Интегрируя эти рекуррентные дифференциальные уравнения при начальных условиях:

$$a_1(0) = +1 \quad \text{и} \quad a_i(0) = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots)$$

(последние получаются из очевидного тождества: $\Phi(0, s) \equiv s$), можно найти коэффициенты разложения функции $\Phi(u, s)$. В частности

$$\ln a_1(u) = \int_0^u A_1(t)\,dt = \int_0^u (P'_x + Q'_y)\,dt - \ln \frac{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}{[\varphi'(0)]^2 + [\psi'(0)]^2}$$

и, следовательно,

$$f'(0) = a_1(T) = e^{\int_0^T (P'_x + Q'_y)\,dt}$$

(в силу того, что функции φ и ψ, а значит и их производные, суть периодические функции с периодом T).

Таким образом, рассматриваемый предельный цикл C_0 *устойчив*, если его характеристический показатель

$$h = \frac{1}{T}\int_0^T [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)]\,dt < 0,$$

и *неустойчив*, если

$$h > 0$$

(ибо в первом случае $0 < f'(0) < 1$, а во втором $f'(0) > 1$).

§ 8. Индексы Пуанкаре

Прежде чем переходить к рассмотрению задач о движении конкретных динамических систем второго порядка, нам придется изложить некоторые общие теоремы о свойствах фазовых траекторий, а также некоторые способы качественного исследования фазовых портретов динамических систем, которые позволяют получить некоторые, часто весьма неполные сведения о характере фазовых траекторий и, следовательно, о характере движений той или иной динамической системы.

В первую очередь мы изложим общие законы совместного существования состояний равновесия различных типов и замкнутых траекторий, сформулированные Пуанкаре [108]. Для формулировки этих законов необходимо ввести понятие об индексе замкнутой кривой по отношению к векторному полю. Это понятие индекса будет иметь значение и для других целей, в частности для изучения зависимости качественной картины траекторий от параметра.

Рассмотрим фазовую плоскость динамической системы, определяемой уравнениями:

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \tag{5.1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ мы будем предполагать для сокращения рассуждений аналитическими на всей фазовой плоскости.

Возьмем на фазовой плоскости какую-нибудь *простую замкнутую кривую N, не проходящую через состояния равновесия.* Возьмем на этой кривой какую-нибудь точку S и проведем через нее вектор, совпадающий с направлением касательной, проходящей через эту точку фазовой траектории (рис. 250). Если рассматриваемую точку S мы будем двигать вдоль кривой N, вектор касательной к фазовой траектории будет непрерывно вращаться. Когда точка S сделает полный оборот по замкнутой кривой N и вернется на прежнее место, то вектор сделает некоторое целое число оборотов, т. е. повернется на угол $2\pi j$, где j — целое число. Направление вращения вектора мы будем считать положительным, когда оно совпадает с направлением, в котором точка S обходит замкнутую кривую N; для определенности можно, например, условиться, что точка S всегда обходит кривую N, совершая оборот против часовой стрелки. Таким образом, j может быть как положительным, так и отрицательным целым числом или же равным нулю. Целое число j в известном смысле *не зависит от формы замкнутой кривой N.* Действительно, если вид кривой непрерывно изменяется, то и угол, на который поворачивается вектор, может изменяться тоже только непрерывно (если наша замкнутая кривая при изменении не проходит через особые точки); следовательно, он вообще не меняется, так как он может принимать только дискретный ряд значений. Поэтому все другие замкнутые кривые, если они содержат только те же особые точки, что и кривая N, дадут то же число j. Целое число j носит название *индекса замкнутой кривой N по отношению к рассматриваемому векторному полю.* Окружим простой замкнутой кривой N какое-нибудь одно состояние равновесия, какую-нибудь одну особую точку. Как мы видели, если эта замкнутая кривая не содержит других особых точек, то индекс не зависит от формы этой кривой и, следовательно, определяется характером особой точки. Поэтому индекс такой замкнутой кривой можно отнести к самой особой точке и говорить об индексе Пуанкаре рассматриваемой особой точки.

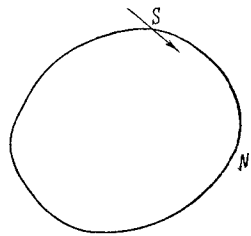

Рис. 250.

