

§ 9. Системы без замкнутых траекторий

Трудности, которые возникают при исследовании конкретных динамических систем, очень велики, и поэтому часто ввиду отсутствия регулярных и достаточно эффективных методов приходится обращаться к различным способам численного интегрирования. Однако есть случаи, когда на основании общей теории исследование сравнительно просто может быть доведено до конца. Один из таких случаев (практически, пожалуй, наиболее важный) — это тот, когда удается каким-либо способом показать, что на фазовой плоскости рассматриваемой системы нет замкнутых фазовых траекторий.

Можно указать ряд критериев для отсутствия замкнутых фазовых траекторий, каждый из которых дает некоторые достаточные условия. Хотя эти критерии отнюдь не дают какого-либо регулярного способа доказательства отсутствия замкнутых траекторий у системы, заданной уравнениями типа (5.1), тем не менее, как это будет видно из приведенных физических примеров, они представляют определенный практический интерес.

Предположим, что рассматриваемая система отображается уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

где мы опять будем предполагать $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ аналитическими на всей фазовой плоскости.

Первый критерий, который мы рассмотрим, — это так называемый *критерий Бендиクсона*, являющийся достаточным условием отсутствия замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий [137].

Критерий Бендиクсона: если в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий динамической системы (5.1)¹⁾.

Для доказательства воспользуемся теоремой Грина, согласно которой

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint (P dy - Q dx).$$

Если интеграл по контуру берется по кривой, целиком состоящей из траекторий, то в силу уравнений (5.1) он равен нулю, а следовательно, и двукратный интеграл также равен нулю. Но в таком

¹⁾ Заметим, что сформулированный критерий остается в силе и в тех случаях, когда $P'_x + Q'_y$ обращается в нуль в отдельных точках или на некоторых кривых в этой области.

случае выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ должно обязательно менять знак где-нибудь внутри взятого контура; таким образом наше утверждение доказано.

Известным обобщением критерия Бендиксона является *критерий Дюлака* [148, 108]: если существует такая непрерывная с непрерывными производными функция $B(x,y)$, что в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (5.1)¹⁾. Доказательство критерия полностью аналогично доказательству критерия Бендиксона, и поэтому приводить его мы не будем.

Перейдем теперь к критериям, связанным с гораздо более слабым требованием — с требованием отсутствия замкнутых фазовых траекторий, т. е., иначе говоря, к критериям отсутствия периодических решений системы (5.1).

Можно было бы дать на основании изложенной в § 8 теории индексов ряд критериев; мы приведем только некоторые из них, практически наиболее существенные. Впоследствии мы познакомимся еще с некоторыми критериями, основанными на свойствах так называемой «кривой контактов».

1. Если в системе не существует особых точек, то у нее не может быть и замкнутых фазовых траекторий.

2. Если в системе существует только одна особая точка, причем индекс ее не равен $+1$ (например, седло), то в этой системе не может быть замкнутых фазовых траекторий.

3. Если система обладает несколькими особыми точками, сумма индексов любой комбинации которых не равна $+1$, то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.

4. Если система допускает, например, только простые особые точки, причем через все точки с индексами $+1$ проходят интегральные кривые, уходящие в бесконечность, то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.

Для иллюстрации сказанного выше мы рассмотрим несколько физических систем, которые отображаются динамическими моделями без замкнутых фазовых траекторий.

1. Симметричное ламповое реле (триггер). В качестве первого примера мы рассмотрим работу симметричного лампового реле или

¹⁾ Здесь также допустимо, чтобы $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ обращалось в нуль в отдельных точках или на каких-либо кривых в этой области. Далее, очевидно, что критерий Бендиксона можно рассматривать как частный случай критерия Дюлака.

триггера, схема которого приведена на рис. 254 (емкости C_a и C_g изображают малые, паразитные емкости схемы). Эта схема при определенных условиях имеет два устойчивых состояния равновесия и может быть переброшена из одного состояния равновесия в другое подачей соответствующего импульса напряжения в подходящий узел схемы. Она находит себе довольно широкое применение в ряде радиотехнических устройств (например, в катодных осциллографах в качестве устройства, запускающего так называемую «ждущую» развертку электронного луча по оси времени при приходе на вход осциллографа одиночного импульса напряжения), в счетчиках электрических импульсов, а также в современных электронных цифровых математических машинах.

Мы рассмотрим упрощенную схему триггера (рис. 255), которая получается из полной схемы (рис. 254) в предположении, что сеточные токи отсутствуют и что $CR_1 = C_g R_2$. Тогда коэффициент передачи β делителей напряжения, передающих колебания анодных напряжений на сетки ламп, получается постоянным и не зависящим от формы колебаний анодных напряжений¹⁾:

$$u_1 - E_g = \beta (u_{a2} - E_g), \\ u_2 - E_g = \beta (u_{a1} - E_g), \quad (5.60)$$

где $\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, а эквивалентные емкости анодных

узлов (емкости C_0 на рис. 255) равны $C_0 = C_a + \frac{C C_g}{C + C_g}$. Эта упрощенная схема, как мы увидим, описывается двумя уравнениями первого

¹⁾ Строго говоря, уравнения делителей напряжений являются дифференциальными. Например, для делителя, передающего колебания напряжения на аноде левой лампы на сетку правой (рис. 254):

$$i = C \frac{d(u_{a1} - u_2)}{dt} + \frac{u_{a1} - u_2}{R_1} = C_g \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - E_g}{R_2},$$

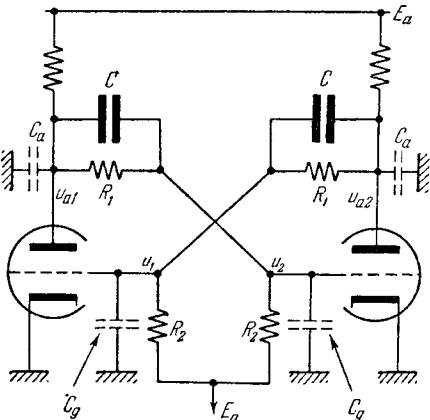


Рис. 254.

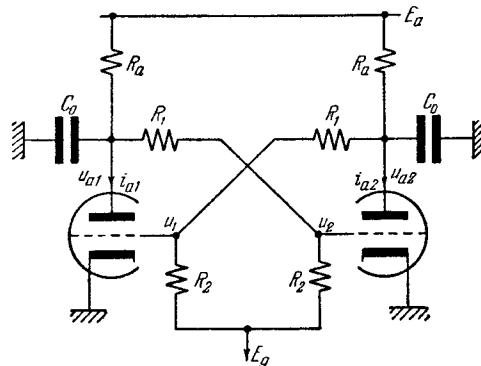


Рис. 255.

