

## § 10. Исследование поведения фазовых траекторий в удаленных частях плоскости

При исследовании качественной картины фазовых траекторий в конкретных задачах весьма большую роль играет исследование поведения фазовых траекторий в достаточно удаленных частях фазовой плоскости<sup>1)</sup>). Иногда этот вопрос решается весьма просто. Умножим первое уравнение системы (5.1) на  $x$ , второе на  $y$  и сложим. Мы получим тогда:

$$\frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = P(x, y)x + Q(x, y)y = R(x, y).$$

Легко видеть, что если, начиная с некоторых значений  $x$  и  $y$ ,  $R(x, y)$  принимает определенный знак и сохраняет его, какие бы мы значения (достаточно большие по абсолютной величине) ни давали  $x$  и  $y$ , то ответ дается сразу. Именно, мы можем сразу сказать, что все достаточно большие круги с центром в начале координат служат циклами без прикосновения и что знак  $R(x, y)$  (для достаточно больших  $x, y$ ) определяет, будет ли бесконечность устойчива или неустойчива. Однако, вообще говоря, такой элементарный прием не дает ответа [ $R(x, y)$  не сохраняет определенного знака], и вопрос требует специального исследования.

Таким образом возникает задача исследования хода фазовых траекторий в бесконечно удаленных частях плоскости. Кажется, что можно просто решить задачу, совершив замену переменных, которая перевела бы бесконечно удаленную часть плоскости в конечную.

Этого, например, можно достичь с помощью преобразования Бендиクсона:

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}; \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}; \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (5.74)$$

которое переводит бесконечно удаленные точки плоскости  $x, y$  в начало координат плоскости  $u, v$ . Геометрически это преобразование есть так называемое преобразование обратными радиусами (рис. 270).

<sup>1)</sup> Заметим, что здесь мы не коснемся ряда вопросов, представляющих интерес для общей теории, например вопроса о совместном существовании особых точек различных типов на сфере Пуанкаре, вопроса об изображении траекторий на проективной плоскости и т. д.

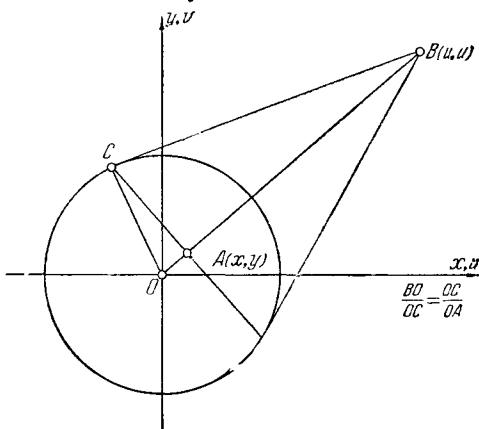


Рис. 270.

Соблюсти верное направление по траекториям при этом не-  
трудно — достаточно провести преобразование не для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

а для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Однако, несмотря на кажущуюся простоту, преобразование Бенди-  
сона приводит обычно к сложной особой точке высокого порядка в  
начале координат плоскости  $u, v$ , так как каждая интегральная кри-  
вая плоскости  $x, y$ , уходившая в бесконечность (или выходившая из  
нее), преобразуется в интегральную кривую, входящую (выходящую)  
в начало координат плоскости  $u, v$ . Так как исследование сложных  
особых точек высокого порядка обычно бывает весьма сложно, то  
способ Бендиексона применим лишь в очень редких случаях<sup>1)</sup>.

Поэтому вместо преобразования Бендиексона значительно удоб-  
нее пользоваться более сложным по идеи, но приводящим к более

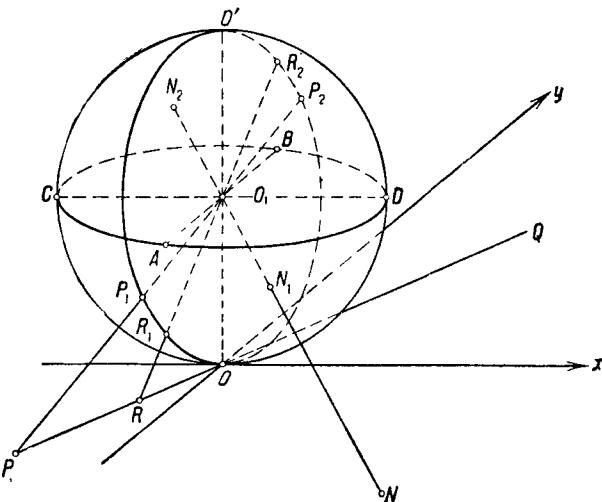


Рис. 271.