Непосредственным рассмотрением (рис. 251) нетрудно убедиться, что индексы Пуанкаре для центра, узла и фокуса равны $+1$, индекс Пуанкаре для седла равен -1.

Также непосредственным рассмотрением нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

1) индекс замкнутой кривой, не содержащей внутри себя ни одной особой точки, равен нулю (рис. 252);

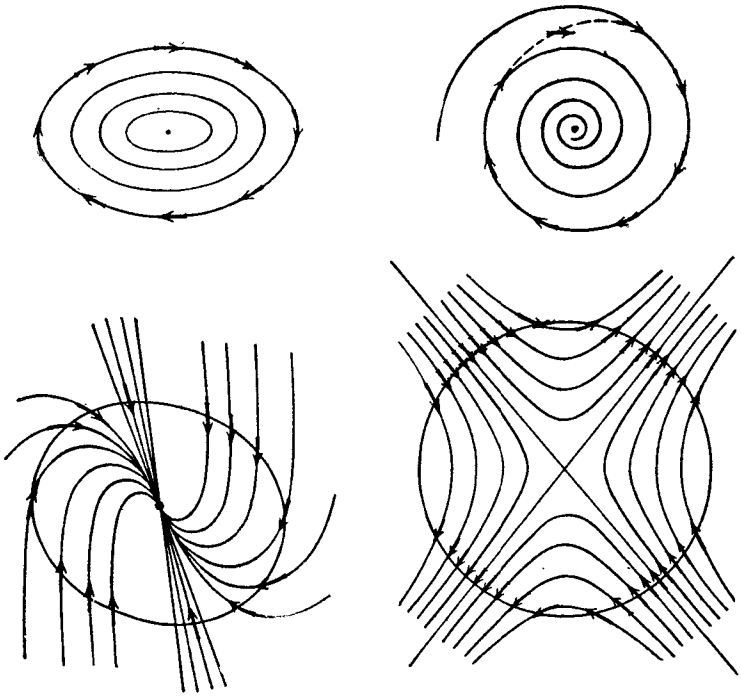

Рис. 251.

2) индекс замкнутой кривой, содержащей внутри себя несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек [1]);

3) индекс замкнутой кривой, являющейся одновременно замкнутой траекторией системы (5.1), равен $+1$ (см. рис. 251, случай центра), так как тогда направление вектора каждый раз совпадает с направлением касательной к кривой N;

---

[1]) Рассмотрим замкнутую кривую N, содержащую несколько особых точек. Разобьем область, ограниченную кривой N, при помощи проведения внутренних кривых («перегородок») на меньшие области с таким расчетом, чтобы каждая из получившихся областей содержала по одной особой точке. Тогда угол, на который повернется вектор при обходе кривой N, равен сумме углов, на которые повернутся векторы при обходе отдельных областей, если все эти области обходить в одном и том же направлении; углы поворота, получающиеся при обходе внутренних перегородок, взаимно уничтожаются, так как каждая такая перегородка обходится дважды: один раз в прямом, другой раз в обратном направлении. Отсюда вытекает утверждение 2).

4) индекс замкнутой кривой, вдоль которой векторы, определенные системой (5.1), направлены либо все внутрь, либо все наружу (эта замкнутая кривая представляет собой «цикл без контакта»), равен $+1$ (см. рис. 251, случай узла)[1]).

Эти утверждения, полученные путем непосредственного рассмотрения, т. е. в сущности путем рассмотрения отдельных примеров

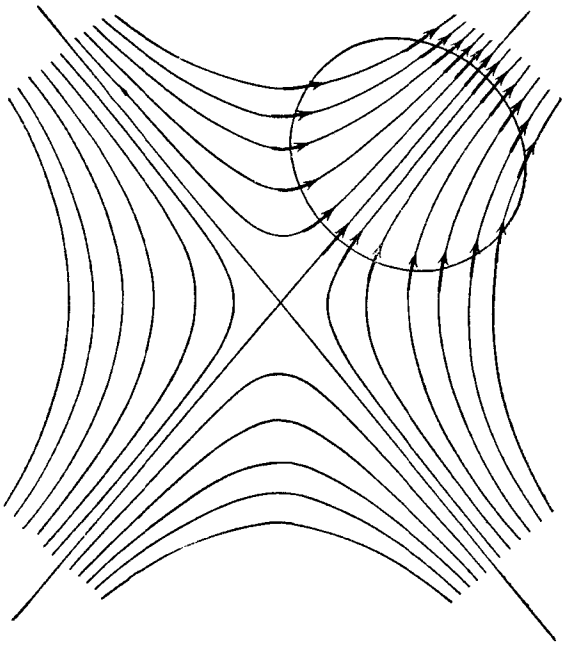

Рис. 252.