порядка (в то время как полная схема (рис. 254) при $CR_1 \neq C_g R_2$ — системой уравнений четвертого порядка) и позволит нам рассмотреть работу триггера как реле, перебрасываемого из одного состояния равновесия в другое подачей импульса напряжения в *несимметричную* точку схемы

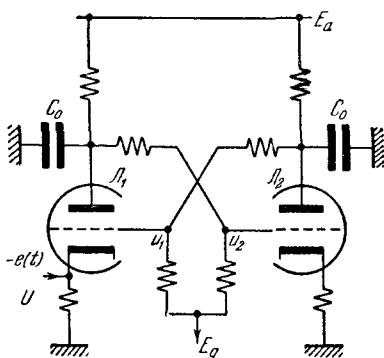


Рис. 256.

например на сетку одной из ламп (часто, чтобы не накладывать дополнительных электрических

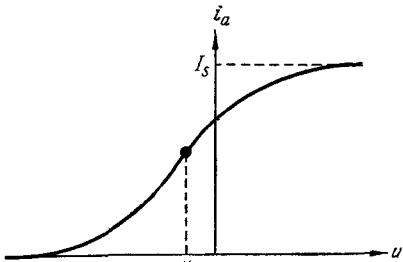


Рис. 257.

связей на управляющую сетку лампы, этот импульс подают на другую сетку лампы (например, на пентодную, если в схеме использованы пентоды) или на небольшое сопротивление, включенное в цепь катода (рис. 256)). Для этой схемы (в обозначениях рис. 255) имеем следующие уравнения:

$$C_0 \frac{du_{a1}}{dt} + i_{a1} + \frac{u_{a1} - E_g}{R_1 + R_2} + \frac{u_{a1} - E_a}{R_a} = 0,$$

$$C_0 \frac{du_{a2}}{dt} + i_{a2} + \frac{u_{a2} - E_g}{R_1 + R_2} + \frac{u_{a2} - E_a}{R_a} = 0.$$

Далее, пренебрегая анодной реакцией, будем считать, что анодный ток каждой из ламп является функцией только напряжения на ее

где i — ток через делитель, откуда

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C + C_g) \frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \frac{du_{a1}}{dt} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} (u_{a1} - E_g) + E_g.$$

Однако если $CR_1 = C_g R_2$, то это уравнение имеет при *любых* u_{a1} общим решением

$$u_2 = E_g + \frac{R_2}{R_1 + R_2} (u_{a1} - E_g) + A e^{-\frac{t}{CR_1}}$$

и, следовательно, по истечении достаточно большого промежутка времени после включения схемы (при $t \gg CR_1$) будет иметь место второе соотношение (5.60), какие бы переменные u_{a1} ни были. Ток, потребляемый делителем, как нетрудно подсчитать, равен $i = \frac{CC_g}{C + C_g} \frac{du_{a1}}{dt} + \frac{u_{a1} - E_g}{R_1 + R_2}$; поэтому мы можем заменить RC -делитель (при условии, что $CR_1 = C_g R_2$) делителем, состоящим только из сопротивлений R_1 и R_2 , зашунтированных емкостью $\frac{CC_g}{C + C_g}$.

сетке, т. е. что $i_{a1} = f(u_1)$ и $i_{a2} = f(u_2)$. Относительно характеристики ламп $i_a = f(u)$ предположим, что она имеет вид, изображенный на рис. 257, т. е. обладает следующими свойствами:

1) ток является монотонно возрастающей функцией напряжения на сетке, т. е. $f'(u) \geq 0$, причем $0 \leq f(u) \leq I_s$, где I_s — ток насыщения лампы;

2) крутизна характеристики $f'(u)$ имеет единственный максимум и монотонно спадает до нуля при удалении от этого максимума в обе стороны.

Вводя в написанные выше уравнения колебаний характеристику ламп, а также используя (5.60), можно привести эти уравнения к виду:

$$\begin{aligned} C_0 R \frac{du_1}{dt} &= -u_1 - \beta R f(u_2) + E, \\ C_0 R \frac{du_2}{dt} &= -u_2 - \beta R f(u_1) + E, \end{aligned} \quad (5.61)$$

где

$$R = \frac{R_a(R_1 + R_2)}{R_a + R_1 + R_2}, \quad E = E_g + \beta \frac{R}{R_a} (E_a - E_g) = \frac{R_a E_a + (R_1 + R_a) E_g}{R_1 + R_2 + R_a},$$

или к одному уравнению первого порядка:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2 + \beta R f(u_1) - E}{u_1 + \beta R f(u_2) - E}. \quad (5.62)$$

Состояния равновесия схемы определяются, очевидно, уравнениями:

$$u_2 + \beta R f(u_1) - E = 0, \quad (5.63a)$$

$$u_1 + \beta R f(u_2) - E = 0. \quad (5.63b)$$

и могут рассматриваться как точки пересечения кривых (5.63a) и (5.63b) на фазовой плоскости (заметим, что первая из них является изоклиной горизонтальных касательных, а вторая — изоклиной вертикальных касательных). Нетрудно видеть, что при любых значениях параметров существует «симметричное» состояние равновесия — состояние равновесия (U, U) , лежащее на биссектрисе $u_1 = u_2$, которая, кстати сказать, является интегральной прямой уравнения (5.62). Действительно, уравнение, определяющее координаты этого состояния равновесия:

$$U + \beta R f'(U) - E = 0,$$

в силу указанных выше свойств функции $f(u)$, всегда имеет одно и только одно решение, соответствующее единственной точке пересечения кривой $y = f(u)$ и прямой $y = \frac{E - u}{\beta R}$. Кроме этого «симметричного» состояния равновесия схема может иметь и другие, не лежащие на интегральной прямой $u_1 = u_2$, но попарно ей симметричные (если точка (a, b) является состоянием равновесия, то состоянием равновесия будет и точка (b, a)); таким образом, общее число состояний

равновесия всегда нечетное. Для отыскания состояний равновесия нужно построить кривые (5.63а) и (5.63б) и найти их точки пересечения. Такое построение дано на рис. 258, а — для случая $\beta Rf'(U) < 1$, когда имеется только одно («симметричное») состояние равновесия, и на рис. 258, б — для случая $\beta Rf'(U) > 1$, когда имеются три состояния равновесия¹⁾.

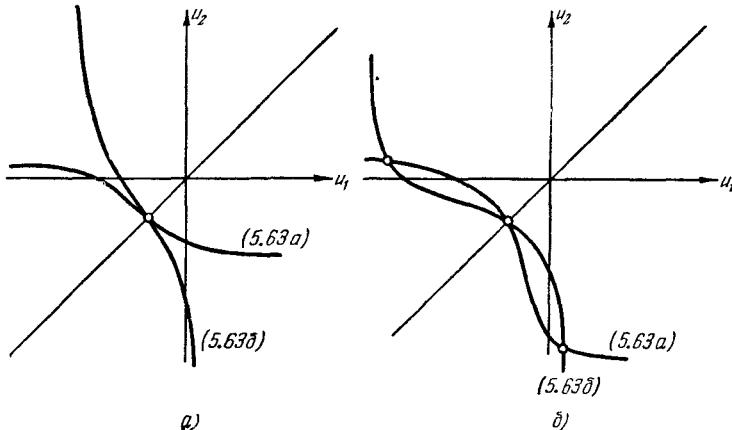


Рис. 258.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости состояний равновесия. Для этого составим уравнение первого приближения для малых отклонений состояния равновесия (u_1^0, u_2^0). Положим

$$u_1 = u_1^0 + \xi, \quad u_2 = u_2^0 + \eta;$$

тогда, как нетрудно убедиться, уравнения первого приближения имеют вид:

$$C_0 R \frac{d\xi}{dt} = -\xi - \beta R f'(u_2^0) \eta, \quad C_0 R \frac{d\eta}{dt} = -\eta - \beta R f'(u_1^0) \xi,$$

