§ 6. Предельные циклы и автоколебания

После рассмотрения состояний равновесия перейдем к периодическим движениям, которые, как мы знаем, могут встречаться в системах, описываемых уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y). \tag{5.1}$$

Если T $(T>0)$ — наименьшее число, для которого при всяком t

$$x(t+T)=x(t),$$
$$y(t+T)=y(t),$$

то движение $x=x(t)$, $y=y(t)$ называется периодическим движением с периодом T. Как мы знаем, периодическому движению соответствует замкнутая фазовая траектория на фазовой плоскости x, y, и обратно: всякой замкнутой траектории соответствует бесчисленное множество периодических движений, отличающихся друг от друга выбором начала отсчета времени. Замкнутые фазовые траектории мы уже встречали при рассмотрении консервативных систем, где они всегда образовывали целые континуумы траекторий, вложенных одна в другую (например, траектории вокруг особой точки типа центра). В рассмотренных нами примерах автоколебательных систем (генератор с Γ-характеристикой, часы; см. гл. III, §§ 3—5) периодическому движению на фазовой плоскости соответствовала изолированная замкнутая кривая, к которой с внешней и внутренней сторон приближались (при возрастании t) соседние траектории по спиралям. Такие изолированные замкнутые траектории носят название *предельных циклов*. Простые примеры[1]) позволяют убедиться, что и системы вида (5.1) с аналитическими правыми частями, вообще говоря, допускают в качестве траекторий предельные циклы.

---

[1]) Например, для системы

$$\frac{dx}{dt}=+y+x\left[1-(x^2+y^2)\right],$$
$$\frac{dy}{dt}=-x+y\left[1-(x^2+y^2)\right]$$

траектория $x^2+y^2=1$ является предельным циклом. Его параметрическими уравнениями будут:

$$x=\cos(t-t_0),$$
$$y=\sin(t-t_0),$$

а уравнения всех других фазовых траекторий запишутся в виде:

$$x=\frac{\cos(t-t_0)}{\sqrt{1+Ce^{-2(t-t_0)}}}, \quad y=\frac{\sin(t-t_0)}{\sqrt{1+Ce^{-2(t-t_0)}}}.$$

Значениям постоянной интегрирования $C>0$ соответствуют фазовые траектории, накручивающиеся на предельный цикл изнутри (при $t\to+\infty$), а значениям $0>C>-1$ — траектории, накручивающиеся снаружи.

Мы будем называть предельный цикл *устойчивым*, если существует такая область на фазовой плоскости, содержащая этот предельный цикл, — окрестность (ε), что все фазовые траектории, начинающиеся в окрестности (ε), асимптотически при $t \to +\infty$ приближаются

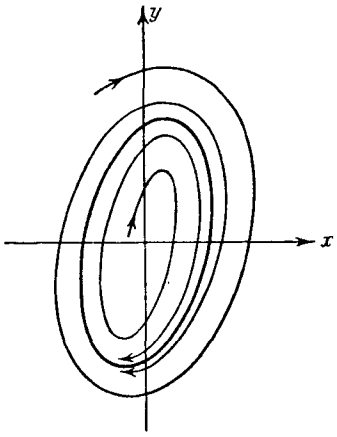

Рис. 240.

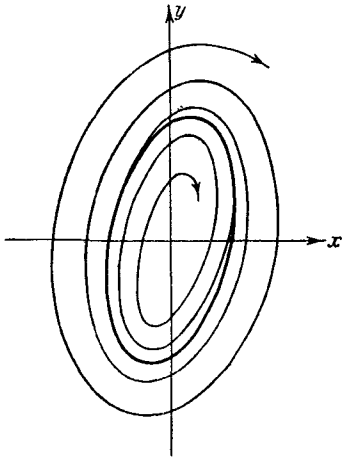

Рис. 241.

к предельному циклу. Если же, наоборот, в любой сколь угодно малой окрестности (ε) предельного цикла существует хотя бы одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \to +\infty$, то такой предельный цикл будем называть *неустойчивым*. Для иллюстрации сказанного на рис. 240 изображен устойчивый предельный цикл, а на рис. 241 и 242 — неустойчивые предельные циклы. Заметим, что неустойчивые циклы, подобные изображенному на рис. 242, такие, что все траектории с одной стороны (например, извне) приближаются к ним, а с другой стороны (например, изнутри) удаляются от них при $t \to +\infty$, иногда называют «полуустойчивыми» или двойными (последнее название обусловлено тем, что обычно такие циклы при подходящем изменении параметра системы расщепляются на два, один из которых устойчив, а другой неустойчив).

