ГЛАВА VI

ОСНОВЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1])

§ 1. Введение

Настоящая глава имеет чисто математический характер. В ней уточняются некоторые понятия, которыми мы пользовались в предыдущей главе, и доказываются те предложения, на которые мы опирались, рассматривая приведенные там примеры динамических систем второго порядка[2]).

Как и в гл. V, мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений второго порядка (динамическую систему)

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y) \tag{6.1}$$

с *аналитическими* на всей фазовой плоскости x, y функциями $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Мы предположим, кроме того, что функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ не имеют общего множителя, отличного от постоянного числа, т. е. не могут быть представлены в виде:

$$\left.\begin{aligned} P(x,y)&=P^*(x,y)f(x, y),\\ Q(x,y)&=Q^*(x,y)f(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

где $P^*(x,y)$, $Q^*(x,y)$ и $f(x,y)$ — аналитические функции, причем $f(x, y)$ отлична от тождественной константы. При этом предположении кривые

$$P(x, y)=0 \quad \text{и} \quad Q(x, y)=0$$

---

[1]) §§ 1, 3 и 4 данной главы написаны Е. А. Леонтович-Андроновой.

[2]) Для того чтобы сознательно пользоваться при исследовании нелинейных колебаний качественной теорией дифференциальных уравнений, нужно знакомство не только с результатами этой теории, но, в известной мере, и с теми методами, с теми способами рассуждений, при помощи которых были получены эти результаты. Поэтому в этой главе мы даем не только результаты, касающиеся общей теории поведения траекторий на фазовой плоскости, но и некоторые доказательства.

могут иметь во всякой конечной части плоскости лишь конечное число точек пересечения, и следовательно, динамическая система (6.1) может иметь лишь *конечное число состояний равновесия*[1]).

Первым вопросом, естественно возникающим при качественном рассмотрении динамических систем, является вопрос о том, какие типы фазовых траекторий вообще возможны в динамических системах второго порядка. Траектории, встречавшиеся в рассмотренных ранее примерах (см. гл. II, III и V), являлись либо состояниями равновесия, либо замкнутыми траекториями, либо, наконец, траекториями, стремящимися к состояниям равновесия или к замкнутым траекториям при $t \to +\infty$ (или при $t \to -\infty$). Исчерпываются ли этим возможные типы фазовых траекторий, и если нет, то нельзя ли установить, каковы вообще все возможные типы отдельных траекторий? Оказывается, что на основании двух общих теорем: теоремы Коши о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений и теоремы о непрерывной зависимости этого решения от начальных условий (см. Дополнение I) — можно получить исчерпывающие сведения относительно возможного характера отдельной траектории [137, 81]. Рассмотрению этого вопроса будет посвящен следующий параграф.

Перейдем от рассмотрения одной отдельной траектории к рассмотрению всей совокупности траекторий в целом. Основываясь на примерах предыдущих глав, можно ожидать, что для знания качественной картины необходимо знать взаимное расположение не всех траекторий, а лишь некоторого конечного числа так называемых «особых» траекторий. В простейших случаях такими особыми траекториями являлись состояния равновесия, замкнутые траектории и сепаратрисы. Исчерпываются ли этими типами все возможные типы «особых» траекторий, взаимное расположение которых определяет качественную структуру? И какова общая характеристика таких траекторий? Этим вопросам посвящен § 3 настоящей главы. В нем дается точное определение «особых» и «неособых» траекторий и показывается, что особые траектории разделяют всю совокупность траекторий на отдельные области — ячейки, заполненные неособыми траекториями с одинаковым поведением [17, 80, 145].

Параграфы 4 и 5 настоящей главы посвящены другому кругу вопросов. В § 4 сформулированы некоторые общие требования, которым должна удовлетворять система вида (6.1), если она соответствует реальной физической задаче. Именно, у такой системы качественная картина траекторий должна оставаться неизменной при всех достаточно малых изменениях правых частей. Системы, обладающие

---

[1]) Отметим, что в случае, когда функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют общий множитель, отличный от постоянного числа, т. е. имеют вид (6.2), все точки кривой $f(x, y) = 0$ являются, очевидно, состояниями равновесия (а эта кривая называется *особой линией* динамической системы (6.1)).

этими свойствами, называются «грубыми». В § 4 дается точная математическая формулировка грубости системы, устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы система была грубой, и рассматривается, какие типы «особых» траекторий и какие типы ячеек, заполненных обыкновенными траекториями, возможны в грубых системах [17].

В § 5 в предположении, что в правые части системы (6.1) входит некоторый параметр, рассматривается зависимость качественной картины от параметра. Если предположить «общий» характер зависимости правых частей от параметра, то можно считать, что при всех значениях параметра, кроме бифуркационных (ср. гл. II, § 5), система является грубой. При прохождении параметра через бифуркационное значение совершается переход от одной грубой системы к другой, с измененной качественной структурой. В § 5 рассмотрено, как совершается это изменение качественной структуры, и в частности, как появляются (рождаются) и исчезают предельные циклы [10—13].

§ 2. Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости. Предельные траектории и их классификация

1. Предельные точки полутраектории и траектории. Введем прежде всего некоторые элементарные понятия, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t-t_0;\ x_0,\ y_0) = x(t), \\ y &= \psi(t-t_0;\ x_0,\ y_0) = y(t) \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

— решение системы (6.1) и L — соответствующая этому решению траектория. Часть траектории, точкам которой соответствуют значения $t \geqslant t_0$, будем называть *положительной полутраекторией* и обозначать через L^+ или $L^+_{M_0}$, где M_0 — точка, соответствующая значению $t = t_0$. Точно так же часть траектории, точкам которой соответствуют значения $t \leqslant t_0$, будем называть *отрицательной полутраекторией* и обозначать через L^- или $L^-_{M_0}$.

Если при всех значениях $t \geqslant t_0$ (или $t \leqslant t_0$), при которых определено решение (6.1), изображающая точка $M[x(t),\ y(t)]$ остается в некоторой ограниченной части плоскости, то это решение заведомо определено при всех значениях t, $t_0 \leqslant t < +\infty$ (или при $-\infty < t \leqslant t_0$), так что в этом случае точкам полутраектории $L^+_{M_0}$ ($L^-_{M_0}$) соответствуют всевозможные значения $t \geqslant t_0$ ($t \leqslant t_0$). Если изображающая точка $M[x(t),\ y(t)]$ остается в некоторой ограниченной части плоскости при всех t, при которых определено решение (как $t \geqslant t_0$, так и $t \leqslant t_0$), то решение, очевидно, определено при всех t, $-\infty < t < +\infty$.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать *только такие полутраектории и траектории, которые целиком лежат в некоторой*