а характеристические показатели λ определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} C_0 R \lambda + 1 & \beta R f'(u_2^0) \\ \beta R f'(u_1^0) & C_0 R \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$C_0 R \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{f'(u_1^0) f'(u_2^0)}.$$

¹⁾ Если $\beta R f'(U)$ близко к единице, а крутизна характеристики ламп $f'(u)$ в «симметричном» состоянии равновесия не максимальна, то рассматриваемая система может, вообще говоря, иметь и более трех состояний равновесия. При $\beta R f'(U) < 1$ их число может быть равно 5, 9, 13, ..., а при $\beta R f'(U) > 1 - 7, 11, \dots$ в зависимости от вида характеристики $f(u)$ на участке от $u = U$ до точки максимальной крутизны. Ниже мы будем рассматривать только наиболее интересные для практики случаи одного и трех состояний равновесия.

Принимая во внимание, что $-\beta Rf'(u_1^0)$ есть тангенс угла наклона касательной кривой (5.63а) и $-\frac{1}{\beta Rf'(u_2^0)}$ — тангенс угла наклона касательной кривой (5.63б), получаем, что «симметричное» состояние равновесия устойчиво (устойчивый узел) при $\beta Rf'(U) < 1$ и неустойчиво (седло) при $\beta Rf'(U) > 1$. Следовательно, это состояние равновесия устойчиво, если оно единственное, и неустойчиво, если состояний равновесия три; остальные два состояния равновесия в последнем случае всегда устойчивы (они являются устойчивыми узлами).

Далее, если обозначить через $P(u_1, u_2)$ и $Q(u_1, u_2)$ правые части уравнений (5.61), то

$$\frac{\partial P}{\partial u_1} + \frac{\partial Q}{\partial u_2} = -2 < 0$$

на всей фазовой плоскости, и поэтому, согласно критерию Бендиксона, рассматриваемая система не допускает существования замкнутых контуров, составленных из фазовых траекторий, и, тем более, замкнутых фазовых траекторий. Нетрудно также видеть, что из бесконечности все фазовые траектории направлены внутрь; в самом деле, из уравнений (5.61) следует, что выражение

$\frac{1}{2} C_0 R \frac{d}{dt}(u_1^2 + u_2^2) = -(u_1^2 + u_2^2) - \beta R [u_1 f(u_2) + u_2 f(u_1)] + E(u_1 + u_2)$ при достаточно больших u_1 или u_2 всегда отрицательно; иначе говоря, окружность $u_1^2 + u_2^2 = A^2$ достаточно большого радиуса A является циклом без контакта, причем все фазовые траектории входят внутрь круга, ограниченного этой окружностью.

Этих сведений достаточно для разбиения фазовой плоскости на фазовые траектории. Это разбиение схематически изображено на рис. 259, а (для $\beta Rf'(U) < 1$) и на рис. 259, б (для $\beta Rf'(U) > 1$).

Рассмотрим теперь процесс переброса триггера из одного состояния равновесия в другое при подаче на одну из ламп импульса напряжения. Пусть $\beta Rf'(U) > 1$ и триггер в начале работы находится в состоянии равновесия, соответствующем узлу Y_1 на фазовой плоскости, когда лампа L_1 заперта, а лампа L_2 открыта. Пусть на лампу L_1 подается короткий импульс напряжения, отпирающий ее (например, отрицательный импульс на катодное сопротивление этой лампы; см. рис. 256). Уравнения схемы при наличии добавочного напряжения $e(t)$, подведенного к лампе L_1 , имеют вид:

$$\begin{aligned} C_0 R \frac{du_1}{dt} &= -u_1 - \beta Rf(u_2) + E, \\ C_0 R \frac{du_2}{dt} &= -u_2 - \beta Rf[u_1 + e(t)] + E. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Считая импульс прямоугольным, с плоской вершиной (рис. 260), мы можем во время действия импульса (при $0 < t < \tau$) рассматривать нашу систему как автономную и построить ее фазовый портрет на фазовой плоскости u_1, u_2 (он, конечно, будет отличаться от портрета,

построенного нами ранее для $e = 0$). По-прежнему каждое движение приводит систему в одно из устойчивых состояний равновесия

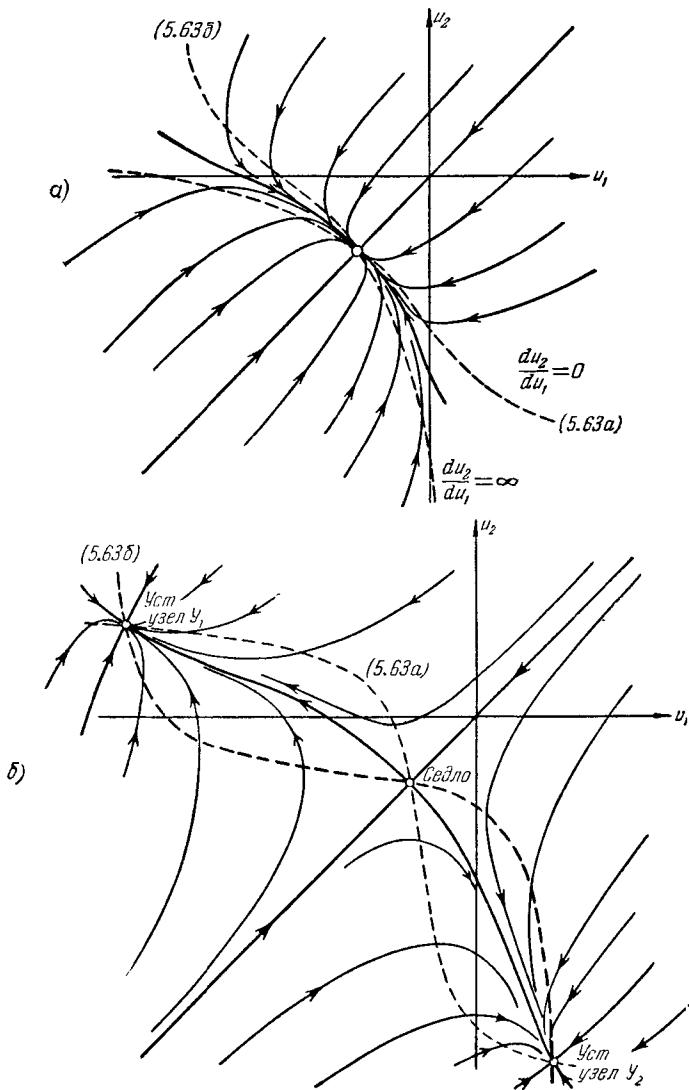


Рис. 259.

