

не пригодна. Физическая ценность всякого строгого рассмотрения и, в частности, строгого решения вопроса о существовании предельных циклов именно в том и заключается, что сопоставление результатов этого рассмотрения с данными опыта позволяет судить, насколько целесообразна наша исходная идеализация, не упущены ли те или иные существенные для рассматриваемого вопроса моменты. При нестрогом же рассмотрении мы никогда не можем знать, что именно является причиной несоответствия между теорией и опытом: неправильная исходная идеализация или допущенные при рассмотрении нестрогости. Однако физическая ценность нашего рассмотрения, несмотря на его математическую безупречность, все же невелика. Действительно, ведь исследуемое нами уравнение имеет физический смысл, т. е. достаточно точно описывает поведение реальной системы, только если токи и напряжения в системе не слишком велики. Ведь когда мы, например, принимаем, что для достаточно больших значений имеет место насыщение, то нельзя это утверждение экстраполировать для значений сколь угодно больших, ибо при очень больших напряжениях появляются, например, большие сеточные токи, которыми мы пренебрегли, и ряд других обстоятельств, не учтенных нами. Поэтому, если мы строго убедились в существовании предельного цикла, то, чтобы выяснить физическую ценность этого утверждения, необходимо хотя бы приблизительно определить место предельного цикла на фазовой плоскости, с тем чтобы убедиться, что он лежит в области, для которой наша идеализация еще справедлива.

§ 11. Оценка месторасположения предельных циклов¹⁾

Для качественного исследования динамической системы с одной степенью свободы, описываемой уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

т. е. для выяснения возможных типов ее движений, как мы увидим в гл. VI, нет надобности находить все фазовые траектории. Для этой цели достаточно найти лишь некоторые, основные фазовые траектории — траектории, определяющие качественный характер фазового портрета. Именно, нужно знать число, характер и взаимное расположение состояний равновесия (особых точек) и предельных циклов, а также ход сепаратрис (усов седел). Знания этих основных, определяющих качественную картину траекторий достаточно для доведения до конца качественного исследования динамической системы типа (5.1).

Вопрос о существовании состояний равновесия и их характере решается сравнительно простыми приемами, изложенными в §§ 2 и 4 настоящей главы. В то же время до сих пор нет общих методов решения вопросов о существовании предельных циклов, определения

¹⁾ Написано Н. А. Железзовым.

их числа и хотя бы приближенного места расположения. Исключение составляют системы, близкие к консервативным (в частности, к гармоническому осциллятору), системы с «кусочно-линейными» уравнениями, а также системы с разрывными колебаниями, для которых все эти вопросы могут быть решены при количественном исследовании (см. гл. VIII, IX и X). Поэтому для каждого типа задачи приходится изобретать специальные методы, а в крайнем случае прибегать к численному интегрированию или графическому интегрированию при помощи метода изоклин. Последние методы, конечно, обычно приводят к цели, однако их неудобства заключаются в том, что параметрам приходится давать численное значение. Между тем часто особенно интересным является зависимость характера движения от параметров системы, которых может быть несколько.

Один из наиболее часто применяемых приемов исследования предельных циклов (доказательства существования и определения их месторасположения) состоит в построении на фазовой плоскости

циклов без контакта, на которых вектор скорости изображающей точки направлен либо везде наружу, либо везде внутрь области, ограниченной этой кривой.



Если на какой-нибудь замкнутой кривой вектор скорости изображающей точки направлен по одну сторону кривой, кроме некоторого числа точек, где он касается, то, очевидно, в этих точках мы имеем дело с соприкосновением четного порядка (рис. 276), при котором фазовая траектория пересекает нашу кривую (и в том же направлении, что и соседние). С интересующей нас точки зрения такая кривая принципиально ничем не отличается от цикла без контакта, поэтому такие замкнутые кривые с отдельными точками соприкосновения четного порядка мы будем также включать в класс циклов без контакта.

