

системы, то они обязательно имеют предельные циклы с отрицательным характеристическим показателем, и что стационарные периодические процессы действительно отображаются этими предельными циклами.

Отсюда мы делаем такой вывод: *реальные автоколебательные процессы, устанавливающиеся в системах, достаточно точно отображаемых уравнениями (5.1), математически соответствуют предельным циклам с отрицательным характеристическим показателем. Наличие таких предельных циклов в фазовом портрете рассматриваемой динамической системы является необходимым и достаточным условием для возможности (при надлежащих начальных условиях) существования автоколебаний в системе, т. е. для того, чтобы система была автоколебательной* [3, 5].

Неустойчивый предельный цикл, имеющий положительный характеристический показатель, само собой разумеется, также может сдержаться в фазовом портрете «грубых» систем. Однако такой предельный цикл не соответствует реальному периодическому процессу; он играет лишь роль «водораздела», по обе стороны от которого траектории имеют различное поведение. Ясно, что это обстоятельство также имеет существенный физический интерес. Например, наличие неустойчивого цикла дает объяснение так называемого «жесткого» режима, при котором малые начальные отклонения в системе затухают, а большие, наоборот, нарастают.

## § 7. Точечные преобразования и предельные циклы

Как мы видели в гл. III, §§ 3—5, один из способов нахождения предельных циклов и определения их устойчивости состоит в сведении задачи к некоторому точечному преобразованию, к вычислению соответствующей так называемой функции последования.

**1. Функция последования и точечное преобразование.** Понятие функции последования было введено Пуанкаре и состоит в следующем.

Проведем на фазовой плоскости динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (5.1)$$

через неособые точки так называемый *отрезок без контакта*  $L$ , т. е. такой отрезок, в каждой точке которого фазовые траектории системы (5.1) пересекают его, не касаясь<sup>1)</sup>). Обозначим через  $A$  и  $B$  его концевые точки и через  $s$  — координату точек отрезка  $L$  (мы будем предполагать, что  $s$  монотонно увеличивается при движении вдоль отрезка от  $A$  к  $B$ ; например, за  $s$  может быть взято расстояние точки отрезка от концевой точки  $A$ ).

<sup>1)</sup> В некоторых случаях бывает целесообразно пользоваться вместо отрезка без контакта (отрезка прямой) дугой без контакта, т. е. дугой простой гладкой кривой, которая пересекает фазовые траектории, не касаясь их. Все сказанное ниже сохраняется в силе и в этих случаях.

Пусть  $Q$  — точка на  $L$ . Рассмотрим траекторию  $C$ , проходящую через точку  $Q$ , и пусть  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  — движение по этой траектории, при котором точка  $Q$  соответствует  $t=t_0$ . Проследим траекторию  $C$  для значений  $t > t_0$ . Может случиться, что при значении  $t > t_0$  траектория  $C$  больше не пересекает отрезок  $L$ . Мы скажем тогда, что точка  $Q$  «не имеет последующих на отрезке  $L$ ».

Но может случиться, что траектория  $C$  пересекает отрезок  $L$  еще раз при значении  $t > t_0$ . Пусть  $\bar{t}$  — первое значение  $t$ , большее  $t_0$ , при котором  $C$  пересекается с  $L$ , и  $\bar{Q}$  — соответствующая точка отрезка  $L$ . Мы скажем тогда, что точка  $Q$  «имеет последующую  $\bar{Q}$  на отрезке  $L$ » (рис. 243).

Легко показать, на основании теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, что если какая-нибудь точка  $Q$  имеет последующую, не совпадающую с концами  $A$  или  $B$  отрезка  $L$ , то и все достаточно близкие к  $Q$  точки  $L$  также имеют последующие.

Пусть  $s$  и  $\bar{s}$  — координаты различных точек и их последующих на отрезке  $L$ . Ясно, что  $\bar{s}$  является функцией от  $s$ . Эта функция