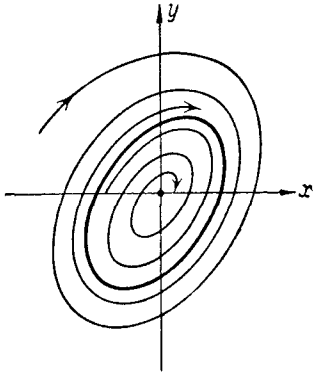

Рис. 242.

Наряду с устойчивостью предельного цикла как траектории, определение которой было только что дано (ее часто называют *орбитной устойчивостью*), можно говорить об устойчивости в смысле

Ляпунова периодического движения, соответствующего предельному циклу. Именно, периодическое движение $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ (с периодом T, так что $\varphi(t+T)\equiv\varphi(t)$ и $\psi(t+T)\equiv\psi(t)$) называется устойчивым в смысле Ляпунова, если для каждого заданного положительного ε можно подыскать такое положительное δ, что для любого другого движения $x=x(t)$, $y=y(t)$, удовлетворяющего условиям

$$|x(t_0)-\varphi(t_0)|<\delta \text{ и } |y(t_0)-\psi(t_0)|<\delta,$$

выполняются неравенства:

$$|x(t)-\varphi(t)|<\varepsilon \text{ и } |y(t)-\psi(t)|<\varepsilon$$

при любых $t>t_0$. Ниже мы будем пользоваться главным образом понятием орбитной устойчивости предельного цикла.

Устойчивость предельного цикла (равно как и устойчивость в смысле Ляпунова соответствующих периодических движений) определяется знаком его «*характеристического показателя*»

$$h=\frac{1}{T}\int_0^T\left\{P'_x[\varphi(t),\ \psi(t)]+Q'_y[\varphi(t),\psi(t)]\right\}dt, \tag{5.51}$$

где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ — любое периодическое решение, соответствующее рассматриваемому предельному циклу, и T — период решения. Именно, *предельный цикл устойчив при* $h<0$ и *неустойчив при* $h>0$ (значению $h=0$ соответствуют как устойчивые, так и неустойчивые предельные циклы).

Для исследования устойчивости периодического движения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ в смысле Ляпунова можно, как показал Ляпунов, идти по пути линеаризации уравнений, подобно тому, как мы это делали при исследовании устойчивости состояний равновесия. Если положить $x=\varphi(t)+\xi$, $y=\psi(t)+\eta$, подставить эти выражения в уравнения (5.1), разложить правые части этих уравнений — функции $P(\varphi+\xi,\ \psi+\eta)$ и $Q(\varphi+\xi,\ \psi+\eta)$ — в ряды по степеням ξ и η и отбросить нелинейные члены, то мы получим линейные уравнения («уравнения первого приближения») для координат «возмущения» ξ и η:

$$\frac{d\xi}{dt}=P'_x[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\xi+P'_y[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt}=Q'_x[\varphi(t),\psi(t)]\,\xi+Q'_y[\varphi(t),\psi(t)]\,\eta.$$

Это — система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами периода T (ибо P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y суть функции от φ и ψ — периодических функций времени с периодом T). Общий вид ее решения таков:

$$\xi=C_1f_{11}(t)\,e^{h_1t}+C_2f_{12}(t)\,e^{h_2t},$$
$$\eta=C_1f_{21}(t)\,e^{h_1t}+C_2f_{22}(t)\,e^{h_2t},$$

где f_{ik} — некоторые периодические функции (с периодом T). От показателей h_1 и h_2, которые носят название «характеристических показателей», зависит характер решений для ξ и η, именно, знаки их действительных частей определяют, являются ли эти решения нарастающими или затухающими.

В рассматриваемой задаче (в силу автономности исходной системы уравнений (5.1)) один из характеристических показателей равен нулю, а другой равен h [185]. Знак этого показателя определяет, устойчиво ли движение [8], именно: периодическое движение устойчиво в смысле Ляпунова (правда, не абсолютно, так как возмущения по фазе не затухают), если $h < 0$, и неустойчиво, если $h > 0$; если же $h = 0$, то уравнения первого приближения не решают вопроса об устойчивости периодического движения.

