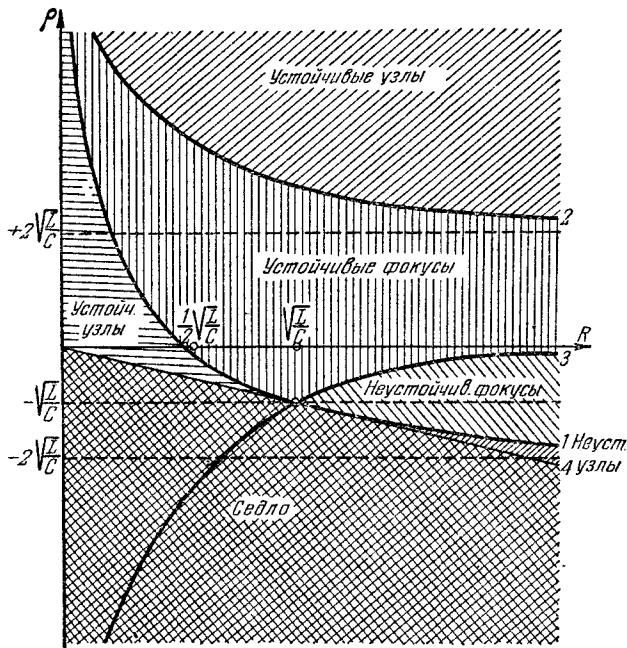


Рис. 237.

(устойчивый или неустойчивый в зависимости от знака ρ) получается при $|\rho| < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, если R достаточно велико, и это условие аналогично условию осцилляторности для обычного линейного контура.

Вообще при $\rho < 0$ и $|\rho| < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ можно, изменяя величину R , получить любую особую точку, если же $\rho < 0$ и $|\rho| > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то возможны только неустойчивые особые точки — либо седло, либо неустойчивый узел в зависимости от величины параметра R .

Для того чтобы установить зависимость типа особой точки от других параметров, мы построим аналогичные диаграммы для L , ρ (рис. 238) и C , ρ (рис. 239). Для обеих диаграмм граница комплексных корней выражается уравнением

$$L^2 + (RC\rho)^2 - 2RCL\rho - 4R^2CL = 0$$

или

$$\rho = \frac{L}{CR} \pm 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

На диаграмме L , ρ эта граница представляет собой одну кривую с асимптотой $\rho = \frac{L}{CR}$, вертикальной касательной в точке $L = 0$, $\rho = 0$ и горизонтальной касательной в точке $L = R^2C$, $\rho = -R$.

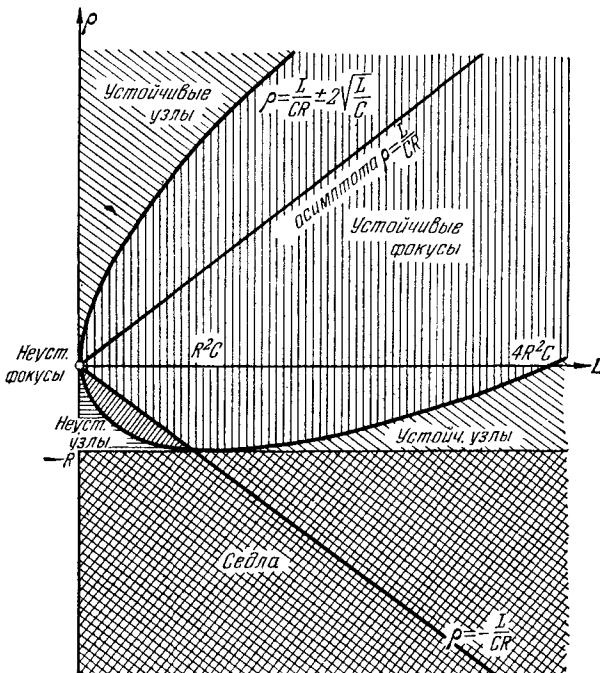


Рис. 238.

На диаграмме C , ρ эта граница распадается на две кривые гиперболического типа с асимптотами $C = 0$ и $\rho = 0$. Граница области устойчивости узлов и фокусов, определяемая уравнением $RC\rho = -L$, представляет собой для второй диаграммы C , ρ гиперболу с осями координат в качестве асимптот и для первой диаграммы — прямую. Граница области особых точек типа седла дается уравнением

$$\rho = -R,$$

т. е. и в той и в другой диаграмме представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс. В результате мы получаем две диаграммы, изображенные на рис. 238 и 239. Легко убедиться, что эти диаграммы вполне согласуются с первой, изображенной на рис. 237,

и лишь дополняют ее. Все три диаграммы позволяют судить о характере особых точек при любых значениях параметров R , C , L и ρ .

Очевидно, состояние равновесия, лежащее на восходящем участке характеристики дуги (например, точка 1 на рис. 236), всегда

устойчиво, так как для него $\rho > 0$. Зная соотношения между L , C , R и ρ , мы могли бы сразу установить, принадлежит ли это состояние равновесия к типу фокусов или к типу узлов. Если же состояние равновесия лежит на падающем участке характеристики дуги (в области отрицательных ρ) и наклон нагрузочной прямой $n = E - R\rho$ меньше наклона характеристики дуги, т. е. если $\rho < 0$ и $|\rho| > R$ (эти условия всегда выполняются для среднего состояния равновесия в случае существования трех состояний равновесия — для точки 2 на рис. 236), то это состояние равновесия является седлом и, следовательно, неустойчиво как при малых, так и при больших L и C .