$$\bar{s} = f(s) \quad (5.52)$$

называется *функцией последования* и выражает собой закон некоторого *точечного преобразования* отрезка  $L$  (или его части), устанавливая однозначное соответствие между точками этого отрезка (или его части) и их последующими (на том же отрезке  $L$ ). Геометрически ясно, что «функцию последования» мы имеем тогда, когда отрезок без контакта пересекает траектории, имеющие характер спиралей или замкнутые. При этом очевидно, что если некоторому значению  $s=s_0$  соответствует замкнутая траектория, то  $f(s_0)=s_0$ , т. е. точка  $Q$  и ее последующая  $\bar{Q}$  совпадают (такие точки отрезка  $L$ , преобразующиеся сами в себя, носят название *неподвижных точек* точечного преобразования (5.52)). Обратно, отыскание замкнутых траекторий, пересекающих данный отрезок без контакта, сводится к отысканию тех значений  $s$ , для которых  $\bar{s}=f(s)=s$ . Нетрудно также видеть, что в том случае, когда все траектории, пересекающие отрезок  $L$ , замкнуты, функция последования имеет вид  $\bar{s}=s$ . Пуанкаре доказал ряд свойств функции  $\bar{s}=f(s)$ , которые мы приведем без доказательств.

**I свойство.** Если точка  $Q_0$ , соответствующая  $s=s_0$ , имеет последующую на отрезке  $L$ , то функция  $\bar{s}=f(s)$  — голоморфная функция  $s$  в точке  $s=s_0$ .

**II свойство.** Производная  $\frac{d\bar{s}}{ds}$  всегда положительна.

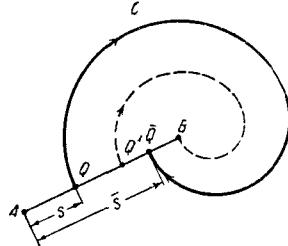


Рис. 243.

Первое свойство является, по сути дела, следствием теоремы о том, что решения системы (5.1) с аналитическими правыми частями являются аналитическими функциями от начальных условий, а последнее — следствием теоремы Коши, того обстоятельства, что фазовые траектории не могут пересекаться.

Геометрически последнее свойство означает, что если мы будем двигаться по отрезку  $L$ , например, в положительном направлении, то и последующие проходимых нами точек будут двигаться по отрезку  $L$  в том же направлении.

Предположим, что некоторая точка  $Q_0$  отрезка  $L$ , соответствующая  $s = s_0$ , имеет последующую (не совпадающую с концами  $A$  или  $B$  отрезка  $L$ ). Тогда, в силу сказанного выше, все достаточно близкие к  $Q_0$  точки также имеют последующие и, следовательно, для всех значений  $s$ , достаточно близких к  $s_0$ , существует функция последования  $\bar{s} = f(s)$ . Будем двигаться по отрезку  $L$  от точки  $Q_0$  в положительном (или отрицательном) направлении, т. е., другими словами, будем, начиная с  $s_0$ , увеличивать (или уменьшать)  $s$ .

Могут представиться следующие возможности:

1) Или мы дойдем до точки  $Q'$  отрезка  $L$ , соответствующей  $s = s'$ , для которой последующей будет конец  $B$  (или  $A$ ) отрезка  $L$  (рис. 243). Тогда точки  $L$ , соответствующие значениям  $s > s'$  (или  $s < s'$ ), не будут уже, в силу свойства II, иметь последующих на отрезке  $L$  и функция последования не будет определена для значений  $s > s'$  (или  $s < s'$ ). В этом случае мы, вообще говоря, можем удлинить отрезок без контакта и, следовательно, увеличить интервал значений  $s$ , для которых определена функция последования<sup>1)</sup>.

2) Или мы дойдем до такого значения  $s = s'$ , что все точки отрезка  $L$ , соответствующие значениям  $s$  на интервале  $s_0 < s < s'$  (или  $s' < s < s_0$ ), будут иметь последующие, а точка  $Q'$ , соответствующая  $s = s'$ , не будет иметь последующей на отрезке  $L$ .

Можно показать, что в этом случае траектория, проходящая через точку  $Q'$ , будет кончаться в особой точке, не пересекая больше  $L$ . В том случае, когда мы имеем лишь простые особые точки, эта точка может быть только седлом<sup>2)</sup>.

Может случиться, что точки, соответствующие значениям  $s > s'$ , опять имеют последующие. Таким образом, у нас имеется функция последования для  $s < s'$  и для  $s > s'$ . Для  $s = s'$  функция последо-

<sup>1)</sup> Удлинение отрезка без контакта возможно до наступления соприкосновения с фазовыми траекториями.

