

вания каждого из них, изображенные на плоскости параметров σ и Δ , даны на рис. 280.

В заключение параграфа заметим еще следующее. Для частных видов дифференциальных уравнений типа (5.1) иногда удается доказать наличие или отсутствие предельных циклов при помощи соображений, специфичных для данного уравнения, не опираясь на общую теорию. Такой анализ, представляющий большой физический интерес, был дан, например, Льенаром [174] для уравнения катодного генератора при некоторых упрощающих соображениях о симметрии характеристики.

§ 12. Приближенные методы интегрирования

Как уже неоднократно указывалось, до сего времени не существует регулярных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в общем

виде, а вместе с тем и строгих методов построения фазового портрета исследуемой нелинейной динамической системы. Поэтому для исследования конкретной динамической системы часто наиболее простым (а иногда и единственным) является метод приближенного графического интегрирования, т. е. метод построения приближенного фазового портрета данной динамической системы. Конечно, метод графического интегрирования, как и другие подобные методы, требует задания определенных численных значений для всех параметров системы или в лучшем случае заданий численных значений комбинаций из этих параметров. Это — существенный недостаток всяких методов численного интегрирования, ограничивающий общность результатов и затрудняющий обозрение всей проблемы в целом. Поэтому там, где возможно применение аналитических методов, может быть даже и сложных, их всегда следует предпочесть методам численного интегрирования. Однако к рассматриваемым нами проблемам аналитические методы исследования могут быть применены только при известных ограничивающих условиях, которые не могут быть соблюдены в ряде автоколебательных устройств, в частности в таких устройствах, которые не содержат обычных колебательных контуров. Это и есть один из тех случаев, когда метод приближенного графического интегрирования оказывается единственно возможным. Наиболее подходящим для наших целей приемом приближенного

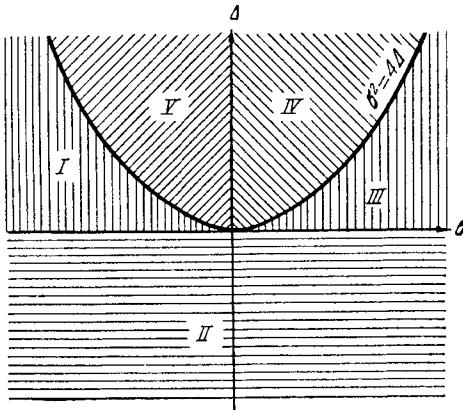


Рис. 280.

графического интегрирования является метод изоклинов. Суть этого метода заключается в следующем¹⁾. Поведение рассматриваемых нами

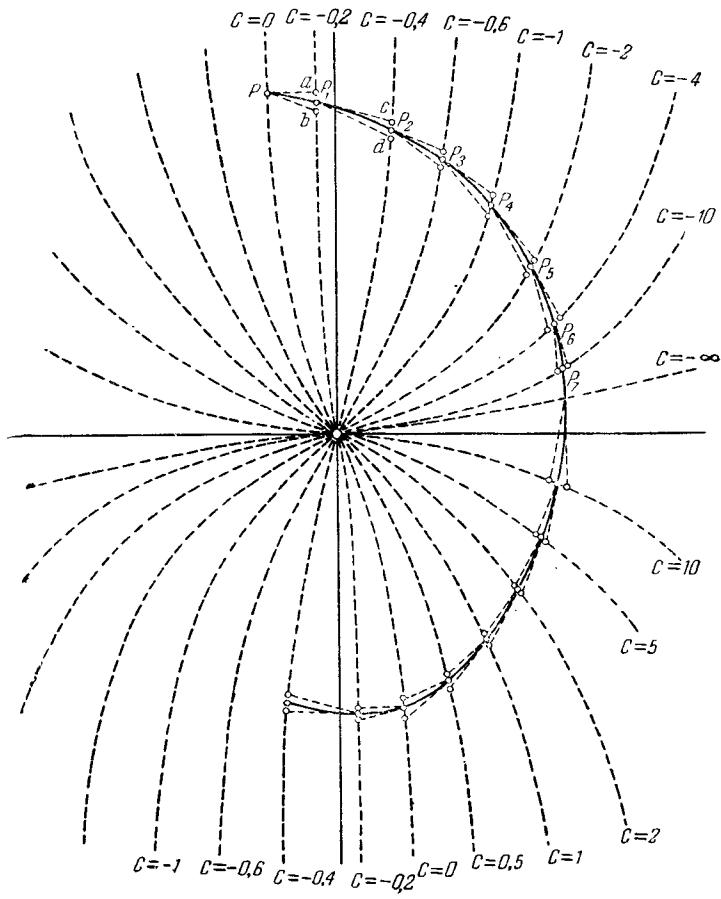


Рис. 281.