и некоторых соображений о непрерывности, опирающихся на геометрическую интуицию[2]), могут быть строго доказаны, например аналитически. Прежде чем перейти к выводам из этих утверждений, дадим несколько примеров такого аналитического рассмотрения.

Нетрудно видеть, что индекс замкнутой кривой N по отношению к векторному полю, определяемому системой (5.1), может быть выражен криволинейным интегралом:

$$j=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_N d\left\{\operatorname{arctg}\frac{Q(x,\ y)}{P(x,\ y)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_N \frac{P\,dQ-Q\,dP}{Q^2+P^2}.$$

---

[1]) Следует отметить, что индекс не учитывает направления движения по фазовым траекториям; например, устойчивый узел и неустойчивый узел имеют один и тот же индекс $+1$.

[2]) За исключением утверждения 2), которое можно считать обоснованным соображениями, данными в сноске.

Это — криволинейный интеграл от полного дифференциала; следовательно, если внутри области, охватываемой кривой N, вдоль которой производится интегрирование, соответствующие подинтегральные функции и их производные непрерывны, то интеграл равен нулю. Отсюда сразу и строго получается наше первое утверждение о том, что индекс замкнутой кривой N, внутри которой нет особых точек, равен нулю [1]), так как при наших предположениях о правых частях системы (5.1) непрерывность подинтегральных функций и их производных может нарушаться лишь в тех точках, где одновременно $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=0$.

Вычислим теперь аналитически индекс Пуанкаре для особой точки, т. е. вычислим индекс простой замкнутой кривой, охватывающей эту особую точку и не содержащей никаких других особых точек. При этом будем предполагать, что для этой точки $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Чтобы не менять обозначений, предположим, что рассматриваемая особая точка представляет собою начало координат, так что

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y),$$

где P_2 и Q_2 — ряды, начинающиеся с членов не ниже второго порядка по x и y.

Докажем сначала, что при вычислении индекса особой точки (с $\Delta \neq 0$) мы можем отбросить члены высших порядков, т. е. P_2 и Q_2. Так как по-предыдущему индекс не зависит от формы кривой, то можно при вычислении индекса взять за кривую N окружность достаточно малого радиуса ρ $(\rho > 0)$.

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, преобразуем криволинейный интеграл в обычный определенный интеграл:

$$j = I(\rho) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\,d(c\cos\varphi + d\sin\varphi) - (c\cos\varphi + d\sin\varphi)\,d(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + \rho F(\rho, \varphi)\,d\varphi}{(a\cos\varphi + b\sin\varphi)^2 + (c\cos\varphi + d\sin\varphi)^2 + \rho G(\rho, \varphi)},$$

где $F(\rho, \varphi)$, $G(\rho, \varphi)$ — степенные ряды по ρ (начинающиеся с членов нулевого измерения по ρ), коэффициенты которых — периодические функции φ.

Здесь через $I(\rho)$ мы обозначили определенный интеграл, стоящий в правой части. Ясно, что криволинейный интеграл, с которым связано понятие индекса, имеет смысл лишь для $\rho > 0$. Однако обратим внимание на следующее. Определенный интеграл $I(\rho)$ является непрерывной функцией ρ для достаточно малых ρ (так как $\Delta \neq 0$). Поэтому $\lim\limits_{\rho\to 0} I(\rho) = I(0)$. С другой стороны, мы знаем, что криволинейный инте-

---

[1]) Обратное утверждение не имеет места, так как могут быть сложные особые точки (для которых $\Delta = 0$) с индексом, равным нулю.