(устойчивые состояния равновесия — опять узлы). Состояния равновесия теперь определяются как точки пересечения кривых

$$u_2 + \beta R f(u_1 + e) - E = 0 \quad \text{и} \quad u_1 + \beta R f(u_2) - E = 0,$$

первая из которых получается из кривой (5.63а) сдвигом влево на e (мы считаем, что $e > 0$), а вторая совпадает с кривой (5.63б).

Пусть амплитуда импульса e настолько велика, что во время действия импульса триггер имеет одно состояние равновесия Y (оно будет устойчивым узлом) слева от биссектрисы (рис. 261). Будем считать крутизны переднего и заднего фронтов импульса настолько большими, что за время их прохода состояние системы не успевает заметно измениться (емкости схемы не успевают заметно изменить заряды). Тогда непосредственно после прохода переднего фронта импульса (при $t = 0$) состояние системы будет изображаться на фазовой плоскости (рис. 261) точкой Y_1 , которая до прихода импульса была устойчивым узлом, но во время действия импульса является простой, неособой точкой. По соответствующей фазовой траектории изображающая точка пойдет в соответствии с уравнениями (5.64) к устойчивому узлу Y . Если за время действия импульса (т. е. до

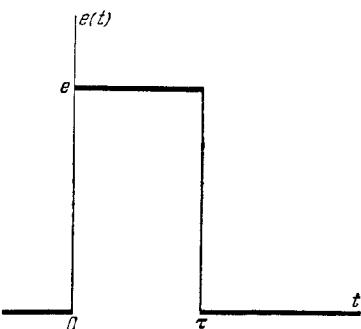


Рис. 260.

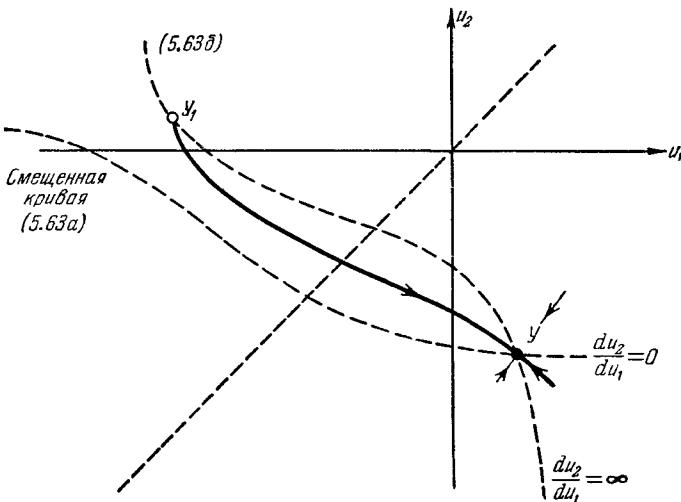


Рис. 261.

$t = \tau$) она перейдет через биссектрису $u_1 = u_2$, то после прекращения импульса (при $t = \tau$) она окажется в области «притяжения» узла Y_2 на фазовой плоскости для $e = 0$ (рис. 259, б) и в дальнейшем будет асимптотически к нему приближаться. Таким образом, если импульс

имел достаточно большую амплитуду e и длительность τ , то он перебросит триггер из состояния равновесия Y_1 в состояние равновесия Y_2 . Заметим, что после повторной подачи такого же импульса триггер, конечно, останется в состоянии равновесия Y_2 (для обратного переброса необходим импульс противоположного знака).

Сделаем еще одно замечание, имеющее определенный практический интерес. Как известно, триггер применяется в качестве счетной ячейки для счета электрических импульсов (по модулю, равному двум). С этой целью импульсы подают в симметричную точку схемы (например, на общее катодное сопротивление; см. рис. 262), и тогда каждый импульс перебрасывает триггер из одного состояния равновесия в другое (тем самым по состоянию триггера можно определить, какое число импульсов, четное или нечетное, было подано на вход триггера). Нетрудно видеть, что рассмотренная нами упрощенная схема триггера не будет перебрасываться из одного состояния равновесия в другое при подаче импульса в

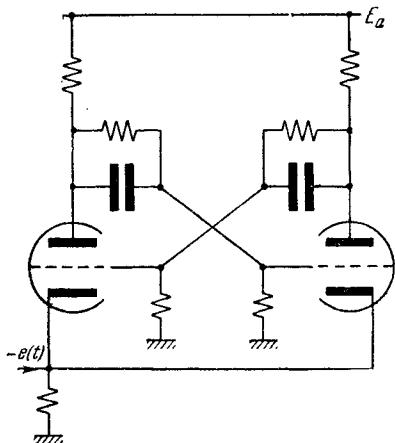


Рис. 262.

симметричную точку схемы. В самом деле, уравнения колебаний упрощенной схемы при симметричной подаче импульса прямоугольной формы и амплитуды e запишутся в виде:

$$\begin{aligned} C_0 R \frac{du_1}{dt} &= -u_1 - \beta R f(u_2 + e) + E, \\ C_0 R \frac{du_2}{dt} &= -u_2 - \beta R f(u_1 + e) + E \end{aligned}$$

или в виде одного уравнения:

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{-u_1 - \beta R f(u_2 + e) + E}{-u_2 - \beta R f(u_1 + e) + E},$$

которое, очевидно, имеет интегральной кривой прямую $u_1 = u_2$. Поэтому во время действия импульса изображающая точка не может перейти через биссектрису $u_1 = u_2$ и, следовательно, попасть в область притяжения другого узла. Оставшись в области притяжения исходного состояния равновесия, она после прекращения импульса вернется в это состояние равновесия и, таким образом, переброс триггера из одного состояния равновесия в другое не состоится. Это отражает реальные свойства триггера: для того чтобы триггер мог работать в качестве счетной ячейки, он должен иметь достаточно большие емкости C (рис. 254).

2. Работа динамомашины на общую нагрузку. Рассмотрим две одинаковые динамомашины постоянного тока последовательного возбуждения, которые включены параллельно и работают на общую нагрузку (рис. 263). Полагая скорости вращения якорей машин постоянными и одинаковыми и пренебрегая гистерезисными явлениями

в магнитных цепях машин, мы можем записать э. д. с. E каждой из машин в виде некоторой

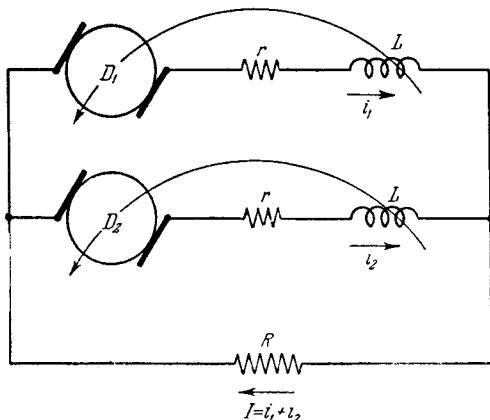


Рис. 263.

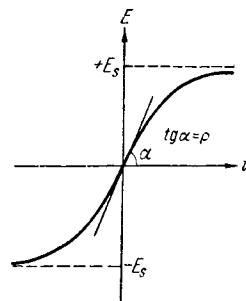


Рис. 264.