систем после исключения времени описывается одним нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = f(x, y). \quad (5.3)$$

Кривые $f(x, y) = C$ на фазовой плоскости представляют собой геометрическое место таких точек, через которые все отыскиваемые нами интегральные кривые проходят под одним и тем же углом

¹⁾ Мы ограничиваемся очень кратким изложением метода изоклинов, так как метод этот достаточно широко распространен и описание его легко найти в литературе. См., например, [110].

к оси абсцисс, именно под углом, тангенс которого равен C . Поэтому кривые $f(x, y) = C$ и носят название изоклинов (кривых равного наклона). Придавая C различные численные значения (значения параметров системы, входящих в уравнение (5.3), также должны быть численно заданы), мы можем построить на фазовой плоскости семейство изоклинов разыскиваемых интегральных кривых (рис. 281). Для каждой из изоклинов известен тот наклон, который имеют все интегральные кривые, пересекающие данную изоклину, и поэтому мы можем на каждую изоклину нанести отрезки касательных к интегральным кривым, проходящим через эту изоклину. Ясно, что точки пересечения двух или нескольких изоклинов суть особые точки, так как в них направление интегральных кривых становится неопределенным.

Построив достаточно густое поле изоклинов, можно приступить к построению приближенного фазового портрета. Начнем построение с интегральной кривой, проходящей через какую-либо точку P фазовой плоскости. Пусть точка P лежит на изоклине $C = 0$. Проводим из нее два отрезка: один в направлении касательной, соответствующей изоклине $C = 0$, а другой в направлении касательной, соответствующей соседней изоклине $C = -0,2$, до пересечения их с этой соседней изоклиной. Получаем точки a и b и лежащую между ними точку P_1 принимаем за точку нашей интегральной кривой. Из точки P_1 проводим две прямые под углами, соответствующими изоклином $C = -0,2$ и $C = -0,4$, до пересечения с изоклиной $C = -0,4$. Точка P_2 , лежащая посередине между c и d , будет третьей точкой отыскиваемой интегральной кривой. Продолжая дальше подобное построение, мы получим последовательность точек $P, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$, через которые и проведем интегральную кривую, проходящую через точку P . Подобным образом мы можем продолжать построение этой интегральной кривой и нанести на фазовую плоскость ряд других интегральных кривых. В результате мы получим, правда, приближенный, но достаточно подробный фазовый портрет исследуемой конкретной системы (имеющей определенные значения параметров). По этому портрету мы сможем судить, устанавливаются ли при данных значениях параметров автоколебания в системе, каких наибольших значений достигают x и y при этих колебаниях и т. д. Однако по этому портрету, построенному для определенных значений параметров системы, мы не можем судить о том, как изменяется поведение системы при изменении того или иного из ее параметров. Для ответа на этот вопрос нужно построить целую «галерею» фазовых портретов, соответствующих различным значениям того параметра, влияние изменений которого мы хотим проследить.

Типичным примером, иллюстрирующим применение метода изоклинов, может служить произведенное Ван-дер-Полем [188, 189] исследование фазовой плоскости уравнения

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0.$$

Это уравнение характерно (конечно, при соответствующих идеализациях) для ряда автоколебательных задач. Например, к этому уравнению может быть приведено уравнение колебаний лампового генератора в случае кубической характеристики лампы; сам Ван-дер-Поль интересовался этим уравнением в связи с теорией колебаний симметричного мультивибратора, в цепи которого введены самоиндукции.