грал не зависит от ρ для достаточно малых ρ. Отсюда следует, что, для достаточно малых ρ, $I(\rho)=I(0)$ и, наконец, что $j=I(0)$:

$$j=I(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\varphi+b\sin\varphi)\,d(c\cos\varphi+d\sin\varphi)-(c\cos\varphi+d\sin\varphi)\,d(a\cos\varphi+b\sin\varphi)}{(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2+(c\cos\varphi+d\sin\varphi)^2}.$$

Таким образом показано, что при вычислении индекса Пуанкаре для простой особой точки (с $\Delta\neq 0$) можно отбросить нелинейные члены. Чтобы вычислить $I(0)$, удобно применить следующий прием. Перейдем снова к обычным координатам и запишем наше выражение опять в виде криволинейного интеграла:

$$j=I(0)=\oint_N\frac{(ax+by)\,d(cx+dy)-(cx+dy)\,d(ax+by)}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},$$

где N — любая простая замкнутая кривая, охватывающая начало, так как для линейного уравнения, получающегося после отбрасывания нелинейных членов, единственная особая точка — начало координат. Прием заключается в том, что за такую замкнутую кривую выбирают эллипс Γ:

$$(ax+by)^2+(cx+dy)^2=1;$$

тогда, как показывают несложные выкладки,

$$j=I(0)=\frac{\Delta}{2\pi}\oint_\Gamma(x\,dy-y\,dx),$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

или в силу известного выражения для площади через криволинейный интеграл

$$j=I(0)=\frac{\Delta}{\pi}S,$$

где S — площадь эллипса. Так как $S=\frac{\pi}{|\Delta|}$ [1]), то

$$j=\frac{\Delta}{|\Delta|}.$$

---

[1]) Возьмем эллипс $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=1$. Чтобы вычислить площадь этого эллипса, перейдем от прямоугольных координат x, y к координатам $\xi=ax+by$, $\eta=cx+dy$, которые также будем интерпретировать как прямоугольные координаты.

Тогда эллипс $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=1$ деформируется в круг $\xi^2+\eta^2=1$. Площадь этого круга $S_1=\pi$.

С другой стороны

$$S_1=S\left|D\left(\frac{\xi,\ \eta}{x,\ y}\right)\right|,$$

Отсюда сразу следует, что индекс Пуанкаре для узла, фокуса и центра равен $+1$, а для седла равен -1, т. е. те же самые результаты, которые мы получили из непосредственного рассмотрения. (Индекс Пуанкаре сложной особой точки, поскольку для нее $\Delta=0$, может быть отличным от ± 1. Например, для особой точки типа седло — узел $j=0$; см. рис. 253.) Мы не будем дальше проводить аналитических рассмотрений, с помощью которых можно было бы обосновать остальные наши утверждения; заметим только, что второе утверждение прямо получается из основных свойств криволинейного интеграла.

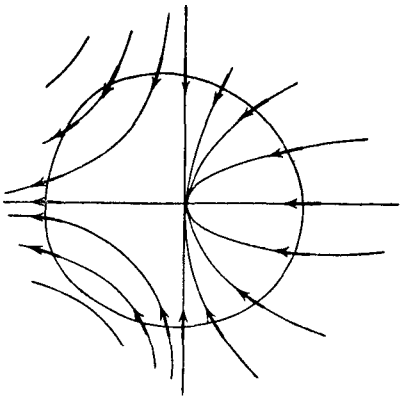

Рис. 253.

Перейдем теперь к следствиям, которые вытекают из теории индексов в отношении законов совместного существования замкнутых фазовых траекторий и состояний равновесия различной природы.

Следствие 1. Внутри замкнутой фазовой траектории находится по крайней мере одна особая точка, так как индекс такой траектории по-предыдущему равен $+1$, а индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, равен нулю.

Следствие 2. Если внутри замкнутой фазовой траектории находится одна особая точка, то это не может быть седло, не может быть также никакая особая точка с индексом, отличным от $+1$.

Следствие 3. Если внутри замкнутой фазовой траектории находятся только простые особые точки (для них $\Delta \neq 0$), то число таких особых точек всегда нечетное, причем число седел на единицу меньше числа остальных особых точек.

Заметим, что те же выводы (на основании утверждения 4)) можно сделать для любой замкнутой кривой, являющейся циклом без прикосновения. Отсюда, в частности, вытекает следующее: если бесконечность абсолютно устойчива или абсолютно неустойчива, то сумма индексов всех особых точек, находящихся на конечном расстоянии, равна $+1$.

где $D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right)$ — соответствующий якобиан. Так как

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\Delta,$$

то $S_1=S\cdot|\Delta|$, откуда площадь

$$S=\frac{\pi}{|\Delta|}.$$