однозначной функции тока i в ее обмотке возбуждения: $E = \psi(i)$. Положим, что характеристика каждой машины имеет вид, приведенный на рис. 264, т. е. что:

1) $E = \psi(i)$ является непрерывно дифференцируемой нечетной функцией ($\psi(-i) = -\psi(i)$ и $\psi(0) = 0$), причем при $i \rightarrow +\infty$ $\psi(i) \rightarrow E_s$ (соответственно $\psi(i) \rightarrow -E_s$ при $i \rightarrow -\infty$);

2) производная $\psi'(i) \geq 0$ и не возрастает при увеличении $|i|$, т. е. при любых $|i''| > |i'| > 0$ $\psi'(i'') \leq \psi'(i') \leq \rho$, где $\rho = \psi'(0) > 0$.

Уравнения рассматриваемой системы (в обозначениях рис. 263) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} &= \psi(i_1) - (r + R)i_1 - Ri_2, \\ L \frac{di_2}{dt} &= \psi(i_2) - (r + R)i_2 - Ri_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

Деля одно уравнение на другое, получим уравнение интегральных кривых:

$$\frac{di_2}{i_1} = \frac{\psi(i_2) - (r + R)i_2 - Ri_1}{\psi(i_1) - (r + R)i_1 - Ri_2}. \quad (5.66)$$

Состояния равновесия определяются уравнениями

$$\psi(i_1) - (r + R)i_1 - Ri_2 = 0, \quad (5.67a)$$

$$\psi(i_2) - (r + R)i_2 - Ri_1 = 0, \quad (5.67b)$$

а их характер — корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

коэффициенты которого для состояния равновесия (I_1, I_2) , как легко подсчитать, равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{L} [2(r+R) - \psi'(I_1) - \psi'(I_2)], \\ \Delta &= \frac{1}{L^2} \{[\psi'(I_1) - (r+R)][\psi'(I_2) - (r+R)] - R^2\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Заметим, что дискриминант характеристического уравнения

$$\frac{\sigma^2}{4} - \Delta = \frac{[\psi'(I_1) - \psi'(I_2)]^2}{4L^2} + \frac{R^2}{L^2} > 0,$$

т. е. состояния равновесия рассматриваемой системы могут быть только узлами или седлами.

Прежде всего при любых параметрах системы ее состоянием равновесия является начало координат фазовой плоскости $i_1 = i_2 = 0$, соответствующее невозбужденным режимам обеих машин. Для него $\sigma L = 2(r+R-\rho)$ и $\Delta L^2 = (\rho-r)[\rho-(r+2R)]$. Поэтому это состояние равновесия — устойчивый узел ($\sigma > 0$, $\Delta > 0$) при $r > \rho$, седло ($\Delta < 0$) при $r < \rho < r+2R$ и неустойчивый узел ($\sigma < 0$, $\Delta > 0$) при $r+2R < \rho$.

Для отыскания состояний равновесия, лежащих на биссектрисе $i_2 = i_1$ (мы будем называть их ради краткости A -точками), положим

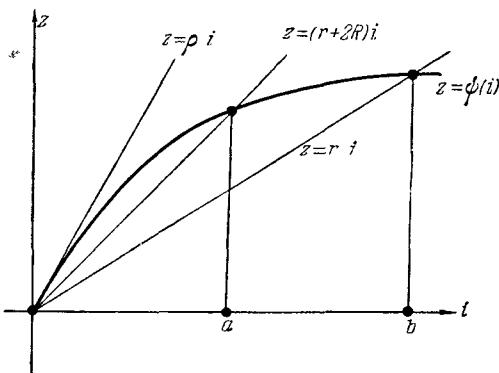


Рис. 265.

в уравнениях (5.67а) и (5.67б) $i_1 = i_2 = a$; тогда для координат этих точек получим:

$$\psi(a) - (r+2R)a = 0. \quad (5.69)$$

Это — как раз нужные состояния равновесия, так как в режимах, им соответствующих, обе машины работают правильно, отдавая наибольшую мощность на сопротивлении R . Как видно из графического решения уравнения

(5.68), приведенного на рис. 265, такие состояния равновесия существуют только при $r+2R < \rho$ и притом только два: $A(a, a)$ и $A_1(-a, -a)$, где $a > 0$. Для A -точек: $\sigma L = 2[r+R-\psi'(a)]$ и $\Delta L^2 = [\psi'(a)-r][\psi'(a)-(r+2R)]$. Так как $\psi'(a) < r+2R$, то эти полезные состояния равновесия устойчивы (устой-

чивые узлы) лишь при $r > \psi'(a)$ и неустойчивы (седла) при $r < \psi'(a)$.

Если $r < \rho$, то на другой биссектрисе $i_2 = -i_1$ существуют два состояния равновесия: $B(b, -b)$ и $B_1(-b, b)$. Эти «вредные» состояния равновесия (динамомашины работают одна на другую и ток через сопротивление R $I = i_1 + i_2 = 0$) мы будем обозначать как B -точки. Координата b ($b > 0$), очевидно, определяется уравнением

$$\psi(b) - rb = 0, \quad (5.70)$$

т. е. точкой пересечения кривой $z = \psi(i)$ и прямой $z = ri$ (рис. 265). Для B -точек: $\Delta L = 2[r + R - \psi(b)] > 0$, $\Delta L^3 = [\psi(b) - r][\psi(b) - (r + 2R)] > 0$, так как $\psi(b) < r$. Следовательно, B -точки, если они существуют, всегда являются устойчивыми узлами.

Посмотрим теперь, какие режимы могут иметь место в рассматриваемой нами системе. Для этого построим «галерею фазовых портретов» системы, считая характеристику машин неизменной и взяв за параметры системы сопротивления r и R . Прежде всего, как это следует из уравнений (5.65),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} (i_1^2 + i_2^2) = \\ = -R(i_1 + i_2)^2 - r(i_1^2 + i_2^2) + i_1 \psi(i_2) + i_2 \psi(i_1) < 0 \end{aligned}$$

в точках окружности $i_1^2 + i_2^2 = \text{const}$ достаточно большого радиуса. Поэтому каждая такая окружность является *циклом без контакта*, причем все фазовые траектории идут из бесконечности в область внутри цикла без контакта (т. е. бесконечность абсолютно неустойчива). Отсюда, между прочим, следует, что сумма индексов Пуанкаре для всех состояний равновесия равна $+1$.

Далее, в силу симметрии схемы и нечетности функции $\psi(i)$ обе биссектрисы $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ являются интегральными прямыми уравнения (5.66), а весь фазовый портрет симметричен относительно этих прямых; в частности, симметрично друг другу относительно них расположены и состояния равновесия¹⁾. Поэтому в дальнейшем мы можем ограничиться исследованием вида фазовых траекторий в одном квадранте фазовой плоскости, заключенном между этими интегральными прямыми (мы будем рассматривать их вид в квадранте K_1 , содержащем положительную полуось Oi_1).