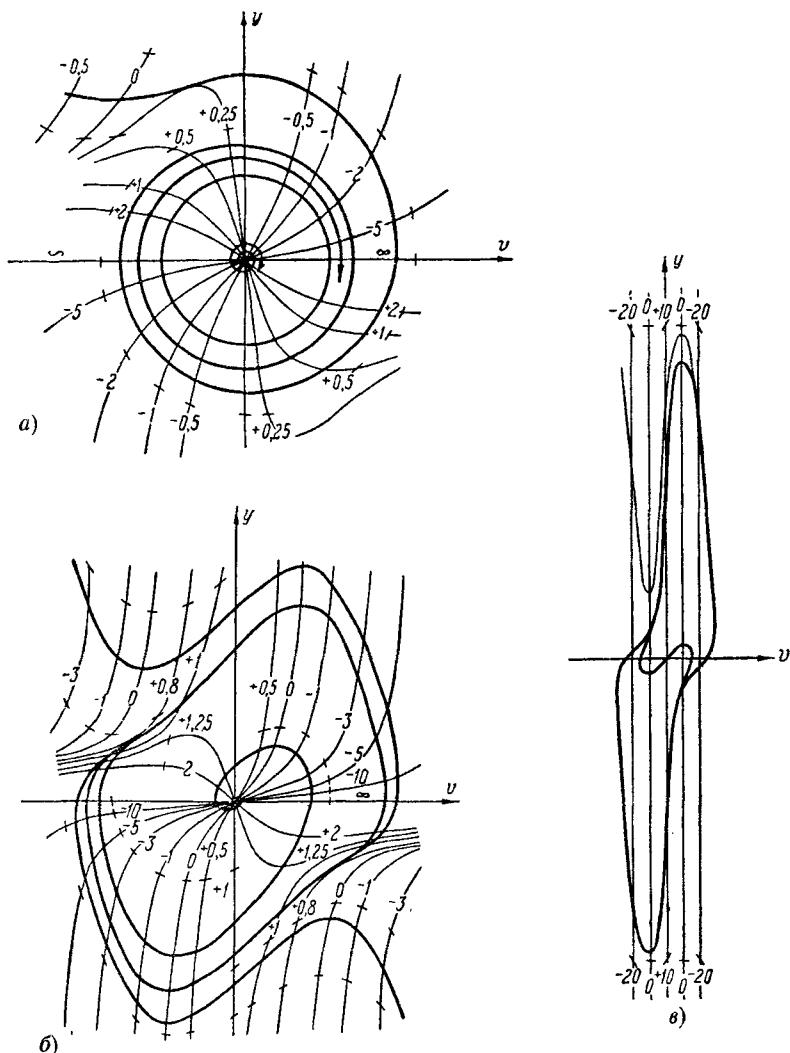


Рис. 282.

Записав уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dv}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -v + \epsilon(1 - v^2)y$$

и деля затем одно уравнение на другое, получим уравнение первого порядка — уравнение интегральных кривых:

$$\frac{dy}{dv} = \epsilon(1 - v^2) - \frac{v}{y}.$$

Придавая параметру ϵ определенные положительные числовые значения и применяя метод изоклин, Ван-дер-Поль получает «фазовую портретную галерею», изображенную на рис. 282 (*a*, *b*, *v* относятся соответственно к случаям малых, средних и больших значений ϵ). При помощи этой галереи можно судить о том, как изменяется характер движения в системе при изменении параметра ϵ . Состояние равновесия системы $(0,0)$ при $\epsilon > 0$ всегда неустойчиво (при $0 < \epsilon < 2$ — неустойчивый фокус, при $\epsilon > 2$ — неустойчивый узел). Все портреты содержат единственный предельный цикл, следовательно, при всех значениях $\epsilon > 0$ в системе происходит установление автоколебательного режима, причем установление автоколебаний является мягким (одни и те же автоколебания устанавливаются при любых начальных условиях). Но размахи и форма этих автоколебаний, а также характер их установления в разных случаях различные. При малых положительных ϵ предельный цикл близок к окружности (автоколебания близки к синусоидальным), остальные фазовые траектории суть спирали, медленно скручивающиеся к предельному циклу (рис. 282, *a*). При возрастании ϵ увеличиваются размахи величины $y = \frac{dv}{dt}$, форма автоколебаний становится все более и более отличной от синусоидальной (предельный цикл имеет форму, все более и более отличную от окружности, рис. 282, *b* и *v*); наконец, начальное нарастание колебаний (из начальных состояний, близких к состоянию равновесия), осцилляторное при малых ϵ (при $\epsilon < 2$), становится апериодическим при больших ϵ (при $\epsilon > 2$)¹⁾.

В качестве второго примера приведем построение методом изоклин фазовых портретов лампового генератора с двухзвенной *RC*-цепочкой.