Если внутри такого цикла без прикосновения нет устойчивых особых точек и вектор скорости на нем везде направлен внутрь, то мы можем сказать, что существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл, заключенный внутри нашего цикла без прикосновения. Точно так же, если бесконечность неустойчива и существует цикл без прикосновений, на котором вектор скорости направлен везде наружу и вне которого нет устойчивых особых точек, то существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл, расположенный в области, лежащей вне цикла без прикосновений. Аналогичные рассуждения можно привести для исследования неустойчивых предельных циклов, только в этом случае нужно рассматривать противоположное направление вектора скорости¹⁾.

¹⁾ Эти утверждения, а также утверждения, которые будут приведены ниже, геометрически достаточно очевидны. Строгое доказательство этих утверждений основано на общей теории поведения фазовых траекторий (см. гл. VI).

Если при помощи двух циклов без контакта удается выделить на фазовой плоскости кольцеобразную (двусвязную) область, не содержащую внутри себя состояний равновесия, то можно сделать определенные заключения о существовании в ней предельных циклов. Именно, если вектор скорости изображающей точки на этих циклах без контакта направлен внутрь кольцеобразной области, заключенной между ними, точнее, нигде не направлен наружу, то в этой кольцеобразной области существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл (вообще же существует нечетное число предельных циклов, из них устойчивых на один больше, чем неустойчивых). Если вектор скорости на обоих циклах без контакта везде направлен наружу (или, точнее, нигде не направлен внутрь), то существует по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, заключенный в этой кольцеобразной области (в общем случае в этой области имеется нечетное число предельных циклов, из которых неустойчивых циклов на один больше, чем устойчивых). Если же, наконец, вектор скорости изображающей точки на одном цикле без контакта направлен всюду вне, а на другом — всюду внутрь кольцеобразной области, ограниченной ими, то в этой области предельных циклов либо нет совсем, либо имеется четное число (из них половина устойчивых)¹⁾.

Число предельных циклов в таких кольцеобразных областях, конечно, не определяется соображениями, приведенными выше. В некоторых случаях удается доказать единственность (или отсутствие) предельного цикла в данной кольцеобразной области, пользуясь *критерием Дюлака для кольцеобразной области* [148]: динамическая система (5.1) не может иметь более одной замкнутой фазовой траектории (или более одного замкнутого контура, составленного из траекторий) в кольцеобразной области (G), если в этой области выражение

$$\frac{\partial}{\partial x} (BP) + \frac{\partial}{\partial y} (BQ),$$

где $B(x, y)$ — некоторая функция, непрерывная и с непрерывными производными (первого порядка) в области (G), знакоопределенно. Здесь речь идет о фазовых траекториях, содержащих внутри себя внутреннюю границу кольцевой области. Ясно, что в области (G) не может быть замкнутых фазовых траекторий, которые непрерывной деформацией могли бы быть стянуты в точку без выхода за пределы области (G). Таких траекторий не может быть в силу критерия Дюлака, доказанного ранее в § 9.

Для доказательства критерия допустим, что система (5.1) имеет в кольцеобразной области (G) две замкнутые фазовые траектории

¹⁾ Доказательство этих утверждений приведено в гл. VI, § 2 (см. теорему V).

(или два замкнутых контура, составленных из траекторий) $abca$ и $a_1b_1c_1a_1$, содержащих внутри себя внутреннюю границу области (G) (рис. 277). Тогда для замкнутого контура $abcaa_1c_1b_1a_1a$

$$\oint B(P dy - Q dx) = 0. \text{ Но согласно теореме Грина } \oint B(P dy - Q dx) = \iint_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (BP) + \frac{\partial}{\partial y} (BQ) \right] dx dy,$$

интегрирование ведется по области (Σ), заключенной между замкнутыми кривыми $abca$ и $a_1b_1c_1a_1$. Таким образом,

$$\iint_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (BP) + \frac{\partial}{\partial y} (BQ) \right] dx dy$$

должен равняться нулю, что противоречит знакопостоянству подинтегрального выражения в области (Σ), которая является частью области (G).