Прежде чем переходить к доказательству сформулированного условия устойчивости предельного цикла, мы остановимся, забегая по некоторым пунктам немного вперед, на принципиальном вопросе о физической интерпретации изолированных замкнутых траекторий — предельных циклов.

Если мы потребуем, чтобы в реальных физических системах качественный характер возможных движений сохранялся при произвольных малых изменениях самих систем (на языке математики — при произвольных малых изменениях правых частей системы (5.1)), то, как это мы увидим в дальнейшем, мы этим запретим существование неизолированных замкнутых кривых. В системах, удовлетворяющих этому требованию устойчивости качественного характера движений при малых изменениях динамической системы, — в так называемых «грубых» системах, — могут быть только изолированные замкнутые траектории (только предельные циклы) и притом обязательно с характеристическим показателем, отличным от нуля (поэтому орбитная устойчивость предельного цикла влечет за собой устойчивость по Ляпунову всех соответствующих ему периодических движений).

С физической точки зрения представляет интерес следующее замечание, которое можно сделать относительно движений, отображаемых устойчивым предельным циклом. Именно, можно сказать, что для таких движений период и «амплитуда»[1]) не зависят от начальных условий в том смысле, что все соседние движения (соответствующие целой области начальных значений — так называемой области устойчивости в большом) асимптотически приближаются к периодическому движению по предельному циклу, которое имеет определенный период и определенную «амплитуду».

Вышеприведенные свойства периодических движений, отображаемых предельными циклами с отрицательными характеристическими показателями: а) устойчивость по отношению к малым изменениям самой системы; б) независимость (в указанном смысле) периода и «амплитуды» от начальных условий — составляют характерную черту реальных автоколебательных процессов.

Конкретное исследование уравнений вида (5.1), с которыми пришлось иметь дело в различных случаях автоколебаний, также показало на ряде примеров, что если уравнения (5.1) с достаточной точностью отображают законы движения реальной автоколебательной

---

[1]) Точнее следовало бы сказать: «период и весь спектр амплитуд, получающийся при разложении периодического движения в ряд Фурье».

системы, то они обязательно имеют предельные циклы с отрицательным характеристическим показателем, и что стационарные периодические процессы действительно отображаются этими предельными циклами.

Отсюда мы делаем такой вывод: *реальные автоколебательные процессы, устанавливающиеся в системах, достаточно точно отображаемых уравнениями (5.1), математически соответствуют предельным циклам с отрицательным характеристическим показателем. Наличие таких предельных циклов в фазовом портрете рассматриваемой динамической системы является необходимым и достаточным условием для возможности (при надлежащих начальных условиях) существования автоколебаний в системе, т. е. для того, чтобы система была автоколебательной* [3, 5].

Неустойчивый предельный цикл, имеющий положительный характеристический показатель, само собой разумеется, также может содержаться в фазовом портрете «грубых» систем. Однако такой предельный цикл не соответствует реальному периодическому процессу; он играет лишь роль «водораздела», по обе стороны от которого траектории имеют различное поведение. Ясно, что это обстоятельство также имеет существенный физический интерес. Например, наличие неустойчивого цикла дает объяснение так называемого «жесткого» режима, при котором малые начальные отклонения в системе затухают, а большие, наоборот, нарастают.

§ 7. Точечные преобразования и предельные циклы

Как мы видели в гл. III, §§ 3—5, один из способов нахождения предельных циклов и определения их устойчивости состоит в сведении задачи к некоторому точечному преобразованию, к вычислению соответствующей так называемой функции последования.

1. Функция последования и точечное преобразование. Понятие функции последования было введено Пуанкаре и состоит в следующем.

Проведем на фазовой плоскости динамической системы

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y), \qquad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{5.1}$$

через неособые точки так называемый *отрезок без контакта* L, т. е. такой отрезок, в каждой точке которого фазовые траектории системы (5.1) пересекают его, не касаясь[1]). Обозначим через A и B его концевые точки и через s — координату точек отрезка L (мы будем предполагать, что s монотонно увеличивается при движении вдоль отрезка от A к B; например, за s может быть взято расстояние точки отрезка от концевой точки A).

---

[1]) В некоторых случаях бывает целесообразно пользоваться вместо отрезка без контакта (отрезка прямой) *дугой без контакта*, т. е. дугой простой гладкой кривой, которая пересекает фазовые траектории, не касаясь их. Все сказанное ниже сохраняется в силе и в этих случаях.