¹⁾ Необходимо подчеркнуть, что, вообще говоря, форма автоколебаний не связана с характером особой точки, лежащей внутри соответствующего предельного цикла. Поэтому ту связь между формой автоколебаний и характером особой точки, которая обнаружилась в случае уравнения Ван-дер-Поля, не следует обобщать на какие-либо другие автоколебательные системы (например, на ламповый генератор с другими характеристиками лампы).

Заметим также, что кубическая характеристика может удовлетворительно передавать форму реальной характеристики лампы только в области между точками, в которых крутизна кубической характеристики обращается в нуль. Если колебания выходят за пределы этой области, то в поведении рассматриваемой математической модели могут появиться черты, вовсе не характерные для реальных ламповых генераторов.

Две схемы такого генератора (с двойным триодом и с лампой в транзитронном режиме) приведены на рис. 283. Уравнения обеих схем, полученные на основании законов Кирхгофа, при обычных наших

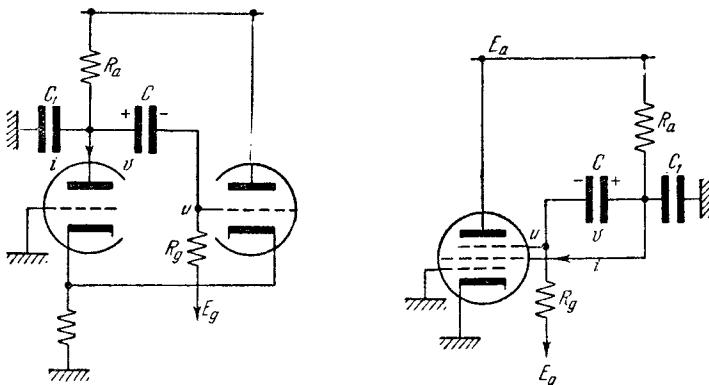


Рис. 283.

предположениях (при пренебрежении, в частности, сеточными токами и анодной реакцией) имеют в обозначениях рис. 283 следующий вид:

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{u - E_g}{R_g}; \quad \frac{E_a - (u + v)}{R_a} = i(u) + C \frac{dv}{dt} + C_1 \frac{d(u + v)}{dt}, \quad (5.88)$$

где $i = i(u)$ — характеристика ламповой группы (или лампы в транзитронном режиме); для работы схем как автоколебательных систем

существенно, что эта характеристика (рис. 284) имеет падающий участок, на котором крутизна отрицательна.

Для единственного состояния равновесия, очевидно, имеем:

$$\begin{aligned} u &= E_g, \\ v &= E_a - R_a i(E_g) - E_g. \end{aligned}$$

Для упрощения уравнений введем новые переменные

x, y , пропорциональные переменным составляющим напряжений на сетке и на конденсаторе C ,

$$u = E_g + u_0 x, \quad v = E_a - R_a i(E_g) - E_g + a u_0 y,$$

новое, безразмерное время $t_{\text{нов}} = T t_{\text{ст}}$ и приведенную, безразмерную характеристику

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S} [i(E_g + u_0 x) - i(E_g)],$$

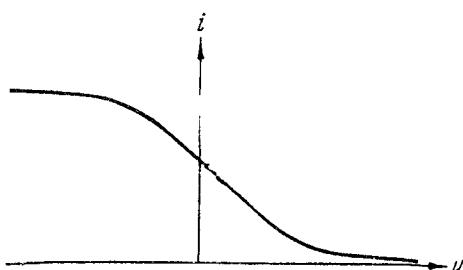


Рис. 284.

где u_0 и T — некоторые масштабы напряжения и времени, α — безразмерный коэффициент и S — абсолютное значение крутизны характеристики в «рабочей точке», соответствующей состоянию равновесия ($S = -\frac{di}{du}$ при $u = E_g$). Тогда уравнения (5.88) примут вид:

$$\frac{CR_g}{T} \dot{y} = x; \quad \frac{C_1 R_a}{T} \dot{x} = R_a S \varphi(x) - \left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_1}{C} \right) \right] x - \alpha y$$

(точкой вверху обозначено дифференцирование по новому, безразмерному времени). Выбрав

$$\alpha = 1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_1}{C} \right) \text{ и } T = CR_g + (C + C_1)R_a,$$

мы приведем уравнения (5.88) к следующему безразмерному виду:

$$\dot{y} = x; \quad \mu \dot{x} = -y - x - K \varphi(x) \quad (5.89)$$

с двумя (безразмерными) параметрами

$$\mu = \frac{R_a C_1}{R_g C} \frac{1}{\left[1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_1}{C} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad K = \frac{S R_a}{1 + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_1}{C} \right)} \quad (5.90)$$

(коэффициент усиления $K \geq 0$, а положительный параметр μ , по порядку величины обычно совпадающий с C_1/C , не превышает $1/4$)¹⁾.