Наконец, состояние равновесия, лежащее на падающем участке характеристики дуги ($\rho < 0$), но для которого $|\rho| < R$ (это и имеет место, например, для точки 3 на рис. 236), не может быть седлом и является либо узлом, либо фокусом. Это состояние равновесия устойчиво при малых C (см. рис. 239), а при малых L , как это следует из рис. 238, неустойчиво.

Два условия устойчивости состояния равновесия на падающем участке характеристики дуги:

$$|\rho| < R \text{ и } L > |\rho| RC,$$

при $L \neq 0$ сводятся к одному условию: $|\rho| < R$, как это мы получили в § 6 гл. IV, если положить $C = 0$. Однако, поскольку любая схема обладает некоторой, пусть малой, паразитной емкостью, для устойчивости состояния равновесия на падающем участке характеристики дуги необходимо (кроме выполнения условия $|\rho| < R$), чтобы схема содержала некоторую, не слишком малую индуктивность, тем меньшую, чем меньше емкость C .

При рассмотрении устойчивости состояний равновесия в схеме с вольтовой дугой мы пользовались *статической* характеристикой дуги, которая, строго говоря, относится только к установившимся, равно-

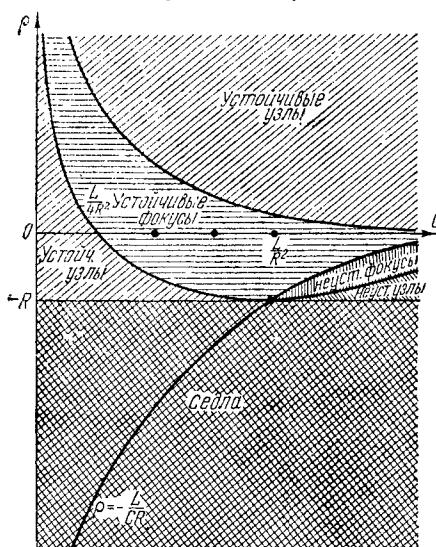


Рис. 239.

весным процессам в дуге. Поэтому наше рассмотрение будет удовлетворительным только при достаточно медленных колебаниях в схеме, что имеет место при достаточно больших L или C . Если же L и C малы и в схеме имеют место быстрые колебания, то в этом случае инерционность ионных процессов в дуге играет существенную роль, и мы не можем для анализа устойчивости равновесных состояний использовать статическую характеристику дуги, а должны вместо нее применить динамические (дифференциальные) уравнения, которые с той или иной степенью точности отображают динамику дугового разряда. Оказывается, инерционность дугового разряда является *стабилизирующим* фактором, достаточным для того, чтобы состояние равновесия схемы при малой емкости C стало устойчивым без всякой индуктивности в цепи дуги.

Простейшее дифференциальное уравнение первого порядка, которое в какой-то мере отображает динамику процессов в дуге вблизи состояний равновесия (u_0, i_0), может быть записано в виде:

$$\tau \left(\frac{d\dot{\xi}}{dt} - \frac{u_0}{i_0} \frac{d\eta}{dt} \right) + \xi - \rho\eta = 0, \quad (5.48)$$

где $\xi = u - u_0$, $\eta = i - i_0$ и u — напряжение на зажимах дуги [200, 51]. Это уравнение приближенно учитывает инерционность дугового разряда, которая обусловлена главным образом тепловой инерцией электродов дуги и газового промежутка (постоянная времени τ , характеризующая эту инерционность, имеет порядок величины, равный $10^{-3} - 10^{-4}$ сек). Из уравнения (5.48) как предельные случаи мы получаем и линеаризованную статическую характеристику $\xi = \rho\eta$, если положить производные равными нулю, и динамическую характеристику для высокочастотных колебаний, когда тепловое состояние дуги не успевает изменяться и дуга ведет себя как обычный проводник, подчиняющийся закону

Ома, $\xi = \frac{u_0}{i_0}\eta$, если считать производные настолько большими, что в уравнении можно отбросить члены $\xi - \rho\eta$.

Для схемы дуги без индуктивности, но с емкостью, кроме уравнения (5.48) имеем:

$$C \frac{d\dot{\xi}}{dt} = -\frac{\xi}{R} - \eta \quad (5.49)$$

(мы пишем уравнение сразу для отклонений напряжения и тока от их равновесных значений). Характеристическое уравнение для системы линейных дифференциальных уравнений (5.48) и (5.49) имеет вид:

$$C\tau \frac{u_0}{i_0} \lambda^2 + \left\{ \tau \left(1 + \frac{u_0}{Ri_0} \right) + \rho C \right\} \lambda + \left(1 + \frac{\rho}{R} \right) = 0, \quad (5.50)$$

и следовательно, состояние равновесия на падающем участке статической характеристики ($\rho < 0$) будет устойчивым, если

$$|\rho| < R \quad \text{и} \quad \tau \left(1 + \frac{u_0}{Ri_0} \right) > |\rho| C.$$

Эти условия выполняются при достаточно больших сопротивлениях R и при достаточно малых емкостях C . Таким образом, схема дуги с малой емкостью (например, с $C < \tau/|\rho|$) будет иметь устойчивое состояние равновесия на падающем участке характеристики и без всякой индуктивности в ее цепи, если только $|\rho| < R$. Этот вывод находится в качественном согласии с экспериментальными данными.