простым выкладкам преобразованием Пуанкаре [181]. Геометрическая основа преобразования Пуанкаре заключается в отображении пло-  
скости  $x, y$  на сферу радиуса 1, касающуюся плоскости  $x, y$  в на-  
чале координат (рис. 271). При этом точке  $N$  плоскости  $x, y$  будем

<sup>1)</sup> Заметим, что, вообще говоря, и преобразование Бендиексона и приво-  
дящее к более простым выкладкам преобразование Пуанкаре целесообразно  
использовать лишь в тех случаях, когда  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — многочлены  
по  $x, y$ .

ставить в соответствие только одну точку сферы  $N_1$ , лежащую на полупрямой  $O_1N$ , проходящей через центр сферы, т. е. лежащую на нижнем (южном) полушарии. На экватор (большой круг, параллельный плоскости  $x, y$ ) отображаются бесконечно удаленные точки плоскости. По определению преобразования ясно, что прямые линии плоскости  $x, y$  перейдут в большие круги сферы, причем прямые, проходящие через начало координат, перейдут в большие круги, перпендикулярные к экватору. Например, прямая  $PR$  отображается на большой круг сферы, проходящий через точки  $P_1R_1$ . Интегральные кривые плоскости перейдут в соответственные кривые сферы, причем седла, узлы и фокусы сохраняют тот же вид. Однако на сфере появятся новые особые точки, лежащие на экваторе. Например, через точку  $C$  (и точку  $D$ ) будут проходить все те интегральные кривые (точнее, их изображения), для которых  $y \rightarrow 0$  при неограниченном удалении от начала, а через точку  $A$  (и  $B$ ) — те, для которых соответственно  $y \rightarrow \pm\infty$ . Таким образом, *особые точки экватора могут не быть точками пересечения кривых  $P(x, y) = 0$  и  $Q(x, y) = 0$* , но определяются (и определяют собой) поведением интегральных кривых при неограниченном удалении от начала. Отсюда следует удобство этого изображения для определения хода кривых в бесконечности.

Остается выяснить вопрос об аналитическом аппарате, переводящем точки плоскости в точки сферы. Использование координат на сфере (долгот и широт) представляется неудобным, так как формулы перехода недостаточно просты и выражаются не алгебраически (благодаря чему можно излишне усложнить простое уравнение).

Поэтому Пуанкаре употребляет такие формулы преобразования:

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{\tau}{z}. \quad (5.75)$$

Очевидно, что  $\tau = \frac{y}{x}$  есть тангенс направления на исследуемую точку. Координатные линии  $z = \text{const}$  и  $\tau = \text{const}$  суть на плоскости прямые, параллельные оси  $y$ , и прямые, проходящие через начало координат. На сфере же они являются большими кругами, проходящими через диаметр  $AB$  ( $z = \text{const}$ ) или  $OO'$  ( $\tau = \text{const}$ ). Очевидно, что эти круги не будут взаимно перпендикулярны. Только в окрестности экватора ( $z = 0$ ), за исключением малых кусков вблизи точек  $A$  и  $B$ , можно считать, что они перпендикулярны. Можно построить плоскость, на которой  $z$  и  $\tau$  будут служить прямоугольными декартовыми координатами: это будет касательная плоскость к сфере, проходящая через исследуемую точку на экваторе. Ось  $\tau$  будет прямой, лежащей в плоскости экватора и направленной в сторону положительной оси  $y$ . Ось  $z$  пойдет вертикально вниз. Точки этой плоскости  $\tau, z$  получим, проектируя точки сферы из ее центра  $O_1$ . Очевидно, что на этой плоскости  $\tau, z$  будет удобно изучать все