Единственное состояние равновесия лежит теперь (на плоскости x, y) в начале координат; характеристическим уравнением для него, как нетрудно видеть, является квадратное уравнение

$$\mu \lambda^2 + (1 - K) \lambda + 1 = 0, \quad (5.91)$$

ибо по определению функции $\varphi(x)$: $\varphi'(0) = -1$. Поэтому это состояние равновесия устойчиво при $K < 1$, неустойчиво при $K > 1$, является фокусом при $(K - 1)^2 < 4\mu$ и узлом при $(K - 1)^2 \geq 4\mu$ (на рис. 285 приведено разбиение плоскости параметров μ, K на области, соответствующие различным типам состояния равновесия).

Бесконечность в подобных схемах всегда неустойчива. В самом деле, при больших (по абсолютному значению) напряжениях u мы попадаем на горизонтальные участки характеристики, где i или $\varphi(x)$ постоянны. Поэтому в далеких областях схема ведет себя как линейная, имеющая состояние равновесия типа устойчивого узла, и следовательно, все фазовые траектории приходят из бесконечности в

¹⁾ К уравнениям (5.89) приводятся уравнения колебаний генераторов с RC -цепочками, схемы которых получаются из изображенных на рис. 283 подсоединением к сеточному узлу (к узлу управляющего электрода лампы или ламповой группы) еще одного конденсатора (конденсатор C_1 может быть исключен). Эти уравнения при $\mu \ll 1$, $\mu \ll K - 1$ описывают также и колебания мультивибратора с одной RC -цепью (см. § 8 гл. IV), отображая существенную роль малых, паразитных емкостей (например, паразитной емкости C_1).

область конечных x , y ¹⁾). И если в начале координат лежит неустойчивое состояние равновесия (это имеет место при $K > 1$), то на фазовой плоскости существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Для случая характеристики $\varphi(x)$ с монотонно убывающей (по абсолютной величине) крутизной (при удалении от «рабочей точки») этот предельный цикл будет единственным²⁾.

Для отыскания этого предельного цикла можно применить, например, метод изоклин³⁾. Разделив первое уравнение (5.89) на второе, мы получим дифференциальное уравнение интегральных кривых:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\mu x}{y + x + K\varphi(x)}; \quad (5.92)$$

уравнением изоклины (с наклоном касательной к интегральным кривым, равным λ) будет:

$$y = - \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)x - K\varphi(x). \quad (5.93)$$

Рис. 285.

В частности, изоклиной горизонтальных касательных ($\lambda = \frac{dy}{dx} = 0$) является ось y (ось $x = 0$), а изоклиной вертикальных касательных ($\lambda = \frac{dy}{dx} = \infty$) — кривая

$$y = -x - K\varphi(x). \quad (5.93a)$$

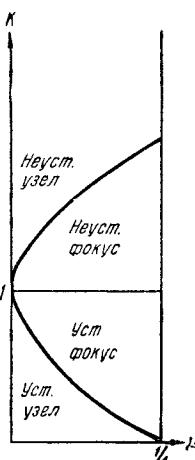
Предельные циклы, а также некоторые другие фазовые траектории, построенные при помощи метода изоклин, изображены на рис. 286—289. Построения даны для характеристики

$$\varphi(x) = \begin{cases} +\frac{2}{3} & \text{при } x \leq -1, \\ -x + \frac{x^3}{3} & \text{при } |x| \leq 1, \\ -\frac{2}{3} & \text{при } x \geq +1 \end{cases} \quad (5.94)$$

¹⁾ Строго говоря, сказанное выше доказывает неустойчивость бесконечности по всем направлениям, кроме направления вдоль оси y . Однако нетрудно убедиться, что в этом направлении экватор сферы Пуанкаре не содержит особых точек вообще, и поэтому бесконечность не может быть устойчивой и в этом направлении.

²⁾ При $K < 1$, когда начало координат — устойчивое состояние равновесия, предельных циклов не существует (в этом легко убедиться, применяя, например, критерий Бендиクсона) и все фазовые траектории асимптотически (при $t \rightarrow +\infty$) приближаются к состоянию равновесия.