<sup>2)</sup> Эта точка не может быть ни узлом, ни фокусом. Действительно, предположим, что траектория, проходящая через  $Q'$ , кончается (не пересекая уже больше  $L$ ) в узле или фокусе. Тогда, как нетрудно показать, все траектории, проходящие через точки  $L$ , соответствующие значениям  $s$ , меньшим (или большим)  $s'$ , но достаточно близким к  $s'$ , также кончались бы в этой особой точке, не пересекая уже больше  $L$ . Но отсюда следовало бы, что точки, соответствующие значениям  $s$ , меньшим  $s'$ , не имеют последующих, что противоречило бы нашему предположению.

вания неопределенна (рис. 244 и 245). Однако иногда говорят об этих двух функциях последований (одной для  $s < s'$ , другой для  $s > s'$ ) как об одной функции последований, и тогда при значении  $s = s'$

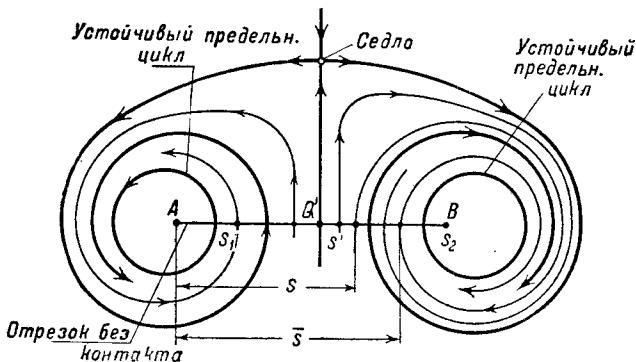


Рис. 244.

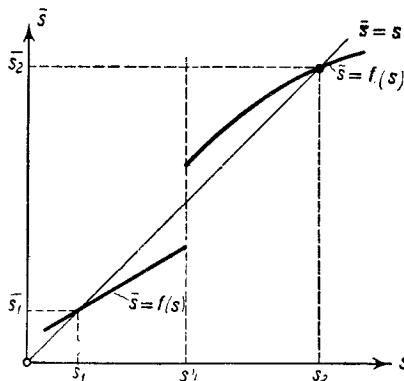


Рис. 245.

эта функция будет, вообще говоря, претерпевать разрыв в том смысле, что  $f(s' + 0) \neq f(s' - 0)$ .

**2. Устойчивость неподвижной точки. Теорема Кенигса.** Итак, если мы знаем точечное преобразование некоторого отрезка  $L$  самого в себя (знаем функцию последований), то задача отыскания замкнутых фазовых траекторий (предельных циклов), пересекающих этот отрезок, сводится к нахождению неподвижных точек, т. е. таких точек  $s^*$  отрезка  $L$ , для которых

$$f(s^*) = s^*.$$

Графически мы можем найти эти неподвижные точки как точки пересечения на плоскости  $s$ ,  $\bar{s}$ , на так называемой *диаграмме Ламерея*,

кривой  $\tilde{s} = f(s)$  (графика функции последования) и биссектрисы  $\tilde{s} = s$  (рис. 246).

Существенно, что функция последования позволяет не только найти предельные циклы, но и решить вопрос об их устойчивости, так как характер ее поведения вблизи неподвижной точки полностью

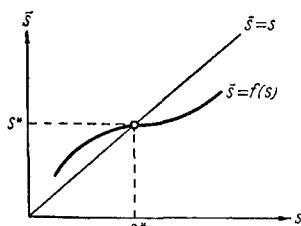


Рис. 246.

определяется характером поведения фазовых траекторий в окрестности предельного цикла. С целью определения устойчивости предельного цикла рассмотрим последовательности точек пересечения с отрезком  $L$  фазовых траекторий, лежащих в некоторой окрестности предельного цикла, которому соответствует неподвижная точка  $s^*$ , — последовательности точек:

$$s, s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, \quad (S)$$

в которых каждая последующая точка, очевидно, определяется по предыдущей функцией последования, т. е.

$$s_1 = f(s), \quad s_2 = f(s_1), \dots, \quad s_{n+1} = f(s_n), \dots$$

Если какая-либо из этих фазовых траекторий стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к предельному циклу, то соответствующая последовательность  $(S)$  будет иметь своей предельной точкой неподвижную точку  $s^*$ . И наоборот, из сходимости последовательности  $(S)$  к неподвижной точке  $s^*$  мы можем сделать вывод, что соответствующая ей фазовая траектория стремится к предельному циклу при  $t \rightarrow +\infty$ .