Следовательно, в области (G) не может быть более одной замкнутой фазовой траектории системы (5.1). Очевидно, критерий сохраняет силу и в тех случаях, когда выражение $\frac{\partial}{\partial x} (BP) + \frac{\partial}{\partial y} (BQ)$ знакопостоянно в области (G) всюду, кроме некоторых точек или кривых, где оно обращается в нуль.

Как мы уже говорили, общих, регулярных методов для отыскания циклов без контакта не существует. В некоторых задачах удается найти такие циклы без контакта среди кривых, принадлежащих к заданному семейству простых замкнутых кривых (например, среди окружностей с центром в начале координат). Пусть

$$F(x, y) = C \quad (5.86)$$

— уравнение семейства простых замкнутых кривых, сплошь заполняющих фазовую плоскость, среди которых мы намереваемся искать циклы без контакта для динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.1)$$

Будем полагать, что каждой кривой семейства (5.86) (это семейство кривых часто называют, следуя Пуанкаре, топографической системой кривых) соответствует единственное C и что кривая с заданным C содержит внутри себя все кривые с меньшими C (таким образом, при увеличении C «размеры» кривых (5.86) увеличиваются). При движении изображающей точки по некоторой фазовой траектории она будет пересекать кривые топографической системы (5.86). При

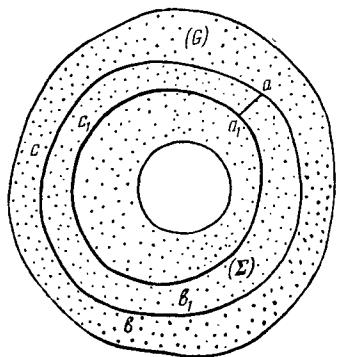


Рис. 277.

таком движении, очевидно,

$$\frac{dC}{dt} = F'_x(x, y)P(x, y) + F'_y(x, y)Q(x, y) = \Phi(x, y),$$

и циклами без контакта являются все кривые топографической системы, на которых функция $\Phi(x, y)$ знакоопределенна. Именно, если на некоторой кривой топографической системы $\Phi(x, y) \leq 0$, то эта кривая является циклом без контакта, причем в силу нашего предположения об увеличении «размеров» кривых при увеличении C все

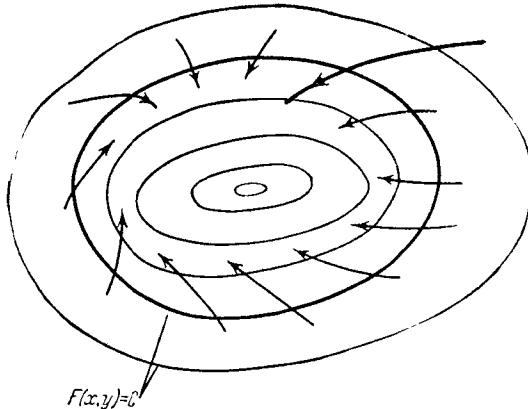


Рис. 278.

фазовые траектории, пересекающие эту кривую, идут (при увеличении t) в область, лежащую внутри нее (рис. 278). Точно также, если на некоторой кривой семейства (5.86) $\Phi(x, y) \geq 0$, то фазовые траектории пересекают эту кривую, выходя в область вне ее. Ясно также, что в кольцеобразных областях, в которых функция $\Phi(x, y)$ знакопостоянна, предельных циклов (и вообще замкнутых фазовых траекторий) быть не может. Предельные циклы могут существовать только в тех кольцеобразных областях, в которых функция $\Phi(x, y)$ знакопеременна.