³⁾ Позже, в § 5 гл. VIII, мы найдем предельный цикл для случая кусочно-линейной характеристики методом точечного преобразования.



(падающий участок характеристики аппроксимирован симметричной кубической параболой) и для различных значений параметров μ и K . В областях $x > +1$ и $x < -1$ уравнения (5.89) линейны и имеют прямолинейные фазовые траектории $y = x^*x + \frac{2}{3}K$ (в области $x > +1$) и $y = x^*x - \frac{2}{3}K$ (в области $x < -1$), где x^* — корни уравнения $x^2 + x + \mu = 0$. Этим обстоятельством можно воспользоваться для построения цикла без контакта, содержащего внутри себя предельный цикл. Этот цикл без контакта (кривые $ABCDEF$ на рис. 286—288) составляется из фазовых траекторий ABC и DEF и вертикальных отрезков прямых CD и FA .

При $0 < K - 1 \ll \sqrt{\mu}$ автоколебания в схемах близки к синусоидальным, о чем можно судить по тому, что форма предельного цикла на рис. 286 ($\mu = 0,2$ и $K = 1,2$) близка к эллипсу. При увеличении «возбуждения» схемы (при увеличении K или при уменьшении μ , когда неравенство $K - 1 \ll \sqrt{\mu}$ уже не соблюдается) форма предельного цикла искажается (рис. 287 и 288) и автоколебания становятся все более и более отличными по форме от синусоидальных¹⁾. При $\mu \ll 1$ и $\mu \ll K - 1$ автоколебания приближаются к разрывным (рис. 289), так как фазовая скорость движения изображающей точки вне кривой (5.93а) становится, как это следует из второго уравнения (5.89), очень большой (она стремится к бесконечности при $\mu \rightarrow 0$), мы получаем фазовый портрет мультивибратора с одной RC -цепью и с малой паразитной емкостью C_1 ($C_1 \ll C$). При малых μ (т. е. при $C_1 \ll C$) предельный цикл лежит в малой (тем меньшей, чем меньше μ) окрестности кривой $abga$, которая состоит из дуг кривой (5.93а) и отрезков горизонтальных прямых и является *предельным положением* (при $\mu \rightarrow 0$) предельного цикла. Этим обстоятельством, характерным не только для мультивибратора, мы будем широко пользоваться при рассмотрении различных систем с «разрывными колебаниями» (см. главу X).

Графическое интегрирование позволяет, таким образом, не только получить ответы на вопрос о поведении системы при данных значениях ее параметров, но и проследить, как изменяется поведение системы при изменении того или иного из ее параметров. Правда, для этого нужно выполнить значительное число построений. Однако в некоторых случаях такого общего обозрения поведения системы не требуется, и возникает лишь вопрос о поведении системы при данных начальных условиях, что можно приближенно описать при помощи тех значений, которые будут получать координата и скорость системы через определенные промежутки времени после начального момента t_0 . Например, если мы изучаем какой-либо периодический

¹⁾ Именно поэтому в схемы RC -генераторов синусоидальных колебаний с малым килорадиатором обязательно вводятся дополнительные элементы (термины, ограничительные диоды), которые ограничивают амплитуду автоколебаний и обеспечивают автоматически выполнение неравенства $0 < K - 1 \ll \sqrt{\mu}$.