бесконечные точки плоскости  $x, y$ , кроме «концов» оси  $y$ , изображаемых на сфере точками  $A$  и  $B$ , и их окрестностей. Для рассмотрения этих точек придется сделать другое преобразование:

$$y = \frac{1}{z}, \quad x = \frac{\tau}{z}. \quad (5.76)$$

Все чертежи будут аналогичны, и ясно, что совокупность обоих преобразований даст поведение интегральных кривых вблизи экватора. Окончательно мы можем получить ясное представление о ходе интегральных кривых, рассматривая из точки  $O_1$  нижнее (южное) полушарие сферы. Проектируя затем нижнее полушарие при помощи ортогональной проекции на касательную плоскость к нижнему (южному) полюсу, можем весь ход интегральных кривых очень удобно отобразить на внутренности круга. Преобразуем теперь исходное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

к координатам Пуанкаре  $x = \frac{1}{z}$  и  $y = \frac{\tau}{z}$ . Имеем:

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad dy = \frac{z d\tau - \tau dz}{z^2}$$

и

$$\frac{dz}{dt} = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)z^2, \quad \frac{d\tau}{dt} = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)\tau z + Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)z \quad (5.77)$$

или, наконец, деля одно на другое, исключаем время:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-z}{\frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} - \tau}. \quad (5.78)$$

Чтобы исследовать бесконечно удаленные точки, лежащие у «концов» оси  $y$ , нужно, как мы уже говорили, воспользоваться преобразованием (5.76). В этом случае уравнения (5.77) и (5.78) принимают соответственно вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)z^2, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)\tau z + P\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{-z}{\frac{P\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)} - \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (5.79)$$

Из (5.78) видно, что если не имеет места тождество  $Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right) \equiv \tau P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)$ , то экватор, определенный уравнением  $z=0$ , есть интегральная кривая. В случае, если  $Q=\tau P$ , решение будет  $\tau=\text{const}$ , и, следовательно, все интегральные кривые пересекают под прямым углом экватор. Особые точки, лежащие на экваторе, определяются соотношениями  $z=0$ ,  $\frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} = \tau$ . Особые точки, лежащие у «концов» оси  $y$ , должны быть исследованы по уравнениям (5.79). Такая особая точка ( $z=0, \tau=0$ ) существует, если одновременно выполнены условия:

$$z=0, \quad \frac{P\left(0, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(0, \frac{1}{z}\right)} = 0. \quad (5.80)$$

Исследование характера и устойчивости найденных таким образом бесконечно удаленных особых точек производится обычным методом.

Для примера рассмотрим случай простого линейного осциллятора с трением, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$\frac{dy}{dt} = -hy - \omega_0^2 x = Q(x, y); \quad \frac{dx}{dt} = y = P(x, y).$$

После преобразования Пуанкаре (5.75) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = \tau z, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\tau^2 - h\tau - \omega_0^2, \quad (5.81)$$

и бесконечно удаленные особые точки определяются соотношениями:

$$z=0, \quad \tau^2 + h\tau + \omega_0^2 = 0,$$

откуда

$$\tau = -\frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (5.82)$$

Легко убедиться, что особых точек, лежащих на «концах» оси  $y$ , не существует. Действительно:

$$\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{h}{z}} = -\frac{1}{h} \neq 0.$$

Так как экватор есть интегральная кривая, то возможны два случая: либо экватор есть предельный цикл ( $\frac{h^2}{4} < \omega_0^2$  и бесконечно

удаленных особых точек нет), который, очевидно, будет устойчив, если  $h < 0$ , и неустойчив, если  $h > 0$ ; либо, наконец, на экваторе существуют четыре особые точки, попарно диаметрально противоположные расположенные, угловые коэффициенты направления которых даются выражениями:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2} < 0; \\ \tau_2 &= -\frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2} < 0.\end{aligned}$$

Этот случай будет иметь место, если

$$\frac{h^2}{4} > \omega_0^2.$$

Для определения устойчивости особых точек положим

$$z = \xi, \quad \tau = \tau_i + \eta.$$

Подставляя эти значения в уравнения (5.81), имеем:

$$\frac{dz}{dt} = -(\tau_i + \eta)\xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = -(\tau_i + \eta)^2 - h(\tau_i + \eta) - \omega_0^2,$$

или, наконец, пренебрегая членами высших порядков:

$$\frac{dz}{dt} = -\tau_i \xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = -2\tau_i \eta - h\eta. \quad (5.83)$$

Характеристические показатели  $\lambda$  определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} -\tau_i - \lambda & 0 \\ 0 & -2\tau_i - h - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = -\tau_i, \quad \lambda_2 = -2\tau_i - h.$$