Несколько иной формой того же метода отыскания кривых без контакта является так называемый метод контактной кривой, принадлежащий Пуанкаре [181, 108]. Контактной кривой Пуанкаре называют ту кривую, в точках которой фазовые траектории системы (5.1) касаются кривых заданной топографической системы (5.86). Ее уравнением, очевидно, является

$$\frac{P}{Q} = -\frac{F'_y}{F'_x},$$

или $PF'_x + QF'_y = 0$. Если топографическая система выбрана так, что кривая контактов замкнутая, то мы можем провести наибольшую и наименьшую кривые топографической системы, касающиеся контактной

кривой. Тогда все кривые топографической системы, лежащие вне такой наибольшей кривой и внутри наименьшей кривой, являются циклами без контакта и предельные циклы, если они существуют, расположены в кольцеобразной области, ограниченной этими двумя кривыми топографической системы и содержащей контактную кривую.

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим два примера качественного исследования динамических систем. В качестве первого примера рассмотрим уравнения:

$$\frac{du}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{u}{LC} - \frac{1}{LC} [RC - MS(u)]y, \quad (5.84)$$

описывающие колебания лампового генератора при обычных упрощающих предположениях, причем будем полагать, что крутизна характеристики лампы $S(u)$ является функцией четной и монотонно убывающей при увеличении $|u|$. Возьмем в качестве топографической системы семейство эллипсов $LCy^2 + u^2 = A^2$, тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d(A^2)}{dt} = [MS(u) - RC]y^2 = \Phi(u, y).$$

Если $MS(0) < RC$ (условия самовозбуждения генератора не выполнены), то на всей фазовой плоскости $\Phi(u, y) \leq 0$ и, следовательно, $\frac{d(A^2)}{dt} \leq 0$, т. е. все фазовые траектории приближаются к началу координат — устойчивому состоянию равновесия. Если же $MS(0) > RC$, то единственное состояние равновесия $(0, 0)$ неустойчиво, и, кроме того, существует такой отрезок $|U| \leq U_0$, на котором $MS(u) - RC \geq 0$. Поэтому все эллипсы с $A \leq u_0$ являются циклами без контакта, так как на них $\Phi(u, y) \geq 0$; фазовые траектории пересекают их, выходя в область, лежащую вне эллипса $LCy^2 + u^2 = u_0^2$. Следовательно, в области внутри этого эллипса нет предельных циклов¹⁾. По крайней мере один устойчивый предельный цикл лежит вне эллипса $LCy^2 + u^2 = u_0^2$, ибо там нет состояний равновесия и бесконечность, как мы видели (в предположении, что $S(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$), неустойчива.

В качестве второго примера мы дадим полное качественное исследование динамической системы [19]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy - y(x^2 + y^2), \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

к которой приводится задача о синхронизации лампового генератора при решении ее методом Ван-дер-Поля [190, 7].

Прежде всего фазовый портрет симметричен относительно начала координат, так как уравнения (5.87) инвариантны относительно замены

¹⁾ Отсутствие предельных циклов внутри эллипса $LCy^2 + u^2 = u_0^2$ при $MS(0) > RC$ и на всей фазовой плоскости при $MS(0) < RC$, как нетрудно видеть, вытекает из критерия Бендиクсона.

переменных x, y на $-x, -y$. Далее, уравнение интегральных кривых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy - y(x^2 + y^2)}{ax + by - x(x^2 + y^2)},$$

которое получается в результате деления второго из уравнений (5.87) на первое, имеет своими интегральными кривыми прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$, где k_1, k_2 — корни квадратного уравнения $bk^2 + (a-d)k - c = 0$, т. е.

$$k_{1,2} = \frac{d-a \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b}$$

(конечно, при условии, что дискриминант уравнения $\delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$). Из уравнений (5.87) также следует, что бесконечность абсолютно неустойчива, т. е. что изображающая точка в далеких частях фазовой плоскости (при возрастании t) движется по направлению к началу координат. В этом легко убедиться, заметив, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = ax^2 + (b+c)xy + dy^2 - (x^2 + y^2)^2 < 0$$

при достаточно больших $x^2 + y^2$.