Состояния равновесия, как мы уже указывали, являются точками пересечения кривых (5.67a) и (5.67b)²⁾, уравнения которых могут

¹⁾ Следствием симметрии фазового портрета относительно прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ является также одно, общее для всех рассмотренных выше состояний равновесия свойство: все интегральные кривые уравнения (5.66) проходят через них по направлениям с угловыми коэффициентами $z_{1,2} = \pm 1$.

²⁾ Заметим, что эти кривые являются изоклиниами на фазовой плоскости: первая — изоклиной вертикальных, а вторая — изоклиной горизонтальных наклонов.

быть записаны в явной форме:

$$i_2 = \varphi(i_1), \quad (5.67a)$$

$$i_1 = \varphi(i_2), \quad (5.67b)$$

где

$$\varphi(i) = \frac{\psi(i) - (r + R)i}{R}. \quad (5.71)$$

Эти кривые, конечно, симметричны друг другу относительно интегральных прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$. Поэтому для отыскания состояний равновесия, лежащих в квадранте K_1 (включая его границы), нам достаточно построить кривую (5.67a) для $i_1 \geq 0$ и по ней как зеркальное отражение от прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ — кривую (5.67b) (последнюю нужно строить только в пределах квадранта K_1). Такие построения кривых (5.67a) и (5.67b) для различных значений параметров r и R даны на рис. 266 (там сплошной линией изображена кривая (5.67a) при $i_1 \geq 0$ и пунктирной — ее зеркальные отражения от прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ — кривая (5.67b) в пределах квадранта K_1).

I. $r > r$. В этом случае (рис. 266, I) $\varphi'(0) = \frac{r - (r + R)}{R} < -1$ и кривая (5.67a) при $i_1 > 0$ целиком лежит в квадранте K_2 , а ее зеркальное отражение от прямой $i_2 = -i_1$ — кривая (5.67b) — в K_1 . Эти кривые нигде, кроме начала координат, не пересекаются, и на фазовой плоскости (рис. 267, I) имеется единственное состояние равновесия — устойчивый узел O . Поскольку других состояний равновесия нет, равно как нет и замкнутых фазовых траекторий¹⁾, то все фазовые траектории асимптотически приближаются к узлу O , — в системе при любых начальных условиях будет устанавливаться режим, в котором обе машины не возбуждены²⁾.

II. $r < r < r + 2R$. Теперь $-1 < \varphi'(0) < +1$ и кривая (5.67a) вблизи начала координат лежит в квадранте K_1 и затем при некотором $i_1 = b$ переходит в квадрант K_2 (рис. 266, II). Соответственно, кривая (5.67b) лежит в K_1 только при $i_1 \geq b$, пересекаясь с кривой (5.67a) только в начале координат O и в точке $B(b, -b)$. Поэтому на фазовой плоскости (рис. 267, II) имеются три состояния равновесия: седло O и два устойчивых узла $B(b, -b)$ и $B_1(-b, b)$; при

¹⁾ Если бы на фазовой плоскости имелась замкнутая фазовая траектория, то, согласно теории индексов Пуанкаре, она охватывала бы узел O , что невозможно, так как через него проходят интегральные прямые $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$, уходящие в бесконечность. По той же причине замкнутых фазовых траекторий не существует и при других значениях параметров системы (через каждый узел, как мы увидим, проходит интегральная прямая $i_2 = i_1$ или $i_2 = -i_1$; следовательно, замкнутая фазовая траектория, если бы она существовала, не могла бы охватывать ни одного из них и иметь индекс Пуанкаре, равный +1).

²⁾ Все интегральные кривые уравнения (5.66), кроме прямой $i_2 = i_1$, проходят через узел O , касаясь прямой $i_2 = -i_1$. В этом нетрудно убедиться, воспользовавшись приемом, приведенным в примечании на стр. 296.

любых начальных условиях в системе устанавливается один из режимов работы машин, при котором они работают друг на друга (одна — генератором, другая — мотором), а ток во внешней цепи равен нулю.

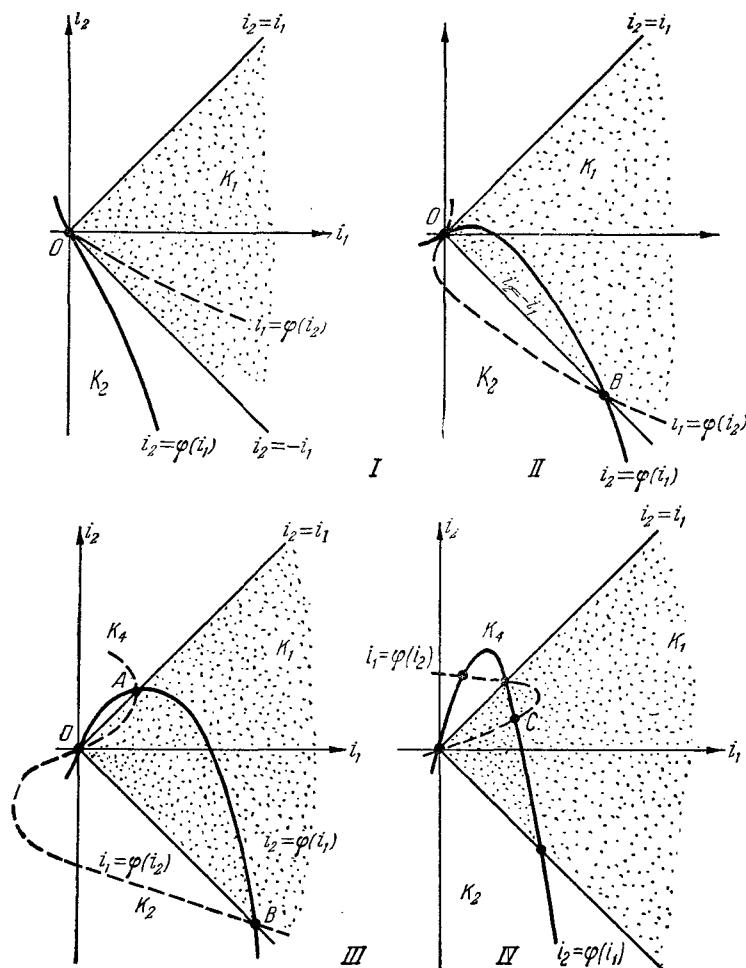


Рис. 266.