Итак,  $\lambda_1$  всегда положительно, т. е. особые точки в бесконечности все неустойчивы. Так как  $\lambda_2$  для  $\tau_1$  равно  $-2\sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2}$ , то точка  $\tau_1$  есть седло; так как  $\lambda_2$  для  $\tau_2$  равно  $+2\sqrt{\frac{h^2}{4} - \omega_0^2}$ , то  $\tau_2$  есть неустойчивый узел. На рис. 272 изображено поведение интегральных кривых в бесконечности для случая  $\frac{h^2}{4} < \omega_0^2$ . На рис. 273 изображена та же ортогональная проекция сферы на плоскость, касающуюся сферы в нижней точке, для случая  $\frac{h^2}{4} > \omega_0^2$ .

Исследование бесконечности иногда позволяет однозначно ответить на вопрос о существовании в рассматриваемой системе предельного цикла. Действительно, пусть мы знаем, что бесконечность абсолютно неустойчива. Тогда, если единственная особая точка на конечном расстоянии — неустойчивый узел или фокус, то, поскольку фазовые траектории не могут пересекаться, непременно должен быть хотя бы один устойчивый предельный цикл (строгое доказательство этого утверждения, весьма важного для качественного

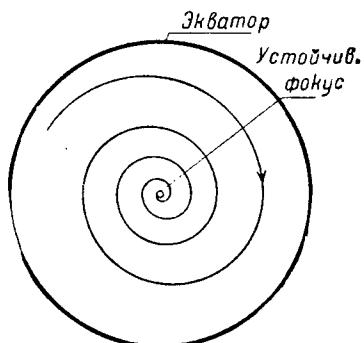


Рис. 272.

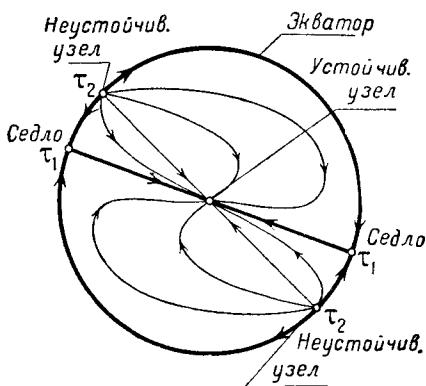


Рис. 273.

исследования динамических систем с одной степенью свободы, будет дано в следующей главе).

Покажем применение этого приема в конкретном физическом случае, доказав существование предельного цикла для простейшей автоколебательной схемы с колебательным контуром в цепи сетки (см. подробнее гл. VII).

Уравнение Кирхгофа для напряжения на конденсаторе колебательного контура, как мы видели в § 6 гл. I (см. уравнение (1.64)), имеет вид:

$$CL \frac{d^2u}{dt^2} + [RC - MS(u)] \frac{du}{dt} + u = 0,$$

где  $S = S(u)$  — крутизна характеристики лампы (мы будем ниже полагать, что  $S \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \infty$ ). Это уравнение колебаний может быть приведено к двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{u}{LC} - \frac{1}{LC} [RC - MS(u)] y. \quad (5.84)$$

Полагая в соответствии с (5.75)  $u = \frac{1}{z}$ ,  $y = \frac{\tau}{z}$ , получим:

$$\frac{dz}{dt} = -\tau z, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\tau^2 - \frac{1}{CL} \left[ RC - MS\left(\frac{1}{z}\right) \right] \tau - \frac{1}{CL}. \quad (5.85)$$

Эта система имеет те же состояния равновесия (и того же характера), что и система (5.81) при  $h = \frac{R}{L}$  и  $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$  (в силу нашего предположения, что  $S \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  или  $z \rightarrow 0$ ). Следовательно, поведение фазовых траекторий исходной системы в бесконечности должно быть совершенно такое же, как у осциллятора с частотой  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  и затуханием  $\frac{R}{L}$ , а такой случай мы только что исследовали и знаем, что бесконечность в этом случае неустойчива. Поэтому, если единственная особая точка, находящаяся на конечном расстоянии, неустойчива,

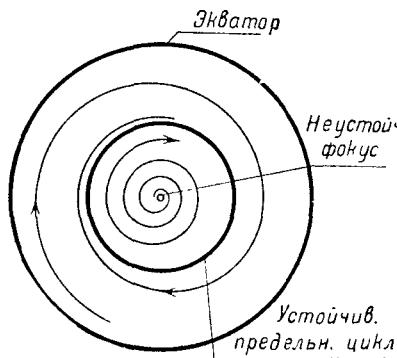


Рис. 274.