Состояниям равновесия системы соответствуют особые точки на фазовой плоскости — точки, удовлетворяющие уравнениям:

$$ax + by - x(x^2 + y^2) = 0, \quad cx + dy - y(x^2 + y^2) = 0.$$

Корнями этой системы уравнений являются $x = 0, y = 0$ и

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a + bk_{1,2}}{1 + k_{1,2}^2}}, \quad y_{1,2} = \pm k_{1,2} \sqrt{\frac{a + bk_{1,2}}{1 + k_{1,2}^2}}.$$

Таким образом, в конечной части плоскости x, y может быть в зависимости от параметров уравнений (5.87) одно, или три, или пять состояний равновесия. Состояние равновесия $(0, 0)$ существует всегда, и его характер определяется коэффициентами

$$\sigma = -(a+d) \text{ и } \Delta = ad - bc$$

характеристического уравнения $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$ (заметим, что дискриминантом последнего является выражение δ , введенное ранее). Другие состояния равновесия, если они существуют, лежат на интегральных прямых $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$ и поэтому могут быть только узлами или седлами¹).

¹⁾ Числители $a + bk_{1,2}$ в подкоренных выражениях для координат особых точек, лежащих вне начала координат, как нетрудно видеть, являются корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$. Поэтому особых точек вне начала координат не существует, если точка $(0, 0)$ является фокусом или устойчивым узлом; вне начала координат имеются две особые точки, если $(0, 0)$ — седло (уравнение $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$ имеет только один положительный корень); если же точка $(0, 0)$ — неустойчивый узел, то вне начала координат имеются четыре особые точки.

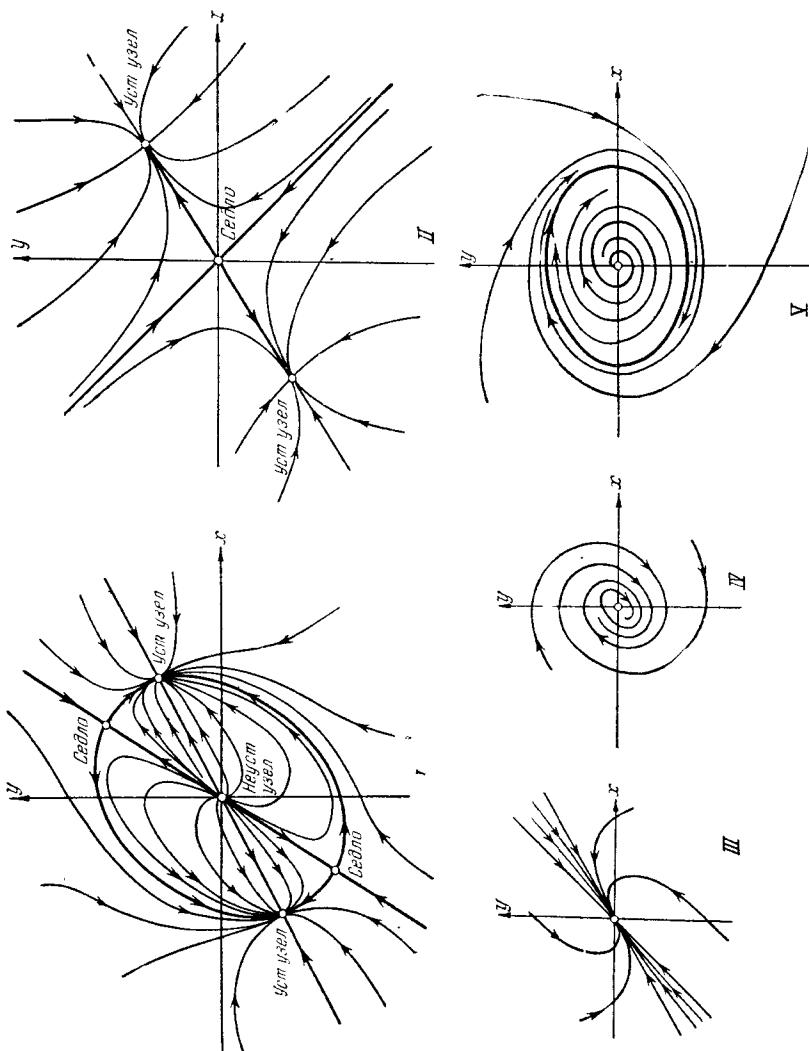


Рис. 279.