III. $r + 2R < \rho$, $r < \psi(a)$. Так как $r + 2R < \rho$, то $\varphi'(0) > +1$ и кривая (5.67а) сначала (при малых i_1) идет в квадранте K_1 , затем при $i_1 = a$ переходит в K_1 и, наконец, при $i_1 = b$ — в K_2 (рис. 266, III). Соответственно кривая (5.67б) лежит в K_1 только при $0 \leq i_2 \leq a$ и при $i_2 \leq -b$. Будем полагать функцию $\psi(i)$ такой, что эти кривые

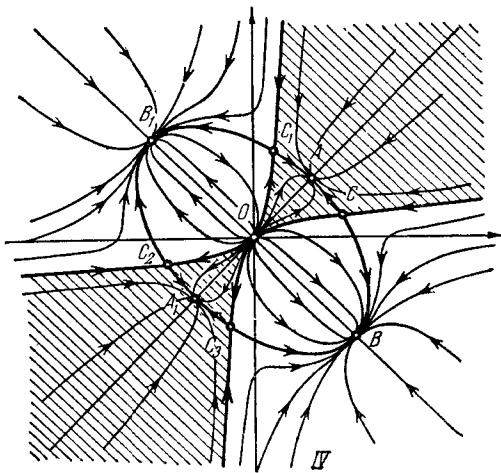
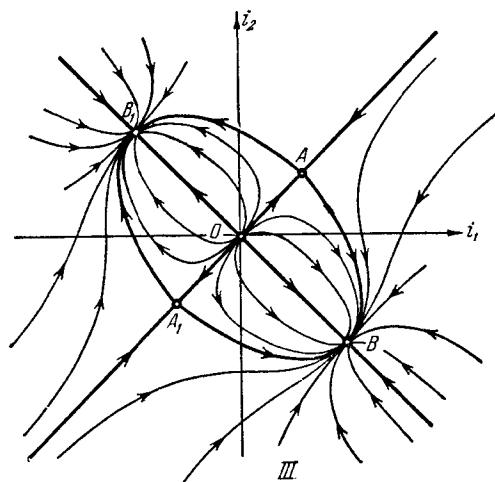
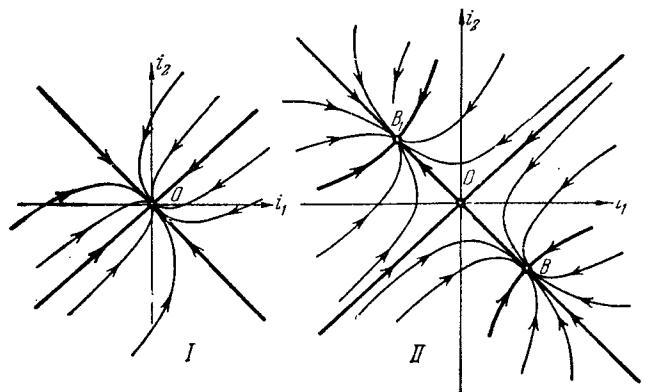


Рис. 267.

не пересекаются внутри квадранта K_1 (именно этот случай и изображен на рис. 266, III), это вполне может быть, поскольку $\psi'(a) = \frac{\psi(a) - (r + R)}{R} > -1$. Тогда на фазовой плоскости мы будем иметь пять состояний равновесия: неустойчивый узел O , два седла A и A_1 и два устойчивых узла B и B_1 (рис. 267, III)¹⁾. Режим работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь и невозбужденный режим обеих машин оказались неустойчивыми, и в системе при любых начальных условиях опять установится один из режимов работы машин самих на себя.

IV. $r + 2R < p$, $r > \psi'(a)$. В отличие от предыдущего случая здесь $\psi'(a) < -1$ и кривые (5.67а) и (5.67б) пересекаются *внутри* квадранта K_1 по крайней мере в одной точке. Ниже мы будем рассматривать только тот случай, когда эта точка пересечения *единственна* (точка $C(c', c'')$ на рис. 266, IV)²⁾, а на фазовой плоскости (рис. 267, IV) имеются девять состояний равновесия: неустойчивый узел O , четыре устойчивых узла A, A_1, B, B_1 и четыре C -точки: $C(c', c'')$, $C_1(c'', c')$, $C_2(-c', -c'')$ и $C_3(-c'', -c')$. На основании теории индексов Пуанкаре нетрудно убедиться, что это — седла. В самом деле, сумма индексов Пуанкаре для всех состояний равновесия, как мы уже видели, равна $+1$; известные нам пять состояний равновесия на интегральных прямых $i_2 = i_1$ и $i_2 = -i_1$ (точки O, A, A_1, B, B_1) суть узлы, и сумма их индексов равна $+5$, следовательно, сумма индексов четырех C -точек должна равняться -4 , т. е. C -точки должны быть седлами. Устойчивым стационарным режимам работы машин соответствуют устойчивые узлы A, A_1, B, B_1 , т. е. устойчивыми будут и режим правильной работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь и режим работы одной машины на другую. Установление того или иного режима зависит от начальных условий; если начальное состояние системы соответствует какой-либо точке области, ограниченной сепаратрисами (усами седел C) и заштрихованной на рис. 267, IV, то установится режим работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь.

¹⁾ Сделанных выше предположений относительно вида функции $\psi(i)$ недостаточно для доказательства отсутствия точек пересечения кривых (5.67а) и (5.67б) внутри квадранта K_1 . Вообще говоря, при $r < \psi'(a)$ в зависимости от вида функции $\psi(i)$ может быть любое, но обязательно четное число таких точек пересечения, а на фазовой плоскости $-5, 13, 21$ и т. д. состояний равновесия, из которых $3, 7, 11, \dots$ будут узлами, а остальные — седлами, так как сумма индексов Пуанкаре для всех состояний равновесия равна $+1$.

Заметим, что теперь на фазовой плоскости имеются замкнутые контуры, составленные из фазовых траекторий (например, контур ABA_1B_1A на рис. 267, III), но по-прежнему нет замкнутых фазовых траекторий.

²⁾ Вообще говоря, при $r > \psi'(a)$ в зависимости от вида функции $\psi(i)$ может быть любое нечетное число точек пересечения кривых (5.67а) и (5.67б) внутри квадранта K_1 , а на фазовой плоскости $-9, 17, 25$ и т. д. состояний равновесия.

На рис. 268 приведены бифуркационные кривые, разбивающие плоскость параметров системы r и R (или, точнее, первый квадрант этой плоскости) на области, каждая из которых соответствует определенному типу фазового портрета системы (нумерация областей совпадает с нумерацией частей рис. 267, на которых изображены типы фазовых портретов системы). Бифуркационными кривыми будут: 1) прямая $r = \rho$, которая отделяет режим I от режима II; 2) прямая $r + 2R = \rho$, отделяющая область II от области III, и 3) кривая $r = \psi'(a)$, где a определяется уравнением (5.69), — граница области IV, в которой правильный режим работы машин (с отдачей мощности во внешнюю цепь) устойчив. Уравнение последней бифуркационной кривой может быть записано в параметрической форме:

$$r = \psi'(a), \quad R = \frac{1}{2} \left[\frac{\psi(a)}{a} - \psi'(a) \right],$$

где a — параметр, пробегающий значения от 0 до $+\infty$. Нетрудно видеть, что эта кривая проходит через точки $r = \rho$, $R = 0$ (при $a = 0$) и $r = R = 0$ (при $a \rightarrow +\infty$) и лежит под прямой $r + 2R = \rho$.