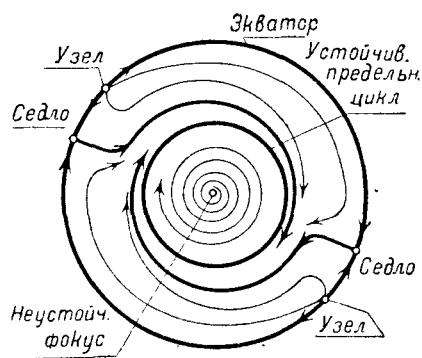


Рис. 275.

то уравнение лампового генератора обязательно имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Ориентировочный, с точностью до четного числа циклов (полустойчивый цикл считается за два) вид проекций сферы Пуанкаре на плоскость, касающуюся сферы в нижней точке, изображен на рис. 274 и 275.

Итак, исследуя поведение интегральных кривых в удаленных частях плоскости, мы доказали, что уравнение лампового генератора имеет по крайней мере один предельный цикл. Прежде всего сам собой напрашивается вопрос: какой смысл этого доказательства, для чего оно нужно? Ведь известно, что в ламповом генераторе при рассматриваемых нами условиях происходят колебания, зачем же это доказывать? Но мы ведь вовсе не имели в виду доказывать, что в реальном ламповом генераторе происходят колебания. Мы доказали только, что та математическая модель, которая соответствует нашему идеализированному генератору, допускает устойчивый периодический процесс. Если бы оказалось, что наше уравнение не имеет предельного цикла, это значило бы, что мы не учли какого-нибудь существенного обстоятельства, обуславливающего возможность непрерывных автоколебаний в реальной системе, и наша идеализация, следовательно,

не пригодна. Физическая ценность всякого строгого рассмотрения и, в частности, строгого решения вопроса о существовании предельных циклов именно в том и заключается, что сопоставление результатов этого рассмотрения с данными опыта позволяет судить, насколько целесообразна наша исходная идеализация, не упущены ли те или иные существенные для рассматриваемого вопроса моменты. При нестрогом же рассмотрении мы никогда не можем знать, что именно является причиной несоответствия между теорией и опытом: неправильная исходная идеализация или допущенные при рассмотрении нестрогости. Однако физическая ценность нашего рассмотрения, несмотря на его математическую безупречность, все же невелика. Действительно, ведь исследуемое нами уравнение имеет физический смысл, т. е. достаточно точно описывает поведение реальной системы, только если токи и напряжения в системе не слишком велики. Ведь когда мы, например, принимаем, что для достаточно больших значений имеет место насыщение, то нельзя это утверждение экстраполировать для значений сколь угодно больших, ибо при очень больших напряжениях появляются, например, большие сеточные токи, которыми мы пренебрегли, и ряд других обстоятельств, не учтенных нами. Поэтому, если мы строго убедились в существовании предельного цикла, то, чтобы выяснить физическую ценность этого утверждения, необходимо хотя бы приблизительно определить место предельного цикла на фазовой плоскости, с тем чтобы убедиться, что он лежит в области, для которой наша идеализация еще справедлива.

### § 11. Оценка месторасположения предельных циклов<sup>1)</sup>

Для качественного исследования динамической системы с одной степенью свободы, описываемой уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

т. е. для выяснения возможных типов ее движений, как мы увидим в гл. VI, нет надобности находить все фазовые траектории. Для этой цели достаточно найти лишь некоторые, основные фазовые траектории — траектории, определяющие качественный характер фазового портрета. Именно, нужно знать число, характер и взаимное расположение состояний равновесия (особых точек) и предельных циклов, а также ход сепаратрис (усов седел). Знания этих основных, определяющих качественную картину траекторий достаточно для доведения до конца качественного исследования динамической системы типа (5.1).

Вопрос о существовании состояний равновесия и их характере решается сравнительно простыми приемами, изложенными в §§ 2 и 4 настоящей главы. В то же время до сих пор нет общих методов решения вопросов о существовании предельных циклов, определения

<sup>1)</sup> Написано Н. А. Железзовым.