Если предельный цикл устойчив, то (в силу определения устойчивости) существует такая его окрестность  $(\epsilon)$ , что все фазовые траектории с начальными точками в этой окрестности асимптотически приближаются к предельному циклу при  $t \rightarrow +\infty$ . Но это одновременно означает, что на отрезке  $L$  существует окрестность  $(\epsilon^*)$  неподвижной точки  $s^*$  — часть отрезка  $L$ , лежащая в двумерной области  $(\epsilon)$  (рис. 247), такая, что каждая последовательность  $(S)$  с начальной точкой в окрестности  $(\epsilon^*)$  сходится к неподвижной точке  $s^*$  (т. е. при любых  $s$ , принадлежащих  $(\epsilon^*)$ ,  $s_n \rightarrow s^*$  при  $n \rightarrow +\infty$ ).

Будем называть неподвижную точку точечного преобразования *устойчивой*, если существует такая ее окрестность  $(\epsilon^*)$ , что все по-

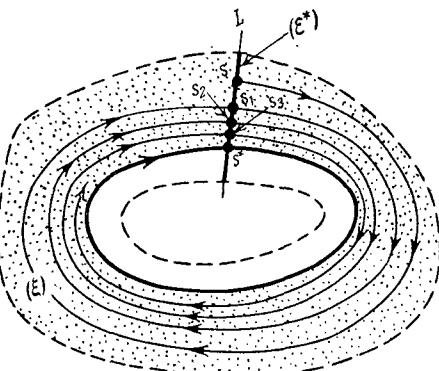


Рис. 247.

следовательности

$$s, s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots$$

с начальными точками  $s$  в  $(\epsilon^*)$  сходятся к этой неподвижной точке. Тогда сказанное выше, очевидно, означает, что устойчивому предельному циклу соответствует устойчивая неподвижная точка, причем, как нетрудно видеть, это соответствие является взаимным.

Наоборот, неподвижную точку  $s^*$  мы будем называть *неустойчивой*, если в любой сколь угодно малой ее окрестности найдется (хотя бы одна) такая точка  $s$ , что последовательность  $s, s_1, s_2, \dots$  не сходится к  $s^*$ . Она, очевидно, соответствует неустойчивому предельному циклу, так как существование таких последовательностей точек, начинающихся в любой сколь угодно малой окрестности неподвижной точки и не сходящихся к ней, говорит о наличии в сколь угодно малой окрестности предельного цикла фазовых траекторий, уходящих от него при  $t \rightarrow +\infty$ .

Условие устойчивости неподвижной точки  $s^*$  точечного преобразования, выражаемого функцией последовательности  $\bar{s} = f(s)$ , а следовательно, и условие устойчивости соответствующего предельного цикла дается *теоремой Кенигса* [168, 169]<sup>1)</sup>:

*неподвижная точка  $s^*$  точечного преобразования  $\bar{s} = f(s)$  устойчива*, если

$$\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} < 1, \quad (5.53a)$$

*и неустойчива*, если

$$\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} > 1. \quad (5.53b)$$

Для доказательства теоремы Кенигса перенесем прежде всего начало отсчета координат точек отрезка  $L$  в неподвижную точку  $s^*$  и введем

$$\xi = s - s^*, \quad \bar{\xi} = \bar{s} - s^*$$

(неподвижной точкой будет  $\xi = 0$ ). Тогда последовательности точек  $s, s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots$ , в которой каждая последующая точка получается из предыдущей применением функции последовательности, будет соответствовать последовательность положительных чисел:

$$|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_n|, |\xi_{n+1}|, \dots,$$

где  $\xi_n = s_n - s^*$ .

Если  $\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} < 1$ , то на отрезке  $L$  существует такая окрестность неподвижной точки  $|\xi| \leq A$  (рис. 248, a), для всех точек

<sup>1)</sup> Мы даем общую формулировку теоремы Кенигса, пригодную и для случая, когда  $\frac{d\bar{s}}{ds} < 0$ , что может иметь место для динамических систем (5.1) с неаналитическими правыми частями или с фазовой поверхностью, отличной от обычной плоскости.