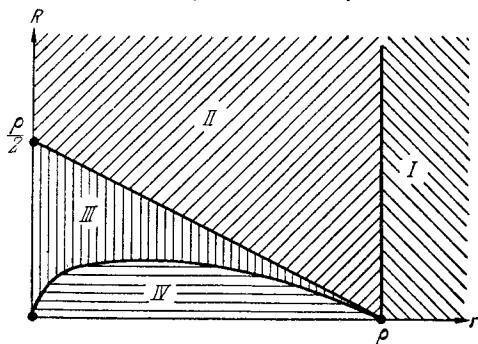


Рис. 268.

На рис. 268 приведены бифуркационные кривые, разбивающие плоскость параметров системы r и R (или, точнее, первый квадрант этой плоскости) на области, каждая из которых соответствует определенному типу фазового портрета системы (нумерация областей совпадает с нумерацией частей рис. 267, на которых изображены типы фазовых портретов системы). Бифуркационными кривыми будут: 1) прямая $r = \rho$, которая отделяет режим I от режима II; 2) прямая $r + 2R = \rho$, отделяющая область II от области III, и 3) кривая $r = \psi'(a)$, где a определяется уравнением (5.69), — граница области IV, в которой правильный режим работы машин (с отдачей мощности во внешнюю цепь) устойчив. Уравнение последней бифуркационной кривой может быть записано в параметрической форме:

$$r = \psi'(a), \quad R = \frac{1}{2} \left[\frac{\psi(a)}{a} - \psi'(a) \right],$$

где a — параметр, пробегающий значения от 0 до $+\infty$. Нетрудно видеть, что эта кривая проходит через точки $r = \rho$, $R = 0$ (при $a = 0$) и $r = R = 0$ (при $a \rightarrow +\infty$) и лежит под прямой $r + 2R = \rho$.

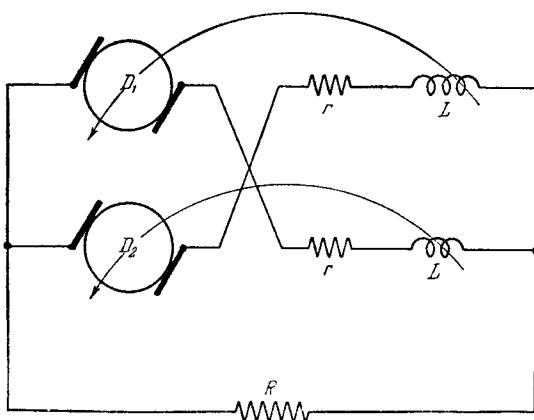


Рис. 269.

Итак, мы видим, что параллельное включение динамомашин последовательного возбуждения на общую нагрузку, выполненное по

схеме, приведенной на рис. 263, нельзя признать правильным, ибо оно допускает устойчивую работу машин самих на себя, а режим работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь устойчив только в ограниченной области параметров (в области IV на рис. 268), в которой существует и устойчив также и режим работы машин самих на себя. Этих недостатков лишена схема перекрестного включения обмоток возбуждения машин, когда обмотка возбуждения одной машины включается последовательно с якорем другой (рис. 269). В этом случае, как легко убедиться (что мы предоставляем читателям), режим работы машин самих на себя как стационарный совсем не существует, а режимы работы машин с отдачей мощности во внешнюю цепь существуют при $r + 2R < \rho$ и устойчивы.

3. Осциллятор с квадратичными членами [20]. Рассмотрим осциллятор, уравнение которого

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -ax + \alpha x^2 - b \frac{dx}{dt} + \beta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

содержит квадратичные члены в выражениях как для силы пружины, так и для силы трения. Это уравнение можно записать в виде следующих двух уравнений первого порядка¹⁾:

$$\frac{dx}{dt} = y = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2 = Q(x, y). \quad (5.72)$$

Покажем, что такой осциллятор не может быть автоколебательной системой при любых значениях параметров (но $b \neq 0$). Для этой цели воспользуемся критерием Дюлака, взяв за множитель $B(x, y)$ функцию $B(x, y) = be^{-\beta x}$. Поскольку, как легко видеть, $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = -b^2 e^{-\beta x} < 0$ при $b \neq 0$, система (5.72) не имеет, согласно критерию Дюлака, не только замкнутых фазовых траекторий, но и замкнутых контуров, составленных из различных фазовых траекторий, и, следовательно, не может быть автоколебательной.

4. Еще один пример неавтоколебательной системы [26]. Докажем, что система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x(ax + by + c) = P(x, y), \\ \dot{y} = y(a'x + b'y + c') = Q(x, y), \end{cases} \quad (5.73)$$

встречающаяся в ряде вопросов нелинейной теории колебаний²⁾, также не имеет предельных циклов. Эта система имеет интегральными прямыми осями координат $x=0$ и $y=0$ и на них три состояния равновесия: $(0, 0)$, $\left(0, -\frac{c'}{b'}\right)$ и $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. Кроме того, если

¹⁾ Не нарушая общности, можно полагать массу $m = 1$.

²⁾ В частности, к этой системе приводит рассмотрение ряда задач об автоколебательных системах с двумя степенями свободы при помощи метода Ван-дер-Поля [112, 176, 177].

$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, имеется еще одно состояние равновесия (x_0, y_0) , не лежащее на осях координат и определяемое системой уравнений:

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Поэтому, если бы система (5.73) имела замкнутую фазовую траекторию, то последняя должна была бы лежать в пределах одного квадранта, содержащего точку (x_0, y_0) , не пересекая ни одной из указанных интегральных прямых, и охватывать состояние равновесия (x_0, y_0) ¹⁾. Но это невозможно, в чем нетрудно убедиться, применив критерий Дюлака. Возьмем в качестве множителя B функцию $B(x, y) = x^{k-1}y^{h-1}$, где k и h — некоторые (пока неопределенные) постоянные. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) &= x^{k-1}y^{h-1} \{ (a + ka + ha')x + \\ &+ (kb + hb' + b')y + kc + hc' \}. \end{aligned}$$

Взяв в качестве постоянных k и h решение системы уравнений

$$ka + ha' + a = 0, \quad kb + hb' + b' = 0,$$

т. е.

$$k = \frac{b'(a' - a)}{\delta} \quad \text{и} \quad h = \frac{a(b - b')}{\delta},$$

получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = B(x, y) \frac{b'c(a' - a) + ac'(b - b')}{\delta} \neq 0$$

в пределах каждого квадранта фазовой плоскости, если только

$$\sigma = b'c(a' - a) + ac'(b - b') \neq 0.$$

Следовательно, согласно критерию Дюлака система (5.73) при $\sigma \neq 0$ не имеет замкнутых фазовых траекторий и, в частности, предельных циклов²⁾.

¹⁾ Ясно, что при $\delta = 0$, когда состояния равновесия (x_0, y_0) не существует, нет и замкнутых фазовых траекторий.

²⁾ Если же $\sigma = 0$, то система уравнений (5.73) является консервативной, имея своим интегралом выражение

$$x^k y^h (ac'x + b'cy + c\varphi') = \text{const};$$

вся область, заключенная между осями координат и прямой $ac'x + b'cy + c\varphi' = 0$ (они являются интегральными прямыми), целиком заполнена замкнутыми фазовыми траекториями, охватывающими состояние равновесия (x_0, y_0) , которое в этом случае является центром.