Очевидно, возможны следующие случаи:

I. $\delta > 0$, $\Delta > 0$, $\sigma < 0$. В этом случае на фазовой плоскости (рис. 279, I) имеются пять особых точек (состояний равновесия): $(0,0)$ — неустойчивый узел и вне начала координат — два седла и два устойчивых узла. Предельных циклов нет, поскольку через все особые точки проходят интегральные прямые, простирающиеся в бесконечность. Для доказательства сделанных выше утверждений относительно характера особых точек, лежащих вне начала координат, достаточно вспомнить, что бесконечность абсолютно неустойчива и, следовательно, сумма индексов Пуанкаре для всех особых точек равна $+1$. Поэтому четыре особых точки вне начала координат не могут быть все седлами или узлами, две из них являются седлами и две — узлами, причем последние — обязательно устойчивые узлы в силу неустойчивости бесконечности.

II. $\delta > 0$, $\Delta < 0$. Теперь (рис. 279, II) начало координат — седло, а вне начала координат имеются два устойчивых узла. Предельных циклов по-прежнему нет (доказательство этих утверждений полностью аналогично проведенному выше).

III. $\delta > 0$, $\Delta > 0$, $\sigma > 0$. На фазовой плоскости (рис. 279, III) имеется единственное состояние равновесия — устойчивый узел $(0,0)$, к которому асимптотически приближаются все фазовые траектории. Через узел проходят две интегральные прямые $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$, поэтому предельных циклов не существует.

IV. $\delta < 0$, $\sigma > 0$. Единственным состоянием равновесия является устойчивый фокус $(0,0)$. Предельных циклов, как мы покажем ниже, не существует, поэтому (рис. 279, IV), как и в предыдущем случае, все траектории приближаются (при $t \rightarrow +\infty$) к началу координат.

V. $\delta < 0$, $\sigma < 0$. В этом случае единственное состояние равновесия — начало координат — является неустойчивым фокусом; так как бесконечность неустойчива, то на фазовой плоскости имеется по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Покажем, пользуясь критерием Дюлака, что при $\delta < 0$ на фазовой плоскости не может быть более одного предельного цикла (тем самым мы докажем и отсутствие предельных циклов в предыдущем случае, так как если бы предельные циклы в случае IV существовали, то их было бы обязательно четное число). Возьмем в качестве множителя $B(x, y)$ функцию

$$B(x, y) = \frac{1}{by^2 - cx^2 + (a - d)xy},$$

которая в силу условия $\delta = (a - d)^2 + 4bc < 0$ всюду, кроме начала координат, непрерывна вместе со своими производными и, следовательно, знакопределена. Тогда, если обозначить через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ правые части уравнения (5.87), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = -2(x^2 + y^2)B(x, y);$$

это выражение не меняет знака в кольцеобразной области, которая получается из фазовой плоскости исключением сколь угодно малой окрестности начала координат. Таким образом, в рассматриваемом случае предельный цикл один, и разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории имеет вид, изображенный на рис. 279, V (все фазовые траектории асимптотически при $t \rightarrow \infty$ приближаются к этому предельному циклу).