которой, кроме  $\xi = 0$ ,

$$|\bar{\xi}| < \alpha |\xi|, \quad (5.54)$$

где  $\alpha$  — некоторое число, положительное, но *меньшее единицы*. Поэтому каждая последовательность положительных чисел

$$|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|, \dots$$

при условии, что  $|\xi| \leq A$ , является монотонно убывающей и ограниченной снизу и, следовательно, в силу известной теоремы о сходимости таких числовых последовательностей, сходится к некоторому пределу, который, однако, не может быть отличным от нуля<sup>1)</sup>. Таким

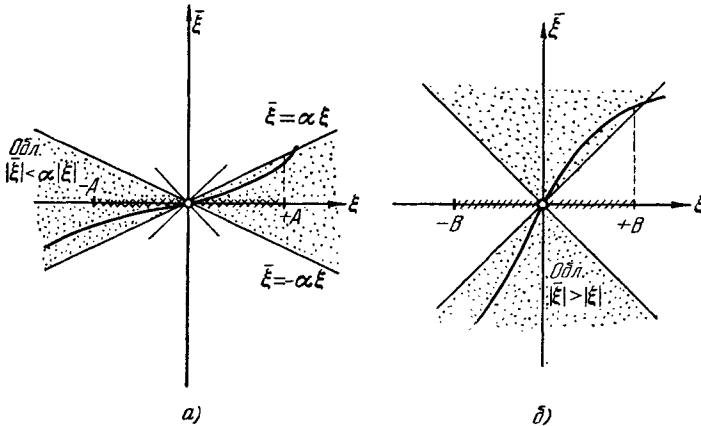


Рис. 248.

образом, при выполнении условия (5.53а) любая последовательность точек  $s, s_1, s_2, \dots$  с начальными точками в окрестности:  $s^* - A \leq s \leq s^* + A$  сходится к  $s^*$  и, следовательно, неподвижная точка  $s^*$  устойчива.

Если же выполнено условие (5.53б), то существует такая окрестность  $|\xi| \leq B$ , для точек которой  $|\bar{\xi}| > |\xi|$  (рис. 248, б). Поэтому любая последовательность чисел  $|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|, \dots$  (при условии, что  $|\xi| \leq B$ ) заведомо не может сходиться к пределу  $\xi = 0$ , а последовательности  $s, s_1, s_2, \dots$  (с начальными точками  $s^* - A \leq s \leq s^* + A$ ) не могут сходиться к  $s^*$ . Следовательно, в этом случае неподвижная

<sup>1)</sup> В самом деле, если бы этот предел был отличен от нуля и равнялся  $a$  ( $a > 0$ ), то тогда при всех  $n$   $|\xi_n| > a > 0$  и в силу условия (5.54)

$$|\xi_n| - |\xi_{n+1}| > \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) |\xi_{n+1}| > \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) a,$$

что противоречит критерию Коши для предела числовой последовательности.

точка будет неустойчивой. Тем самым мы доказали теорему Кенигса<sup>1)</sup>. Заметим, что эта теорема не решает вопроса об устойчивости неподвижной точки, если  $\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s=s^*} = 1$  (в этом случае требуется дополнительное исследование, так как устойчивость определяется знаками старших производных функции последовательности).

**3. Условие устойчивости предельного цикла.** Найдем теперь, основываясь на теореме Кенигса, условие устойчивости предельного цикла на фазовой плоскости, выраженное через правые части уравнений динамической системы:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Пусть  $C_0$  — предельный цикл системы (5.1), параметрическими уравнениями которого являются

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

( $\varphi$  и  $\psi$  — периодические функции с периодом  $T$ ).

Введем в окрестности этого предельного цикла новую, криволинейную систему координат  $u, v$  (рис. 249), полагая

$$\begin{cases} x = \varphi(u) - v\psi'(u), \\ y = \psi(u) + v\varphi'(u). \end{cases} \quad (5.55)$$

Прямые  $u = \text{const}$  являются нормальными к предельному циклу, а кривые

$v = \text{const}$  — замкнутыми кривыми (кривая  $v = 0$  совпадает с предельным циклом  $C_0$ ). Якобиан рассматриваемого преобразования координат

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'(u) - v\psi''(u) & -\psi'(u) \\ \psi'(u) + v\varphi''(u) & \varphi'(u) \end{vmatrix} = \varphi'^2 + \psi'^2 + v[\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''] > 0$$

при всех  $u$  и достаточно малых  $v$  (в силу того обстоятельства, что ни в одной точке предельного цикла  $\varphi'^2 + \psi'^2$  не обращается в нуль, мы можем выбрать такие положительные числа  $a$  и  $A$ , чтобы при любых  $u$   $\varphi'^2 + \psi'^2 > a$  и при  $|v| \leq A$  якобиан  $D > 0$ ). Поэтому в кольцевой области, ограниченной замкнутыми кривыми  $v = -A$