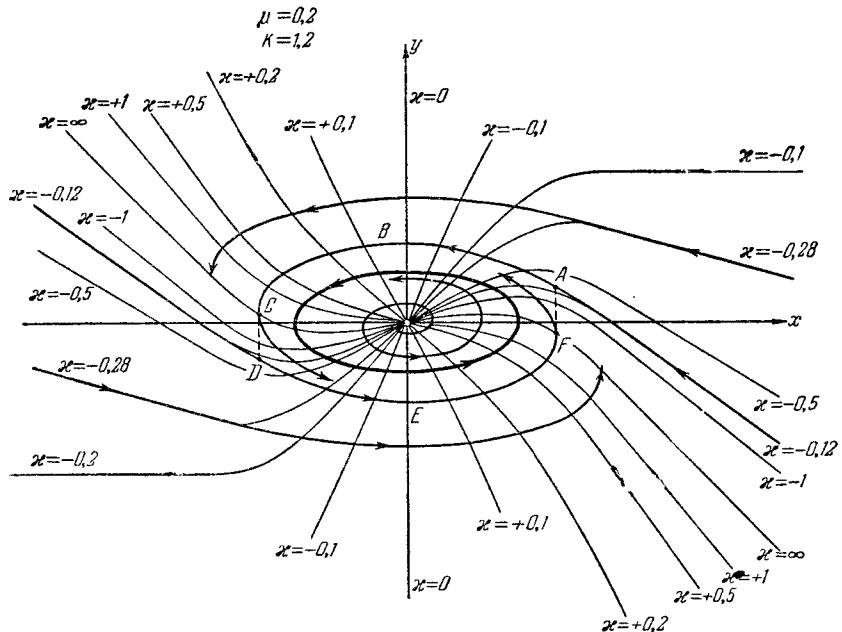


Рис. 286.

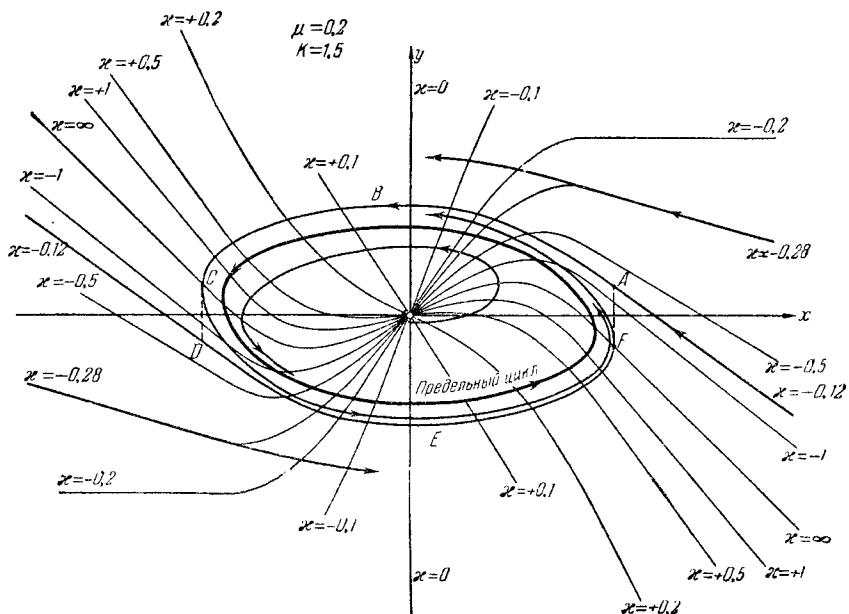


Рис. 287.

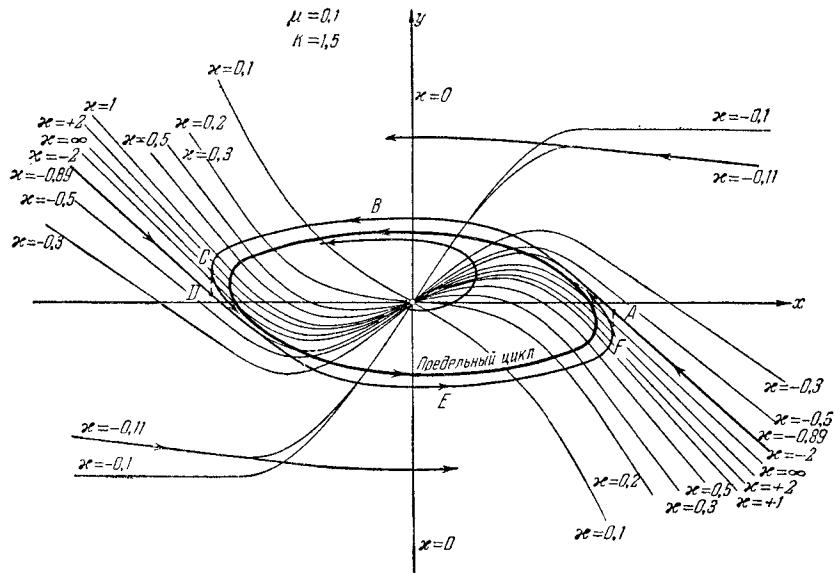


Рис. 288.