Для определения границ, в которых расположен предельный цикл в случае V, возьмем в качестве топографической системы семейство окружностей

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Как мы уже видели,

$$\frac{1}{2} \frac{d(R^2)}{dt} = ax^2 + (b + c)xy + dy^2 - (x^2 + y^2)^2$$

или в полярных координатах

$$\frac{1}{2} \frac{d(R^2)}{dt} = \frac{R^2}{2} [a + d + (a - d) \cos 2\varphi + (b + c) \sin 2\varphi] - R^4.$$

Нетрудно видеть, что

$$R_1^2 \leq a + d + (a - d) \cos 2\varphi + (b + c) \sin 2\varphi \leq R_2^2,$$

где

$$R_1^2 = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + (b + c)^2}}{2}$$

и

$$R_2^2 = \frac{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + (b + c)^2}}{2}.$$

Поэтому при $(a + d)^2 > (a - d)^2 + (b + c)^2$ (или, что то же самое, при $4ad > (b + c)^2$) циклами без контакта являются все окружности с радиусами $R \leq R_1$ и $R \geq R_2$, так как при $R \leq R_1$ $\frac{dR}{dt} \leq 0$ и при $R \geq R_2$ $\frac{dR}{dt} \leq 0$, и единственный предельный цикл расположен между окружностями радиусов R_1 и R_2 . Если же $4ad < (b + c)^2$, то величина R_1 оказывается мнимой, циклами без контакта среди кривых рассматриваемой топографической системы будут только окружности с радиусами $R \geq R_2$ (на них, по-прежнему, $\frac{dR}{dt} \leq 0$) и предельный цикл лежит внутри окружности радиуса R_2 ¹⁾.

Таким образом, в зависимости от параметров уравнений (5.87) мы будем иметь один из разобранных выше случаев. Области существова-

¹⁾ В последнем случае циклы без контакта, вне которых лежит предельный цикл, можно найти среди эллипсов

$$by^2 + (a - d)xy - cx^2 = \text{const.}$$

вания каждого из них, изображенные на плоскости параметров σ и Δ , даны на рис. 280.

В заключение параграфа заметим еще следующее. Для частных видов дифференциальных уравнений типа (5.1) иногда удается доказать наличие или отсутствие предельных циклов при помощи соображений, специфичных для данного уравнения, не опираясь на общую теорию. Такой анализ, представляющий большой физический интерес, был дан, например, Льенаром [174] для уравнения катодного генератора при некоторых упрощающих соображениях о симметрии характеристики.

§ 12. Приближенные методы интегрирования

Как уже неоднократно указывалось, до сего времени не существует регулярных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в общем

виде, а вместе с тем и строгих методов построения фазового портрета исследуемой нелинейной динамической системы. Поэтому для исследования конкретной динамической системы часто наиболее простым (а иногда и единственным) является метод приближенного графического интегрирования, т. е. метод построения приближенного фазового портрета данной динамической системы. Конечно, метод графического интегрирования, как и другие подобные методы, требует задания определенных численных значений для всех параметров системы или в лучшем случае заданий численных значений комбинаций из этих параметров. Это — существенный недостаток всяких методов численного интегрирования, ограничивающий общность результатов и затрудняющий обозрение всей проблемы в целом. Поэтому там, где возможно применение аналитических методов, может быть даже и сложных, их всегда следует предпочесть методам численного интегрирования. Однако к рассматриваемым нами проблемам аналитические методы исследования могут быть применены только при известных ограничивающих условиях, которые не могут быть соблюдены в ряде автоколебательных устройств, в частности в таких устройствах, которые не содержат обычных колебательных контуров. Это и есть один из тех случаев, когда метод приближенного графического интегрирования оказывается единственно возможным. Наиболее подходящим для наших целей приемом приближенного

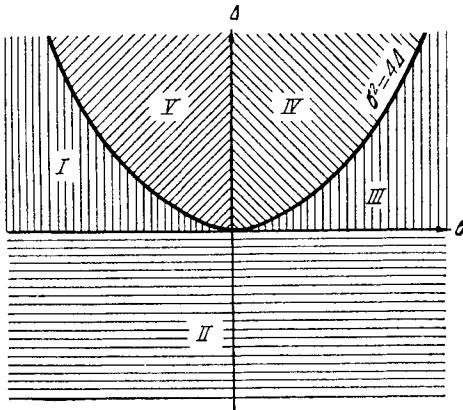


Рис. 280.