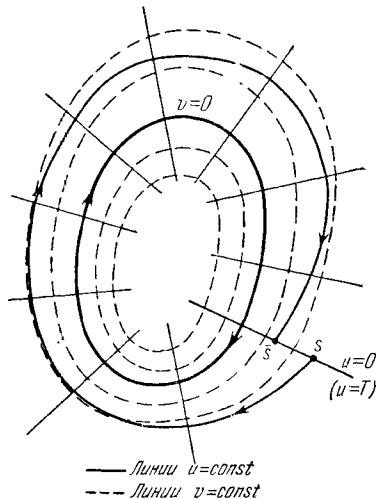


Рис. 249.

<sup>1)</sup> Напомним, что для точечных преобразований отрезка  $L$ , осуществляемых фазовыми траекториями динамических систем (5.1) с аналитическими правыми частями и плоской фазовой поверхностью,  $\frac{d\bar{s}}{ds} = f'(s) > 0$ . Поэтому условием устойчивости неподвижной точки для них (или условием устойчивости соответствующего предельного цикла) будет неравенство  $f'(s_0) > 1$  и условием неустойчивости — неравенство  $f'(s_0) < 1$ .

и  $v = +A$  и содержащей в себе предельный цикл  $C_0$ , не могут пересекаться между собой ни отрезки нормалей  $u = \text{const}$ , ни замкнутые кривые  $v = \text{const}$  и каждой точке плоскости (в этой области) соответствует единственная пара чисел — криволинейных координат  $(u, v)$ .

Перейдем в уравнениях (5.1) в кольцевой области  $|v| \leq A$  к новым переменным  $u$  и  $v$ . Мы будем иметь:

$$[\varphi' - v\psi''] \frac{du}{dt} - \psi \frac{dv}{dt} = P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi'),$$

$$[\psi' + v\varphi''] \frac{du}{dt} + \varphi' \frac{dv}{dt} = Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi').$$

Разрешая относительно  $\frac{du}{dt}$  и  $\frac{dv}{dt}$ , получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') \varphi' + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') \psi'}{D},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') [\psi' + v\varphi''] + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') [\varphi' - v\psi'']}{D}$$

или после деления одного из уравнений на другое:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \\ &= \frac{-P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') [\psi' + v\varphi''] + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') [\varphi' - v\psi'']}{P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') \varphi' + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi') \psi'}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Принимая во внимание тождества

$$P(\varphi, \psi) \equiv \varphi', \quad Q(\varphi, \psi) \equiv \psi', \quad (5.57)$$

нетрудно убедиться в том, что знаменатель правой части уравнения (5.56) не обращается в нуль при  $v = 0$ , а следовательно, и в некоторой окрестности предельного цикла  $v = 0$  (в том, что предельный цикл  $v = 0$  является интегральной кривой уравнения (5.56), нетрудно убедиться прямой подстановкой  $v = 0$  в это уравнение)<sup>1</sup>). Кроме того, правая часть этого уравнения, очевидно, есть периодическая функция  $u$  с периодом  $T$ .

Возьмем в качестве отрезка без контакта  $L$  отрезок нормали  $u = 0$  (очевидно, тот же отрезок будет соответствовать  $u = T$  и вообще  $u = nT$ , где  $n$  — целое число) и обозначим через

$$v = \Phi(u, s) \quad (5.58)$$

решение уравнения (5.56), удовлетворяющее начальному условию:  $v = s$  при  $u = 0$ , — уравнение фазовой траектории, проходящей через некоторую точку  $M(v = s)$  отрезка  $L$ . В силу теоремы о непрерывной зависимости решений уравнений (5.1) или уравнения (5.56) от начальных условий, всякая фазовая траектория, пересекающая

<sup>1)</sup> В этой окрестности уравнение (5.56) не имеет особых точек и, следовательно, каждая интегральная кривая состоит из одной фазовой траектории.

(при  $t = t_0$ ) отрезок  $L$  в достаточно малой окрестности точки пересечения с ним предельного цикла (этую точку мы будем обозначать через  $M_0$ ), пересечет этот отрезок еще раз при  $t$ , близком к  $t_0 + T$  (соответствующее  $u = T$ , так как вблизи предельного цикла  $\frac{du}{dt}$  близко к единице). Поэтому координата последующей точки пересечения траектории (5.58) с отрезком  $L$ , очевидно, определится соотношением

$$\bar{v} = \bar{s} = \Phi(T, s) = f(s). \quad (5.59)$$

Эта функция последования, существующая в некоторой окрестности точки  $M_0$ , определяет точечное преобразование отрезка  $L$  самого в себя (в той же окрестности), причем, конечно, точка  $M_0$  ( $v = s = 0$ ) является неподвижной точкой.