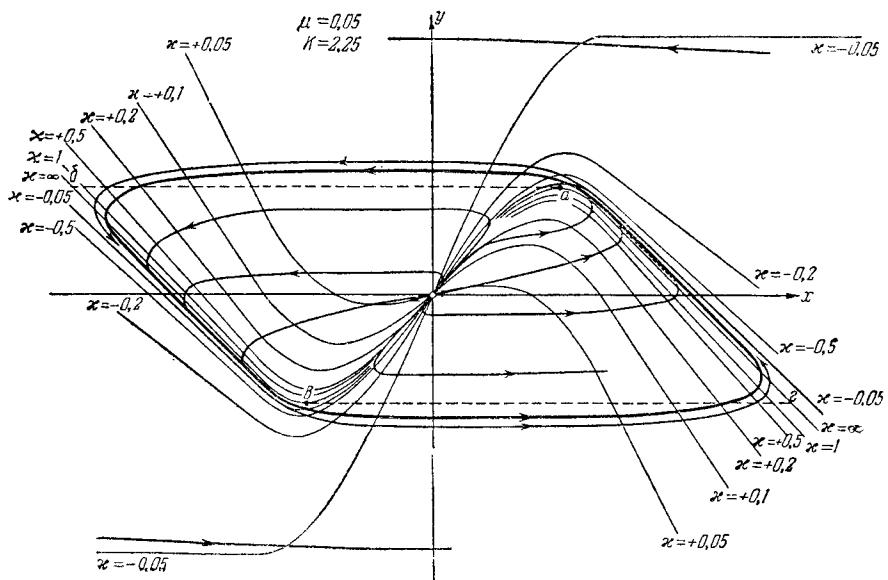


Рис. 289.

процесс и знаем одно из состояний, соответствующих этому периодическому процессу, а также хотя бы приблизительно период этого процесса τ , то достаточно вычислить значения координаты и скорости, разделенные промежутками времени, допустим, в $\frac{\tau}{10}$, чтобы получить представление о ходе всего процесса. Такие задачи — вычисление значений функций, определяемых данными дифференциальными уравнениями (и данными начальными условиями), — можно производить при помощи одного из методов приближенного численного интегрирования, например метода Адамса или метода Рунге. Этот последний метод наиболее прост и для рассматриваемых нами вопросов, пожалуй, наиболее пригоден; поэтому мы и изложим вкратце его применение к интересующим нас задачам¹⁾. Мы имеем два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (5.1)$$

и начальные значения при $t = t_0$: $x = x_0$, $y = y_0$. Нужно вычислить приращения значений x и y за малый промежуток времени Δt . Для этого составляют выражения:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= P(x_0, y_0) \Delta t, & \Delta y_1 &= Q(x_0, y_0) \Delta t, \\ \Delta x_2 &= P\left(x_0 + \frac{\Delta x_1}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right) \Delta t; & \Delta y_2 &= Q\left(x_0 + \frac{\Delta x_1}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right) \Delta t, \\ \Delta x_3 &= P\left(x_0 + \frac{\Delta x_2}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right) \Delta t; & \Delta y_3 &= Q\left(x_0 + \frac{\Delta x_2}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right) \Delta t, \\ \Delta x_4 &= P(x_0 + \Delta x_3, y_0 + \Delta y_3) \Delta t; & \Delta y_4 &= Q(x_0 + \Delta x_3, y_0 + \Delta y_3) \Delta t. \end{aligned}$$

Тогда приращения функции x и y за малый промежуток времени Δt могут быть с большой степенью точности выражены следующим образом:

$$\Delta x = \frac{1}{3} \left[\Delta x_2 + \Delta x_3 + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_4}{2} \right]; \quad \Delta y = \frac{1}{3} \left[\Delta y_2 + \Delta y_3 + \frac{\Delta y_1 + \Delta y_4}{2} \right].$$

Мы получаем значения функции x и y в момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$: $x_1 = x_0 + \Delta x$; $y_1 = y_0 + \Delta y$. Принимая x_1 и y_1 за новые начальные значения, мы можем вычислить значения x и y для момента $t_0 + 2\Delta t$ и, продолжая таким образом дальше, получить ряд последовательных значений x и y , разделенных промежутками времени Δt . Для определения каждой пары значений x и y , как видим, требуется вычисление четырех значений функции P и четырех значений функции Q . Если функции P и Q сложные, то это вычисление становится весьма громоздким. В этом случае удобнее может оказаться метод Адамса.

¹⁾ Более подробные сведения о методе Рунге, а также изложение других методов численного интегрирования можно найти в [110, 76].