Устойчивость неподвижной точки  $M_0$  (а следовательно, и устойчивость предельного цикла  $C_0$ ) определяется, очевидно, величиной  $f'(0)$ . Покажем, как можно найти значение  $f'(0)$ , зная функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ . Как мы уже видели, знаменатель правой части уравнения (5.56) не обращается в нуль в некоторой окрестности предельного цикла (при  $|v| \leq A$ ). Поэтому в этой окрестности правая часть уравнения (5.56) является аналитической функцией и может быть представлена в виде ряда по степеням  $v$ ; тогда

$$\frac{dv}{du} = A_1(u)v + A_2(u)v^2 + \dots \quad (5.56a)$$

(коэффициенты ряда  $A_1, A_2, \dots$  суть периодические функции  $u$  с периодом  $T$ ). Воспользовавшись тождествами  $P_x\varphi' + P_y\psi' \equiv \varphi''$  и  $Q_x\varphi' + Q_y\psi' \equiv \psi''$  (они получаются дифференцированием тождеств (5.57)), нетрудно подсчитать, что

$$A_1(u) = P'_x + Q'_y - \frac{d}{du} \ln(\varphi'^2 + \psi'^2).$$

С другой стороны, так как решения уравнений с аналитическими правыми частями являются аналитическими функциями начальных условий (см. Дополнение I), то решение (5.58) есть аналитическая функция  $s$  и может быть разложено в ряд по степеням  $s$ :

$$v = \Phi(u, s) = a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \dots$$

(свободный член равен нулю, поскольку значению  $s = 0$  соответствует предельный цикл  $v \equiv 0$ ). Для нахождения функций  $a_i(u)$  подставим этот ряд в уравнение (5.56а) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ . Тогда мы получим:

$$a'_1(u)s + a'_2(u)s^2 + \dots \equiv A_1(u)[a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \dots] + \\ + A_2(u)[a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \dots]^2 + \dots$$

и

$$a'_1 = A_1(u)a_1, \\ a'_2 = A_1(u)a_2 + A_2(u)a_1^2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

Интегрируя эти рекуррентные дифференциальные уравнения при начальных условиях:

$$a_1(0) = +1 \quad \text{и} \quad a_i(0) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots)$$

(последние получаются из очевидного тождества:  $\Phi(0, s) \equiv s$ ), можно найти коэффициенты разложения функции  $\Phi(u, s)$ . В частности

$$\ln a_1(u) = \int_0^u A_1(t) dt = \int_0^u (P'_x + Q'_y) dt = -\ln \frac{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}{[\varphi'(0)]^2 + [\psi'(0)]^2}$$

и, следовательно,

$$f'(0) = a_1(T) = e^{\int_0^T (P'_x + Q'_y) dt}$$

(в силу того, что функции  $\varphi$  и  $\psi$ , а значит и их производные, суть периодические функции с периодом  $T$ ).

Таким образом, рассматриваемый предельный цикл  $C_0$  *устойчив*, если его характеристический показатель

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)] dt < 0,$$

и *неустойчив*, если

$$h > 0$$

(ибо в первом случае  $0 < f'(0) < 1$ , а во втором  $f'(0) > 1$ ).

## § 8. Индексы Пуанкаре

Прежде чем переходить к рассмотрению задач о движении конкретных динамических систем второго порядка, нам придется изложить некоторые общие теоремы о свойствах фазовых траекторий, а также некоторые способы качественного исследования фазовых портретов динамических систем, которые позволяют получить некоторые, часто весьма неполные сведения о характере фазовых траекторий и, следовательно, о характере движений той или иной динамической системы.

В первую очередь мы изложим общие законы совместного существования состояний равновесия различных типов и замкнутых траекторий, сформулированные Пуанкаре [108]. Для формулировки этих законов необходимо ввести понятие об индексе замкнутой кривой по отношению к векторному полю. Это понятие индекса будет иметь значение и для других целей, в частности для изучения зависимости качественной картины траекторий от параметра.